This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

1.50 OS (4)
bd. fr.
(avis 14/2/28)

QA
35
.N41

TRAITE'
METHODIQUE ET ABREGE'
DE TOUTES
LES MATHEMATIQVES.

TOME I.

CONTENANT UNE INTRODUCTION
Où l'on donne l'explication des termes, les regles des operations les plus neceſſaires de l'Arithmetique, & de l'Algebre ; & la pratique de pluſieurs problemes de Geometrie.

Par Mre CHARLES DE NEUVEGLISE, Prêtre, Profeſſeur au College de ſon ALTESSE SERENISSIME, Monſeigneur, Prince Souverain de Dombe, à Toiſſey.

A TREVOUX
De l'Imprimerie de S. A. S.

Et ſe vend

A LION
C LEONARD PLAIGNARD, ruë Merciere, au grand Hercule.

M. DCC.
AVEC PRIVILEGE DE S. A. S.

Hist of Sci.
Stechert
7-15-42
45948
v.1

A SON ALTESSE SERENISSIME

MONSEIGNEUR

LOUIS-AUGUSTE

PREMIER,

PRINCE SOUVERAIN

DE DOMBE.

MONSEIGNEUR,

Je prens la liberté de preſenter à VOTRE ALTESSE SERENIS-

SIME un Traité de Mathematique qui a pris ſa naiſſance dans le College de vôtre Souveraineté, où j'ay l'honneur d'être Profeſſeur. Cette raiſon ſeule ſuffiſoit pour m'avertir de mon devoir, mais au moment que je me diſpoſe à m'en acquiter, je ſens redoubler mon zele, en conſiderant que je l'offre à un Prince, qui dés ſes plus tendres années, a fait ſes delices de l'étude des Mathematiques, & qui en a penétré les myſteres les plus cachés d'une maniere ſi aiſée & ſi naturelle, qu'il a été facile de juger que VOTRE ALTESSE SERENISSIME tient beaucoup plus cette ſcience de la clarté & de la ſublimité de ſon genie, que de ſon aplication. Ce zele ardent & reſpectueux, eſt accompagné d'une grande confiance, lorſque je vois que je conſacre le fruit

de mes veilles à un autre Auguſte toûjours prêt à proteger ceux qui cultivent les Sciences, & à ſoulager les peines inſeparables d'une étude continuelle. Trop heureuſes peines ! trop glorieuſes veilles ! ſi elles reuſſiſſent à former des génies capables de tranſmettre à la poſterité l'image des éminentes vertus, que l'on voit briller dans VOTRE ALTESSE SERENISSIME, qui vous ont fait ſentir redoutable au milieu du tumulte, & du carnage de la guerre, où Vôtre valeur fatale aux ennemis de la France, s'eſt ſignalée par tant d'actions heroïques ; & qui vous font voir tout aimable dans le calme de la Paix, où VOTRE ALTESSE SERENISSIME, à l'ombre des lauriers qu'elle a cueillis au travers de tant de perils pour elle, & de tant de

sujets de crainte pour nous, s'applique à affermir le repos & la felicité de ses sujets. Elle transfere son Parlement d'une terre étrangere en son lieu naturel, elle luy fait construire un magnifique Palais, elle accorde de nouveaux Privileges aux Magistrats qui le composent, elle rétablit le commerce, & le bon ordre dans ses Etats, elle remedie par ses édits à une infinité de maux, elle soulage les pauvres, elle recompense le merite, elle projette un nouvel azile aux Arts & aux Sciences. Tant de vertus ayant concouru à former un grand Prince en la personne de VOTRE ALTESSE SERENISSIME, en ont fait l'objet de l'admiration & de l'amour des peuples sur qui elle regne, qui tous d'une voix poussent sans cesse leurs vœux

vers le Ciel pour la longue durée d'un regne ſi heureux. J'eſpere avec confiance, & demande avec ardeur l'accompliſſement de ces vœux ſi juſtes, puiſque j'ai le bon-heur d'être

MONSEIGNEUR,

DE VOTRE ALTESSE SERENISSIME,

Le tres-humble, tres-obeiſſant, & tres-fidelle ſerviteur, & ſujet
CHARLES DE NEUVEGLISE,
Prêtre, Profeſſeur aggregé au College de Toissey.

PREFACE.

IL eſt certain que de tout tems l'on a eu une grande eſtime pour les Mathématiques, & qu'on les a toûjours conſiderées comme des moyens ſûrs de perfectionner ſa raiſon. Auſſi nous voyons que dans nôtre Siecle, la plus part des gens ne croyent plus pouvoir ſe diſpenſer de les cultiver, convaincus que ſans leur ſecours il eſt preſque impoſſible de faire aucun progrés conſiderable dans les ſçiences humaines.

En effet comme l'on peut y marcher par des routes differentes, dont les unes ſont vrayes & les autres fauſſes, il eſt facile de s'y égarer & de prendre le mauvais parti, ſi l'on n'a pas aſſés de juſteſſe pour s'en garantir.

Or ce ſont les Mathématiques qui forment l'Eſprit, & le rendent auſſi juſte & auſſi exact qu'il le peut être; ce ſont elles qui l'éclairent & le font pénétrer dans les choſes les plus obſcures, pour en déterrer les verités les plus ca-

chées; qui lui donnent de l'adreſſe pour démêler les queſtions les plus épineuſes, & qui lui communiquent une force admirable, pour inventer des régles propres à ſe conduire dans la recherche de la verité, & à ne pas s'y laiſſer tromper par des maximes fauſſes, obſcures & non entenduës qu'on pourroit prendre pour de véritables principes.

Outre toutes ces ouvertures qu'elles donnent à l'eſprit, elles font encore qu'il devient plus étendu & plus capable d'enviſager tout à la fois un plus grand nombre de choſes; & cette facilité de s'étendre, lui inſpire l'amour & le goût des ſciences, fait qu'il s'y applique avec fermeté, qu'il ne s'éffraye point des difficultés qui s'y rencontrent, qu'il les conſidére avec attention, qu'il les reſoud avec aſſiduité, qu'il n'échape rien de tout ce qui peut être aperçu ſur un ſujet; & qu'enfin il forme toûjours des raiſonnemens clairs & diſtincts qui lui découvrent ordinairement la vérité qu'il cherche.

Mais ſi les Mathématiques fourniſſent à l'eſprit de ſi grands ſecours, on peut dire auſſi qu'elles contribüent en quelque maniere à régler nos mœurs.

Une des mauvaiſes diſpoſitions qui ſoient en nous, & qui eſt comme la ſource feconde de tous nos deſordres eſt l'inclination aux choſes ſenſibles & exterieures. Cette inclination que nous aportons en naiſſant venant à ſe fortifier inſenſiblement avec l'âge par le commerce de

ces choſes, devient ſi grande dans la ſuite du tems, qu'elle nous ôte preſque tout le goût des vérités purément ſpirituelles, & fait que nous tombons pour l'ordinaire dans une infinité de déréglemens. Or aprés la grace Divine & la pratique des vertus Chrétiennes, qui ſeules ſont capables de détruire entiérement une ſi mauvaiſe diſpoſition, rien n'eſt ſi puiſſant pour la diminüer & pour nous aprendre à nous défaire des impreſſions ſenſibles, modérer la fougue des paſſions, rappeller nôtre cœur à lui-même, & nous dégoûter des occupations dangereuſes, que l'étude de ces ſciences.

Qui peut douter qu'on ne doive beaucoup plus attendre d'un homme qui s'eſt toûjours accoutumé aux connoiſſances abſtraites, que de celui qui ne s'eſt jamais attaché qu'à celles qui paſſent par les ſens.

On ne ſauroit donc aſsés recommander aux jeunes gens de s'y appliquer de bonne heure puiſqu'elles ſont ſi néceſſaires, non ſeulement à les rendre plus habiles, mais encore à les faire entrer dans l'amour & dans la pratique des vérités qui conduiſent au ſalut. Mais le moyen le plus ſeur & le plus excellent pour en faciliter l'étude ſeroit ce me ſemble d'en faire des abrégés qui ne fuſſent point trop cours, mais qui euſſent aſsés d'étenduë pour en renfermer tous les principes généraux, & aſsés d'exactitude & de méthode pour en faire voir l'enchainement & les conſéquences naturelles qu'on en peut

tirer. Il n'en faudroit pas davantage pour apprendre les mathématiques & même s'y avancer ſans le ſecours d'aucun maître. C'eſt un bien qu'on pourroit attendre infailliblement de cette méthode, ſi elle étoit bien éxécutée, parce qu'elle uniroit enſemble la bréveté & la clarté, deux avantages qu'il n'eſt pas toûjours aiſé d'allier, & qui neanmoins ſont néceſſaires à des commençans.

Ce qui me confirme dans cette opinion, c'eſt que ſuivant la pensée d'un Ancien, il n'eſt rien de ſi pernicieux qu'un livre trop diffus. La multitude des choſes ſuperfluës & ſouvent mal ſuivies qui s'y rencontrent, jette dans l'embarras, & accable l'eſprit d'un lecteur qui n'eſt pas toûjours aſsés habile pour ſçavoir bien démêler ce qui eſt Principe de ce qui ne l'eſt point ; ce qui fait que tout lui paroiſſant également néceſſaire, il s'arrête à tout ce qui ſe préſente à ſon imagination, & meuble ainſi ſa mémoire de mille inutilités.

Et pour ce qui eſt des abregés trop ſuccints, ils ne ſont gueres meilleurs, car s'ils ne font qu'ébaucher la matiére, les connoiſſances qu'ils donnent ne peuvent ſuffire pour faire entreprendre à un diſciple la lecture d'un Auteur qui eſt profond ; ſi au contraire ils ne renferment que ce qu'il y a de plus miſterieux dans un ſujet ils ne ſauroient être utiles qu'aux habiles gens.

Il n'en eſt pas de même de ceux qui ont une juſte étenduë, ils ſont plus au goût & à la por-

tée de toutes ſortes de perſonnes, parce qu'ils contiennent tout ce qui eſt néceſſaire, pour l'intelligence des queſtions les plus difficiles, & qu'ils réjettent toutes les explications hors d'œuvre dont on ſe peut bien paſſer, de ſorte qu'ayant une bréveté où il ne manque rien, & l'abondance s'y trouvant ſans aucune ſuperfluité, ils ne ſçauroient être ni plus agreables, ni plus inſtructifs.

Cette conſideration m'a fait prendre le deſſein de reduire dans un abrégé clair & facile tout le cours des Mathématiques: le but que je me ſuis proposé dans cet Ouvrage eſt d'aider les jeunes gens qui ont quelque goût de ces ſciences & qui ont envie de les ſçavoir; dans cette vuë je n'ai rien épargné qui dépendît de moi pour ménager leur tems & adoucir leurs peines; je me ſuis fort attaché à ranger les principes par ordre, & à faire préceder les plus généraux à ceux qui le ſont moins; je me ſuis appliqué à bien débroüiller les difficultés qui pourroient leur faire de la peine, & j'ai tâché autant qu'il m'a été poſſible de m'accommoder en toutes choſes à leur portée.

Et afin que rien ne pût les rébuter au commencement de leur entrepriſe, j'explique d'abord dans le premier volume la plus part des termes de Matématique; j'y donne les principales régles d'operations d'Arithmetique & d'Algebre; j'éclaircis toutes les difficultés de chaque operation par des exemples; & j'y

propose les plus néceſſaires problêmes de la Geometrie.

Mais comme il eſt bon d'exciter l'imagination, & que les figures y ſont d'un merveilleux ſecours ; j'ay eu ſoin de les faire mettre à coté du texte qui en parle, à la réſerve de celles de Geometrie pratique que j'ai fait imprimér ſur deux feuilles, tant pour ne pas groſſir le volume, que pour éviter la dépenſe, & je les ai fait placer à la fin du livre, pour y avoir recours ſuivant les nombres de chaque probléme. Ie ne m'arêterai pas icy à marquer l'ordre que j'ay gardé dans les autres volumes. On le verra dans la diſtribution de chaque partie de l'Ouvrage.

Au reſte je me flatte de cette eſperance que pour peu que les jeunes gens veuillent ſe rendre attentifs, ils pourront aiſément d'eux-même entendre tout ce qui eſt contenu dans cet abrégé, parceque i'ai pris grand ſoin d'y obſerver par tout une breveté qui n'eſt ni obſcure ny embaraſſée, mais qui conduit droit à la vérité.

PRIVILÉGE

LOUIS-AUGUSTE, PAR LA GRACE DE DIEU, PRINCE SOUVERAIN DE DOMBES, Duc DU MAINE ET D'AUMALE, A Nos Amez & Feaux Conſeillers, les gens tenant nôtre Cour de Parlement, & à tous autres nos Officiers & Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Noſtre cher & bien amé CHARLES de NEUVEGLISE Prêtre & Profeſſeur en Mathématiques, en nôtre College de Toiſſey, nous a fait remonſtrer qu'il a compoſé un Ouvrage intitulé, *Traité Méthodique*, qui eſt *un abrégé de toutes les Mathématiques* à l'uſage de la jeuneſſe du dit College, & qu'il deſireroit donner au public. A CES CAUSES, voulant favorablement traitter l'Expoſant ; Nous lui avons permis & permettons par ces preſentes, de faire imprimer dans nôtre Souveraineté, vendre, débiter le dit ouvrage par tel Libraire & Imprimeur qu'il voudra choiſir, en telle forme, volumes marges & caracteres que bon lui ſemblera, & autant de fois qu'il voudra, pendant l'eſpace de dix années conſécutives, à compter du jour que le dit ouvrage ſera achevé d'imprimer pour la premiere fois, pendant lequel tems, Nous faiſons tres-expreſſes inhibitions & deffences à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes de quelque qualité qu'elles ſoient d'imprimer, ou faire imprimer, vendre & debiter le dit Ouvrage, ſous prétexte de changement, correction & augmentation en quelque ſorte & maniere que ce ſoit, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit du dit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de luy ; à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, & des Caracteres, Preſſes & Uſtenciles qui auront ſervi à les imprimer, & de tous dépens, dommages & interêts au profit du dit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de luy, & de trois mille livres d'amende, applicable un tiers à Nous, un tiers à l'Hopital général

de nôtre dite Souveraineté, & l'autre tiers audit Exposant, Vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Exposant & ceux qui auront droit de lui du contenu aux presentes, pleinement & paisiblement, cessant & faisant cesser tous empêchemens à ce contraires, à la charge de fournir un Exemplaire pour estre mis dans nôtre Bibliotheque, & un autre dans celle de nôtre Feal le Sieur de Malesieu Sécretaire de nos Commandemens, & Intendant de nôtre Domaine, Maison & Finances, Voulons en outre qu'en mettant au commencement ou à la fin du dit Ouvrage l'Extrait des presentes foy y soit ajoûtée comme à l'Original, MANDONS au premier nôtre Huissier ou Sergent sur ce requis faire pour l'execution des presentes toutes Significations, Défences, Saisies, & autres Actes necessaires: de ce faire luy donnons pouvoir, sans demander autre Permission, CAR tel est nôtre plaisir. DONNE' à Versailles le quinziéme jour d'Avril, l'an de grace mil six cens quatre-vingt quinze: Et de nôtre souveraineté le troisiéme.

LOUIS AUGUSTE.

PAR MONSEIGNEUR.

DE MALEZIEU.

Ie soussigné cede & transporte mon droit de Privilege à Leonard Plaignard marchand libraire à Lion, suivant l'accord fait entre nous. à Lion ce seiziéme May mil six cens quatre-vingt & quinze,

DENEUVEGLISE.

TABLE
DES CHAPITRES.

Du nom des Mathematiques, de leur origine, de leur progrez, & de leurs parties.

PREMIERE PARTIE.

Des Termes de la Geometrie, & des Sçiences qui y ont quelque raport.

CHAP. I. *DEs Termes les plus generaux.* page 4
II. *Des points, & des lignes.* 8
III. *Des ſuperficies, & figures.* 12
IV. *Des lignes comparées entr'elles, & des differens angles qu'elles forment.* 16
V. *Des parties du cercle, & de la meſure des angles.* 20
VI. *Des differentes figures planes rectilignes.* 28
VII. *Des differentes figures des ſolides.* 34
VIII. *Des differens noms que l'on donne aux lignes, & aux angles des figures.* 36
IX. *Des choſes qui ſe diſtinguent dans les ſolides.*

ſolides. 40
CHAP. X. *Du mouvement & des differentes choſes que l'on y conſidere.* 46
XI. *Des Spheriques.* 54
XII. *Des Mathematiques ſenſibles.* 56
XIII. *Des principaux termes de l'Architecture civile, & de ſes cinq ordres.* 68
De la diſtribution, premiere partie de l'Architecture civile. 70
De la Decoration, ſeconde partie de l'Architecture civile. 92
Des cinq ordres de l'Architecture. 110
XIV. *Des differens termes de la Fortification.* 116
XV. *Des Mecaniques.* 166
XVI. *De la Coſmographie en general.* 171
XVII. *De la Coſmographie naturelle.* 172
XVIII. *De la Sphere.* 178
XIX. *De la Geographie.* 190
XX. *De l'Aſtronomie & Theorie des Planetes.* 199
XXI. *De la Chronographie, ou Chronologie.* 212
XXII. *De la Gnomonique.* 221

SECONDE PARTIE

Où ſont expliqués les termes de l'Arithmetique & de la Muſique, les deux dernieres parties des Mathematiques.

CHAP. I. *De l'Arithmetique ſimple en general.* 226

II. *Des raports & proportions des nombres.* 245

III. *Des differentes operations de l'Arithmetique, où ſont définis les noms qui ſont en uſage, lorſque l'on eſt à l'operation.* 261

IV. *Des caracteres de l'Algebre.* 269

V. *De la Muſique.* 277

TROISIE'ME PARTIE.

Qui contient un abregé des principales operations de l'Arithmetique. 287

CHAP. I. *De l'Addition.* *ibid*

II. *De la Souſtraction.* 291

III. *De la Multiplication.* 294

IV. *De la Diviſion.* 299

V. *De la compoſition des puiſſances.* 310

CHAP. VI. *De la reſolution des puiſſances, ou extraction de racines.* 320

VII. *Qui contient quelques Problemes neceſſaires pour les operations ſuivantes.* 339

VIII. *Des operations que l'on appelle preuves.* 343

IX. *Des Fractions en general.* 350

X. *des Fractions en particulier.* 357

XI. *des Fractions de Fractions.* 362

XII. *des Regles de Reduction.* 363

Quelques regles particulieres de reduction. 367

Pour reduire les livres en ſols. ibid.

Addition des reductions.

Par livres ſols & deniers. 370

Par an, jours, heures & minutes. 371

Souſtraction avec reduction. ibid.

Regles pour multiplier des eſpeces d'un genre par les eſpeces d'un autre genre. 373

Regles abregées pour les ſols & deniers. 374

Regles pour multiplier, & reduire les eſpeces d'un même genre. 377

Regles de Diviſion en differens genres. 379

Regles pour diviſer en même genre. 380

XIII. *Des proportions & progreſſions en general.*

1 *Pour la proportion & progreſſion Arithmetique.* 382

2 *Pour les proportions & progreſſions Geometriques.* 387
CH. XIV. *Regles de proportion en particulier.* 397
des regles de Trois. *ibid.*
des regles de Cinq, ou regles de Trois doubles. 401
des regles de Compagnie. 402
des regles de fauſſe poſition. 404

QVATRIEME PARTIE,

Qui contient un abregé des principales operations de l'Algebre.

CHAP. I. *DEs principes generaux pour les operations de l'Algebre.* 410
II. *des regles de l'addition.* 411
III. *des regles de la ſouſtraction.* 418
IV. *des regles de la multiplication.* 423
V. *de la compoſition des puiſſances.* 430
VI. *de la diviſion ou partition.* 438
VII. *de l'extraction des puiſſances.* 447
VIII. *des mêmes operations en algebre que celle que nous avons traité au chap. 8. de l'arithmetique.* 457
IX. *des fractions algebriques.* 459
X. *des proportions, & progreſſions.* 468
XI. *de l'uſage de l'algebre, & de ce que l'on apelle analyſe.* 471
Regles de la tranſpoſition. 473

Regles du dégagement par la multiplication. 474
Regles du dégagement par la diviſion & l'extraction des racines. 475
Regles de la ſubſtitution. 477
Regles de la methode. 479

CINQUIEME PARTIE.

Qui contient pluſieurs Problemes de Geometrie.

CHAP. I. *DEs lignes.* 485
II. *De la diviſion du cercle, & des angles* 490
III. *De la formation des Figures.* 492.
IV. *Quelques operations ſur le terrain.* 498
V. *De la longimetrie.* 502
VI. *De la Planimetrie.* 514
VII. *De la Stereometrie.* 521
VIII. *De l'arpentage, & du toiſé.* 525

AVIS AU RELIEUR.

LA Table des Puiſſances doit être placée entre les pages 432 & 433. & les deux planches qui n'ont point de folio marqué, entre les pages 526 & 527.

TRAITE'

TRAITE'
METHODIQUE ET EN ABBREGE',
DE
TOUTES LES MATHEMATIQUES.

DU NOM DES MATHEMATIQUES, De leur origine, de leur progrez & de leurs parties.

CEux qui ont écri l'hiſtoire des Mathematiques ont remarqué que les Egyptiens ont été les premiers qui s'y ſont appliquez avec ſoin: Elles paſſerent en ſuite chez les Grecs, qui les ont repanduës dans tout le monde par les beaux Livres qu'ils nous en ont laiſſez. Ce ſont eux qui leur donnerent le beau nom de Mathematiques, qui ſignifie en leur langue Science, Doctrine ou diſcipline, non ſeulement à cauſe de la vaſte étenduë des ſujets qu'elles embraſſent; mais beaucoup plus à cauſe de la clarté & de la certitude inébranlable de leurs connoiſſances, & de l'ordre qu'elles ſuivent dans leurs raiſonnemens; ce qui les diſtingue de tant d'autres, que la varieté ſurprenante d'opinions, rend comme confuſes & incertaines.

Elles ont eu du progrez dans preſque tous les ſiecles: mais on peut dire qu'elles ne brillerent jamais tant en Egypte, dans la Grece & à Rome même, qu'elles font aujourd'hui en France.

C'eſt de nos jours qu'on a vû rétablir l'ancienne Analyſe, & la pouſſer plus loin que n'ont jamais fait les Anciens: l'Aſtronomie y ſurpaſſe infiniment celle des

Ptolomées d'Egypte ; & la Geometrie y a decouvert ce qui avoit été caché aux Archimedes & aux Apollonius. L'Architecture tant civile que militaire, les mecaniques, l'optique & generalement toutes les parties des Mathematiques ſont preſentement en une telle perfection, qu'elles donneroient des lumieres aux anciens qui en ont traité ſi ſavamment.

Ce ſont ces ſciences que nous entreprenons d'expliquer dans ce Traité, de la maniere la plus methodique & la plus abregée qu'il nous ſera poſſible, & dont le premier Tome ne ſervira que comme de rudiment & d'introduction aux autres. Voici la definition des Mathematiques & leurs principales parties.

1. Nous appellons du nom de Mathematiques generalement toutes les Sciences qui traittent de la grandeur & des nombres, & des choſes qui y ont quelque rapport, comme il ſe verra dans la ſuite.

2. La Grandeur, eſt ce qui contient en ſoi des parties unies & ſituées hors les unes des autres. AB, eſt une Grandeur, parce qu'elle à ſes parties AC, CD, DB unies & placées hors les unes des autres. fig. 1.

3. Nombre eſt une pluralité ou multitude determinée, comme deux, quatre, cent.

4. La Geometrie eſt la Science qui traite de la Grandeur, de ſes eſpeces & de ſes proprietez. Ce ſera dans la premiere Partie de ce Livre, que nous expliquerons les noms & les termes qui appartiennent à cette Science.

5. L'Arithmetique eſt la Science qui traite des Nombres & de leurs proprietez : Nous en ferons la ſeconde Partie de ce premier Tome où nous expliquerons les Termes de cette Science.

6. Les Sciences qui traitent des choſes qui ont raport aux Grandeurs & aux Nombres, prennent differens noms, comme d'Aſtronomie, de Muſique, de Perſpectives & de pluſieurs autres que nous expliquerons auſſi dans la ſuite des Parties de ce premier Tome.

A
C
D
B

PREMIERE PARTIE,

DES NOMS DE LA GEOMETRIE, & des Sciences qui y ont quelque raport.

CHAPITRE I.

Des Noms les plus generaux.

1. DIVISIBILITE' de la Grandeur, eſt le pouvoir qu'elle a d'être partagée en pluſieurs portions qui s'appellent parties.

Ainſi nous diſons que la Grandeur A B Fig. 1. eſt diviſible en ſes parties C, D, E.

2. Continuité des parties de la Grandeur, eſt la liaiſon ou union de ſes parties enſemble.

C'eſt pourquoi, ſi les parties A B, B C, C D, D E de la Grandeur A E, ſont liées & unies, elles ſont continuës. Fig. 2.

3. Contiguité des parties, eſt l'attouchement immediat des parties ſans aucune liaiſon entre-elles.

De ſorte que A B, B C, C D, dans la fig. 3. ſont appellées contiguës, ſi elles ne ſont pas unies & qu'elles ſe touchent immediatement, c'eſt-à-dire, ſans qu'il ait rien entre-deux.

4. Vicinité, eſt l'approximation de deux Grandeurs entre leſquelles eſt une autre Grandeur tres-petite.

A B & C D, ſont voiſines, parce que la Grandeur B C, qui eſt entre-deux, eſt tres-petite. fig. 4.

5. Diſtance ou éloignement, eſt la ſituation de deux Grandeurs à l'égard l'une de l'autre, lors qu'entre-elle eſt une Grandeur conſiderable.

A B & C D, fig. 5. ſont éloignées, parce qu'entre elles ſe rencontre B C, Grandeur conſiderable.

6. Incliner ſe dit d'une Grandeur qui s'aproche d'une autre : comme A B, incline du côté de B vers la Grandeur C D. fig. 6.

7. Decliner, eſt s'éloigner de quelque Grandeur, ain

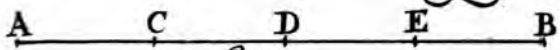


fig. 1.

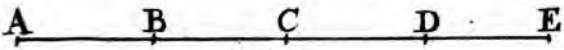


fig. 2.

fig. 3.

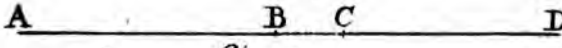


fig. 4.

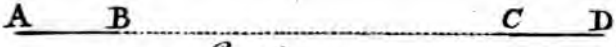


fig. 5.

fig. 6.

planche 2.

dans la même fig. 6. A, decline de CD, parce qu'il s'éloigne de CD.

8. Terminabilité de la Grandeur eſt le pouvoir qu'elle a d'être bornée.

Il n'eſt point de Grandeur qui n'aye quelques bornes ou limites, & les bornes s'appellent les termes de la Grandeur. Ainſi la Grandeur AB. fig. 1. eſt terminée dans A & B, & A & B ſont ſes termes.

9. Dimenſion de la Grandeur, eſt la ſituation ou arrangement des parties en quelque ſens.

Par exemple, dans la Grandeur AB. fig. 2. l'arrangement de ſes parties de A en B, s'apelle dimenſion, c'eſt auſſi une dimenſion differente que l'arrangement des parties de C en D. Voyez la fig. 2.

10. Il y a 3 dimentions dans la Grandeur, qui ſont lõgueur, largeur & épaiſſeur ou hauteur ou profondeur.

11. La Longueur eſt la premiere & plus grande dimenſion de la Grandeur: comme AB, 3. Fig.

12. La largeur eſt la ſeconde & moindre dimenſion, comme CB, 3. Fig.

13. La hauteur, épaiſſeur ou profondeur, eſt la troiſiéme & plus petite dimenſion, comme DE. 3. Fig.

14. Si les dimenſions ſont égales, il n'importe par laquelle on commence; en ce cas la 1. que vous conſidererez ſera la longueur, la 2. la largeur, la 3. l'épaiſſeur.

15. Il y a trois ſortes de Grandeurs, ſavoir la Ligne, la Superficie & le Corps ou Solide.

16. La Ligne eſt une Grandeur longue ſeulement, comme AB. Fig. 4.

17. La Superficie eſt une Grandeur longue & large, ſeulement, comme AB, CD. Fig. 5.

18. Solide ou Corps, eſt une Grandeur qui a les trois dimenſions, c'eſt à dire, qui a longueur, largeur & épaiſſeur, comme F. Fig. 6.

19. Il ne ſe trouve point de ligne ſeparée de la Superficie, ni de Superficie ſeparée du Solide: mais dans un Solide ou Corps, on peut y conſiderer la ligne ſeulemẽt ou la Superficie ſeulement, ou le Solide tout entier.

20. Les termes de la ligne, ſont les points; les termes de la Superficie, les Lignes; & du Solide, les Superficies.

page 7.

fig. 1.

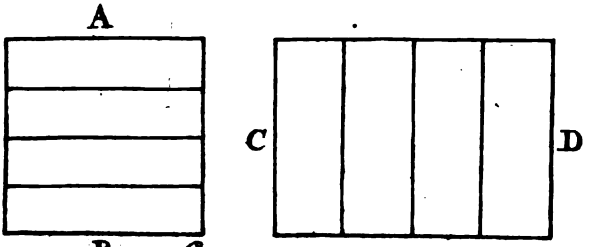


fig. 2.

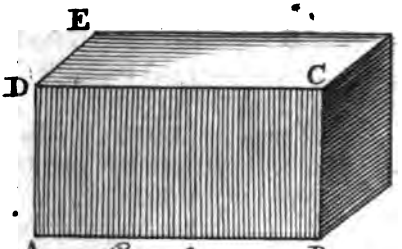


fig. 3.

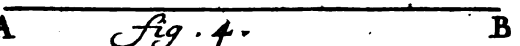


fig. 4.

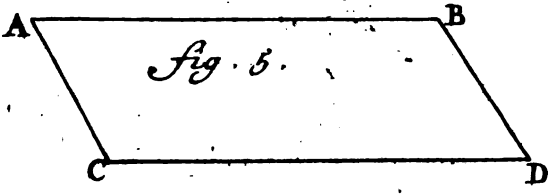


fig. 5.

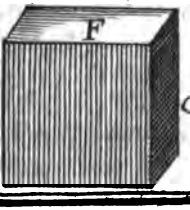


fig. 6.

planche 3.

CHAPITRE II.

Des Points & des Lignes.

1. POint, eſt ce qui n'a aucune dimenſion.

Le Point eſt le commencement des dimenſiõs, comme l'unité eſt le commencement des Nombres, on le conçoit à l'extremité d'une Ligne. C'eſt pour cela que l'on dit que la ligne eſt le chemin que parcourt le Point: comme A ſi on le conçoit ſe mouvoir en B. fi. 1.

2. Il y a trois ſortes de Points. Le commençant, le finiſſant & le copulant ou moyen.

3. Le Point commençant eſt celui par où commence la dimenſion de la Ligne, comme A. fig. 1.

4. Le Point finiſſant eſt celui par où la Ligne finit, comme dans la même figure le point B.

5. Le Point copulant ou moïen, eſt celui auquel les parties unies d'une même Grandeur ſe réüniſſent: comme D dans la Grandeur A B ou les parties A C, B C ſe vont unir. fig. 2.

6. Il y a de trois ſortes de Lignes: la droite, la courbe, & la mélangée ou plus proprement compoſée.

7. La Ligne droite, eſt celle dont les parties ſont également élevées, ou qui paſſent par le plus court chemin, comme dans la 1. fig. A B.

8. La Ligne courbe, eſt celle dont les parties continuës ne paſſant point par le plus court chemin, ſont plus ou moins élevées les unes à l'égard des autres. Telle eſt la Ligne C D. Fig. 3.

9. La compoſée eſt celle qui eſt faite de la droite & de la courbe; comme A B C fig. 4. dans laquelle A B eſt droite, & B C courbe.

10. Il y a 5 ſortes de Lignes courbes principales, qui ſont la circulaire, l'ovale, la parabolique, l'hiperbolique & la ſpirale; mais il n'y a que d'une ſorte de Lignes droites.

11. La Ligne circulaire, eſt celle qui tournant autour d'un point appellé centre, garde une même diſtance à l'égard de toutes ſes parties, juſqu'à ce qu'elle finiſſe par où elle a commencé, comme A B C à l'égard du point D Fig. 5.

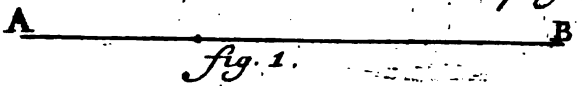
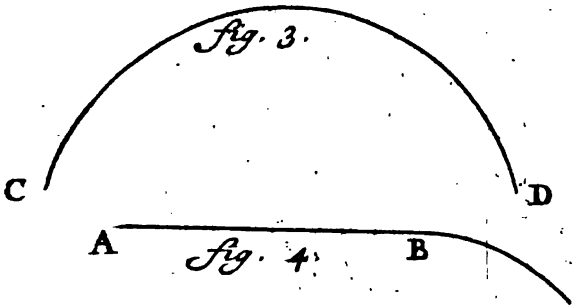


fig. 1.

fig. 2.



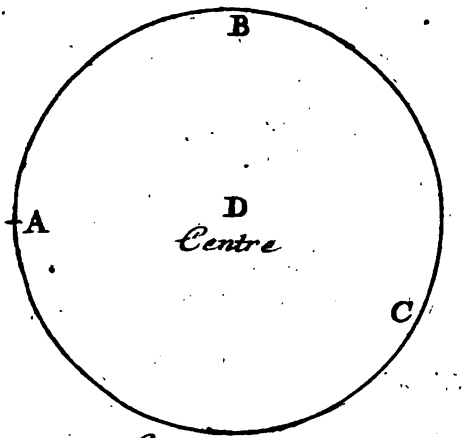


fig. 5.

12. Centre eſt le point autour duquel ſe décrit une Ligne circulaire, comme D fig. 5. & le foyer d'une ligne courbe autre que la circulaire, eſt le point qui ſert pour la deſcription de cette Ligne, comme il ſe verra cy-aprez.

13. La Ligne ovale, eſt celle qui tournant autour de ſon centre, s'en éloigne plus, ſelon une dimenſion qu'une autre. Telle eſt la Ligne courbe A B C D, laquelle s'éloigne plus du centre E, ſelon la dimenſion D B, que ſelon la dimenſion C A. fig. 1. ſon centre eſt E; mais les points N & O en ſont des foyers.

14. Plus ou moins, ſelon que la ligne ovale s'écarte, ſelon la plus grande dimenſion, cela fait une infinité d'ovales plus ou moins longs ſelon leur largeur. Comme ſont les ovales F G H. fig. 2. 3. 4.

15. La Ligne parabolique, eſt celle qui ne tournant point autour du centre, s'en éloigne uniformement, comme la ligne G L, à l'égard du point M, que l'on peut conſiderer comme le centre. fig. 5. & la ligne hyperbolique n'en differe que par rapport à la ſection du cone, dont il ſera parlé cy-aprez.

Il peut y en avoir auſſi d'une infinité de ſortes.

16. La Ligne ſpirale, eſt celle qui tournant autour de ſon centre, s'en éloigne. Ainſi la ligne B C D E, tournant autour de ſon centre, s'en éloigne continuellement. Il y en a auſſi d'une infinité d'eſpeces fig. 6. c'eſt encore une ligne ſpirale celle qui ſe décrit autour d'une ligne ou d'un bâton en maniere de vis; elle s'écarte du premier centre, & monte uniformement autour de la ligne comme le repreſente la figure 7.

Et L trelice fig. 8. n'eſt qu'une ligne compoſée de pluſieurs courbes ſituées en divers ſens.

17. Le concave d'une Ligne courbe, eſt le côté qui regarde le centre comme dans la fig. 1. A B C, conſideré à l'égard du centre E.

18. Le convexe d'une Ligne courbe, eſt le côté de cette même ligne qui regarde au dehors de l'eſpace qu'elle renferme, comme dans la même fig. 1. B C D, à l'égard de la ligne au deſſus P Q.

19. Toutes ces lignes prennent le nom general de circonference, du moins celles qui tournent autour de leur centre.

20. Il n'y a point de pluſieurs ſortes de cercles, ils ſont tous de même eſpece.

P Q

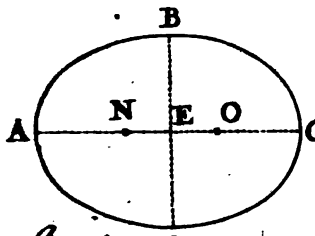


fig. 1.

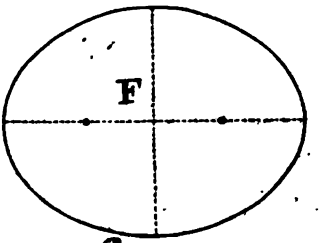


fig. 2.

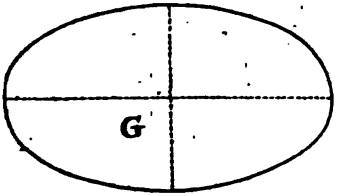


fig. 3.

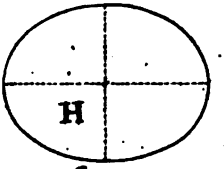


fig. 4.

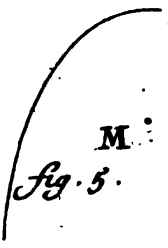


fig. 5.

fig. 8.

fig. 7.

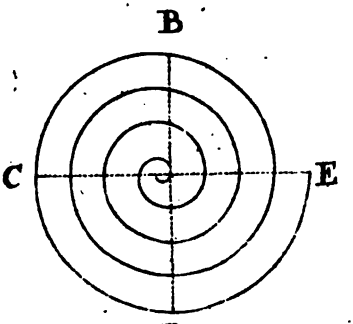


fig. 6.

CHAPITRE III.

Des Superficies & Figures.

1. INtervale, eſt une grandeur terminée de deux points ſeulement, comme la Ligne A B fig. 1.

2. Eſpace eſt une Grandeur environnée ou ceinte, comme A B C D qui eſt ceint de A B, B C, C D, D A, fig. 2.

3. Une Ligne bornée n'eſt pas eſpace, elle eſt cependant intervalle ſi elle eſt droite. Voyez la fig. 1. mais la Superficie bornée, & le Solide borné ſont des eſpaces; & la Grandeur infinie n'eſt ni eſpace, ni intervale.

4. Il y a de trois ſortes de Superficies, la Plane, la Courbe & la mélangée ou compoſée.

5. La Superficie plane ou plan, eſt celle dont les parties continuës ſont également élevées, comme A B C, fig. 3.

6. La Superficie courbe, eſt celle dont les parties continuës ſont plus ou moins élevées. Telle eſt la Superficie A B C D. fig. 4.

7. Toute Superficie n'eſt pas eſpace, parce que l'on peut imaginer une Superficie infinie, & l'eſpace doit être borné.

8. Il n'y a que d'une ſorte de Superficie plane, mais il y a de deux ſortes de Superficies courbes; la concave & la convexe.

9. La Supetficie Concave eſt celle que l'on conſidere par raport au centre de ſa courbure, la Convexe par raport au dehors. Et il y a la circulaire, l'Ovale, la Parabolique, l'hyperbolique, & la Spirale. Par raport aux Lignes dont nous avons parlé au Chapitre cy-devant nombres 11, 13, 14, 16. Voyez les fig. 4. 5. 6. 7.

10. La mélangée eſt compoſée de lignes droites & courbes, comme le repreſente la figure 8.

11. Figure eſt l'enceinte d'un eſpace.

C'eſt-à-dire, qu'en toute Superficie ou Solide borné, enceinte en eſt la figure. Voyez la fig. 3. & 8.

fig. 1.

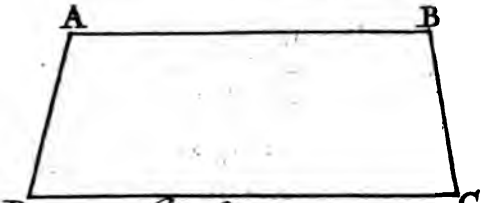


fig. 2.

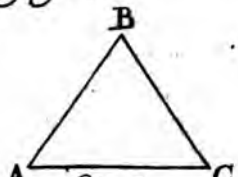


fig. 3.

fig. 4.

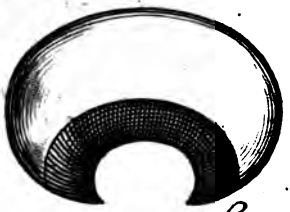


fig. 5.

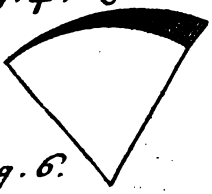


fig. 6.

fig. 7.

fig. 8.

12. Il y a deux ſortes de Figures, la ſuperficielle & la ſolide.

13. La Figure ſuperficielle eſt l'enceinte d'une Superficie.

14. La Figure ſolide eſt l'enceinte d'un corps ou ſolide. Nous parlerons de celle-cy aux Chapitres ſuivans.

15. La Figure ſuperficielle eſt ſimple ou compoſée.

16. La Figure ſimple n'eſt faite que d'une ſeule ligne courbe qui environne l'eſpace. Nous en avons cy-devant pluſieurs exemples. Il y en a de deux ſortes, la Circulaire & l'Ovale. Voyez les figures de la page cy-devant 4, 5.

17. La Figure compoſée eſt faite de pluſieurs lignes qui l'environnent, comme A B C. fig. 1. ces lignes ſont appellées les côtez de la Figure.

18. Il y a de deux ſortes de Figures compoſées, la reguliere & l'irreguliere.

19. La Figure reguliere eſt celle dont les côtez ſont égaux & également éloignez du centre, comme A B C D. fig. 2.

20. La Figure irreguliere eſt celle dont les côtez ſont ou inégaux ou inégalement éloignez du centre, comme ſont les Figures A B C D, E F, & G H, I L, M N, dont la premiere a les côtez inégaux, & la ſeconde les a égaux; mais inégalement éloignez du centre. Voyez les fig. 3. & 4.

21. La Figure tant reguliere qu'irreguliere, eſt de 3 ſortes, la rectiligne qui eſt compoſée de lignes droites, comme A B C, fig. 1. La curviligne, qui eſt compoſée de lignes courbes, comme la fig. 5. & 6. La mélangée eſt compoſée de droites & de courbes, comme la figure 7. & 8.

22. Toute ſorte de Figures ſuperficielles, tant regulieres qu'irregulieres, prennent leur nom du nombre de leurs côtez: ainſi l'on appelle triangle ou trilatere une Figure de trois côtez, quadrilatere celles de quatre, & ainſi alternativement tant aux rectilignes, que curvilignes & mélangées. Nous déduirons leurs eſpeces cy-aprez.

Page 15.

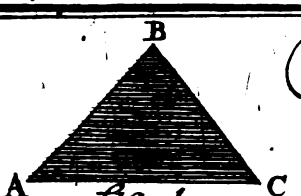


fig. 1

fig. 2

fig. 3

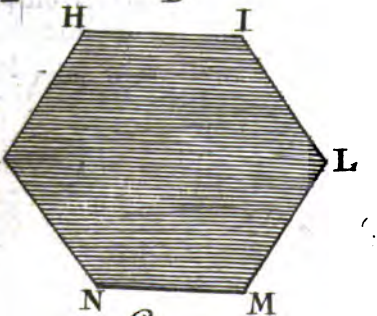


fig. 4

fig. 5

fig. 6

fig. 7

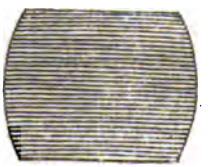


fig. 8

CHAPITRE IV.

Des Lignes comparées entr'elles & des differens Angles qu'elles forment.

1. LIgnes Paralleles, ſont celles qui s'éloignent dans toute leur étenduë également l'une de l'autre: de ſorte que ſi elles étoient prolongées à l'infini, elles ne ſe rencontreroient jamais, comme les lignes droites A B, C D, & les courbes, E F G H. fig. 1. & 2.

2. Ligne à plomb ou perpendiculaire, eſt une ligne droite qui tombant ſur une autre ligne droite, & la rencontrant, n'incline pas plus d'un côté que d'autre. Telle eſt la ligne A B tombant ſur C D. fig. 3. mais la ligne E F tombant ſur G H, n'eſt pas perpendiculaire, parce que la ligne E F incline plus du côté de H que de G. fig. 4.

3. Angle eſt l'eſpace renfermé entre des Grandeurs qui s'inclinent l'une à l'autre, & ſe rencontrent indirectement dans un même point. Telle eſt l'epace renfermé entre les lignes A B, B C, fig. 5.

4. Se rencontrer directement eſt ne faire qu'une même ligne avec une autre, ſi l'une des deux eſt prolongée au delà du point de la rencontre. Comme la ligne ponctuée A B rencontre directement B C, parce qu'étant prolongée au delà de la rencontre B juſqu'en C, toutes deux ne feront qu'une même ligne. Voyez la fig. 6.

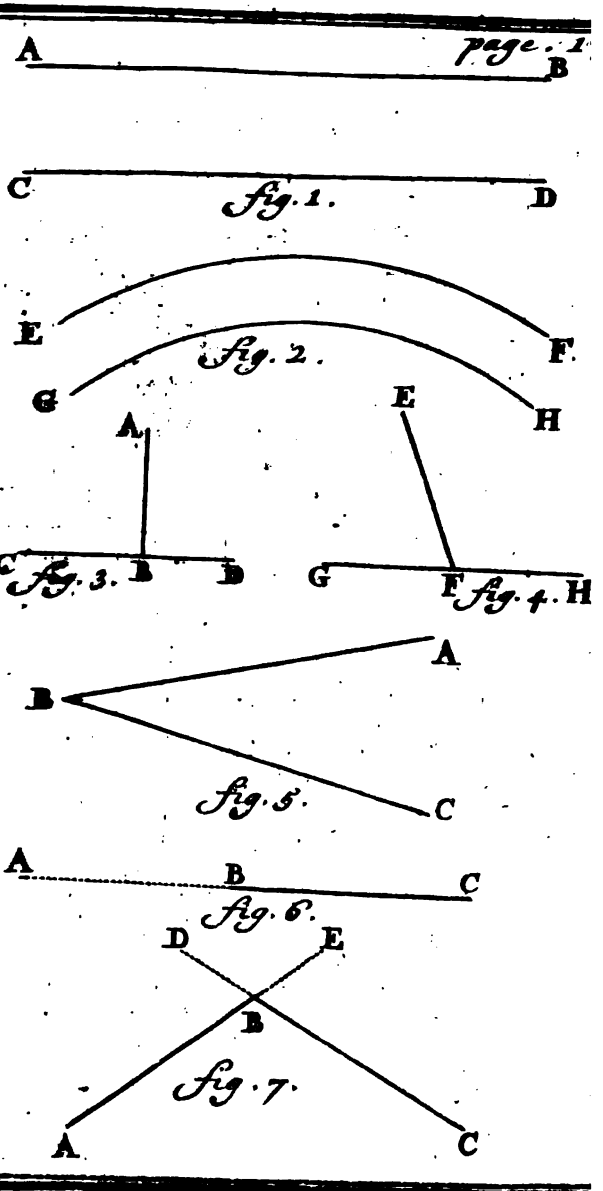
5. Se rencontrer indirectement, eſt ſe croiſer au delà du point de la rencontre, les lignes étant prolongées. Comme A B & C B au delà du point B, juſqu'en D & E. fig. 7.

6. Il y a de deux ſortes d'Angles, ſavoir le ſuperficiel & le ſolide.

7. L'Angle ſuperficiel eſt celui qui eſt fait par deux lignes qui ſe rencontrent indirectement, comme cy-deſſus. Fig. 5.

8. Un Angle ſuperficiel ne peut pas être compoſé de plus de deux lignes.

9. Un


A
B
C
D
fig. 1.
E
F
G
H
fig. 2.
A
C
B
D
fig. 3.
E
G
F
H
fig. 4.
A
B
C
fig. 5.
A
B
C
fig. 6.
D
E
B
A
C
fig. 7.

9. Un Angle ſolide eſt l'eſpace renfermé entre deux ou pluſieurs Superficies qui ſe rencontrent indirectement dans un même point ou dans une même ligne. Tel eſt l'Angle A dans la fig. 1. ou B dans la ſeconde.

10. Pluſieurs Superficies peuvent concourir à faire un même Angle ſolide, comme il ſe verra plus amplement au Chapitre des Solides.

11. L'Angle ſuperficiel eſt de deux ſortes, le plan, & le ſpherique.

12. L'Angle plan, eſt celui qui eſt fait de deux lignes ſur un plan ou ſuperficie plane, comme A B C. Fig. 3. ou D E F. Fig. 4.

13. Il y a de ſix ſortes d'Angles plans, trois qui different ſelon leurs lignes; ſavoir, le rectiligne, le curviligne, & le mélangé: & trois qui different ſelon leur ouverture, qui ſont, le droit, l'aigu, & l'obtus.

14. L'Angle rectiligne eſt compoſé de deux lignes droites, comme A B C. Fig. 5.

15. L'Angle curviligne eſt compoſé de deux lignes courbes, comme D E F. Fig. 6.

16. L'Angle mélangé eſt compoſé de la droite, & de la courbe; comme G H I. Fig. 7.

17. L'Angle droit eſt compoſé de deux perpendiculaires, comme L M N. Fig. 8.

18. L'Angle aigu eſt celui qui eſt moins ouvert qu'un droit, comme O P Q. Fig. 9.

19. L'Angle obtus eſt plus ouvert que l'Angle droit, comme R S T. Fig. 10.

20. L'Angle ſpherique eſt celui qui eſt fait ſur une Superficie courbe, comme V X Y, ſur la ſuperficie A B C D. Fig. 11.

21. La meſure des Angles eſt priſe par l'ouverture ou par l'eſpace renfermé dans l'Angle & non pas par la longueur ou petiteſſe des lignes; Ainſi l'Angle ci-deſſus R S T, fig 10. eſt plus grand que l'Angle O P Q, quand même il auroit ſes lignes plus courtes.

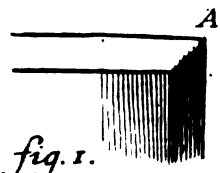


fig. 1.

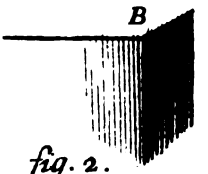


fig. 2.

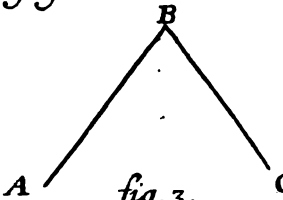


fig. 3.

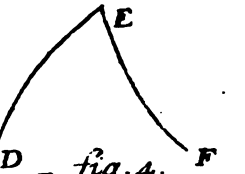


fig. 4.

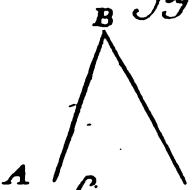


fig. 5.

fig. 6.

fig. 6.

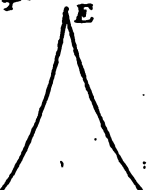


fig. 6.

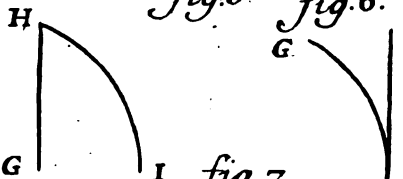


fig. 7.

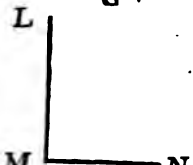


fig. 8.

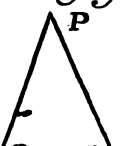


fig. 9.

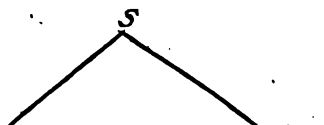


fig. 10.

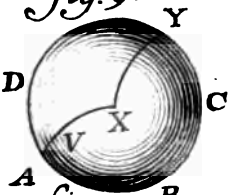


fig. 11.

CHAPITRE V.

Des Parties du Cercle, & de la meſure des Angles.

1. LE Cercle eſt une figure ſimple, au dedans de laquelle toutes les lignes droites tirées du centre à la circonference, ſont égales; ainſi toutes les lignes ou rayons tirées du centre A, à la circonference B C D E F, ſi elles ſont égales, la figure A B C D E F, ſera un Cercle. Voyez la fig. 1.

2. Le Diametre eſt une ligne droite qui paſſe par le centre du Cercle, & ſe termine de part & d'autre dans la circonference. Comme dans la premiere figure B F.

3. Le Diametre partage le Cercle en deux parties égales, comme il ſera démontré ailleurs.

4. Toutes les lignes tirées du centre à la circonference, ſont des demidiametres.

5. Segment du Cercle, eſt une portion du cercle, compriſe ſous une ligne droite, & une partie de la circonference, comme A B C, ſeconde figure ou bien A D C.

6. Segmens alternes, ſont les ſegmens qui partagent le Cercle: ainſi dans la 2. fig. A B C, & A D C, ſont les Segmens alternes. Il n'importe pas que les Segmens ſoient égaux ou inégaux.

7. Arc, eſt la portion de la circonference coupée par une ligne droite dans un Cercle, comme dans la 2. fig. la circonference A B C ou A D C.

8. Corde d'un Arc, eſt la ligne droite qui termine & coupe l'Arc, comme dans la même figure A C.

9. La fléche eſt le perpendiculaire, tombant de l'Arc ſur le milieu de la corde, comme B E ou D E, dans la 2. fig.

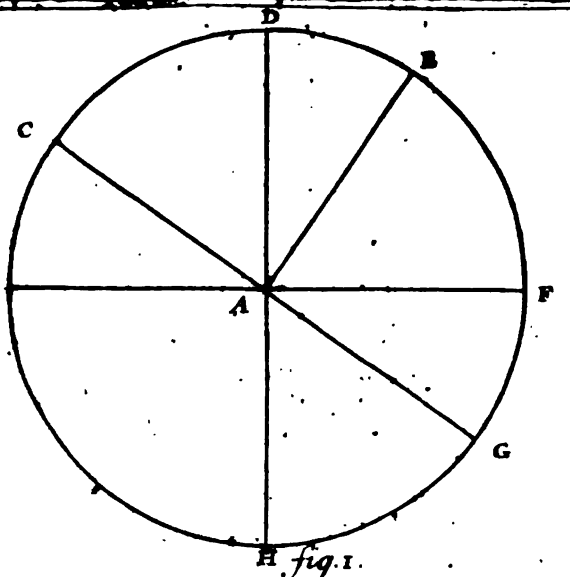


fig. 1.

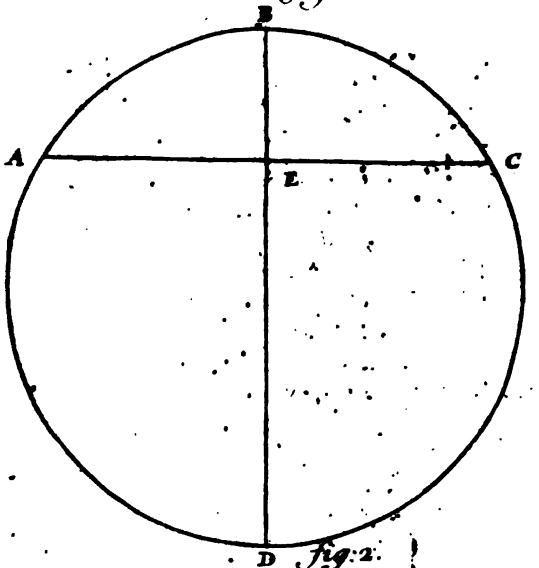


fig. 2.

10. L'Angle du Segment eſt l'eſpace compris en-
l'Arc & la corde, qui ſe rencontrent dans un point,
ime A B C, cét Angle eſt mélangé; fig. 1. l'on
elle encore Angle du ſegment celui qui eſt formé
la corde & la tangente d'un Arc. Ce dernier terme
expliqué au nombre 13. tel eſt l'angle formé par
lignes B A, A D. fig. 1. ou l'angle C E F.

11. L'Angle au Segment eſt l'eſpace compris en-
leux lignes, qui partent d'un point pris dans l'Arc,
ui vont ſe terminer aux deux extremitez de la cor-
Ainſi A B C, A D C, A E C, de la fig. 2. ſont tous
Angles au Segment A B D E C.

12. L'Angle au Segment, eſt dit s'appuyer ſur
rc ou circonference du Segment alterne: & l'Arc
egment alterne eſt appellé ſoutendant de l'Angle
egment: comme dans la troiſiéme figure. L'An-
au Segment A B C s'apuye ſur l'Arc du Segment
rne A D C; & l'Arc A D C, eſt le ſoutendant de
ngle A B C.

13. La Tangente d'un Arc ou d'un Cercle, eſt la
ie qui rencontrant l'Arc dans un point, ne le cou-
a pas ſi elle eſt prolongée. Par exemple, la ligne A
ſt la tangente du Cercle C B D, parce qu'elle ren-
tre l'Arc C B D au point B, & ne le coupe point,
nt prolongé en E; au contraire la ligne F G, n'eſt
nt tangente, parce qu'étant prolongée en H, elle
ipe l'Arc en G. Voyez la fig. 4.

14. La Secante d'un Arc, eſt la ligne qui partant
centre rencontre l'Arc en l'une de ſes extremitez
bien qui eſt menée d'un point hors le Cercle juſ-
'au centre par l'extremité de l'Arc. Telle eſt A B,
i part du centre A, & rencontre l'Arc en B ou bien
A, qui partant de C hors du Cercle, ſe termine au
ıtre A. Voyez la fig. 5. La longueur de la ſecante
n Arc ſe prend depuis le centre de l'Arc juſqu'à la
ıcontre de la tangente élevée ſur l'autre extremité
l'Arc. Comme dans la même figure A C rencon-
e par la tangente C D.

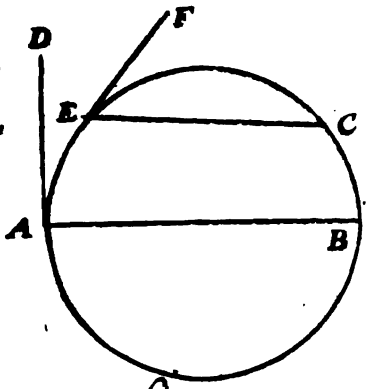


fig. 1.

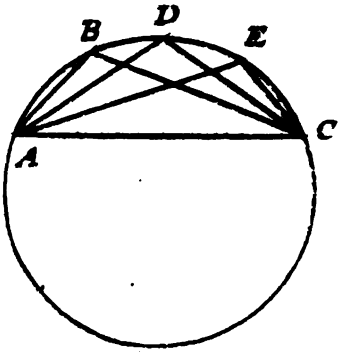


fig. 2.

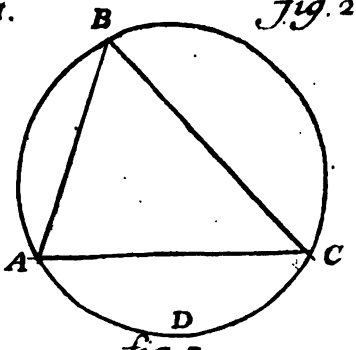


fig. 3.

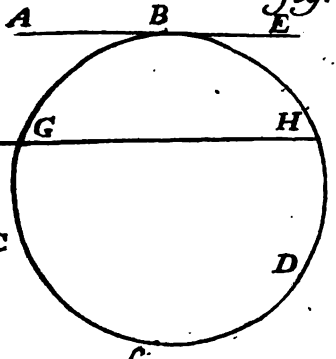


fig. 4.

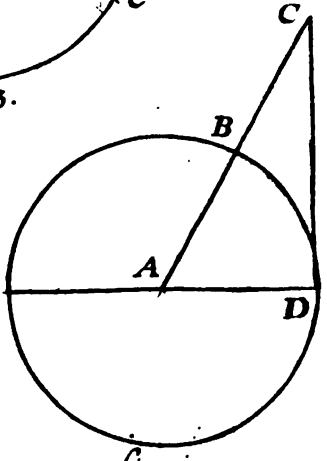


fig. 5.

15. Le Sinus droit d'un Arc, eſt la ligne qui tombe perpendiculairement de l'une des extremitez de l'Arc ſur le demidiametre du même Arc. Par exemple, ſoit l'Arc AB, de l'une des extremitez duquel ſoit mené le demidiametre BC. La perpendiculaire tombant de l'extremité A ſur le demidiametre, eſt appellée Sinus droit de l'Arc AB. Voyez la figure 1. Et le Sinus verſe du même Arc, c'eſt la perpendiculaire qui tombe de l'autre extremité de l'Arc ſur le Sinus droit. Ainſi la portion du diametre compriſe entre le Sinus droit & l'Arc, c'eſt le Sinus verſe du même Arc. Comme dans la même figure DB.

16. Un Arc ou circonference en touche un autre, ſi étant continués au delà de leur rencontre ils ne ſe coupent pas comme les deux Cercles ABC, DEF. Figure 2.

17. Mais un Arc en coupe un autre, qui étant continué le croiſe comme les Arcs BC, & AD. Figure 3.

18. La meſure de quelque Angle plan que ce ſoit, eſt l'Arc compris entre les deux lignes qui forment l'Angle, pourveu que cét Arc ſoit décrit du point de la rencontre des deux lignes qui forment l'Angle: Par exemple, ſoit donné l'Angle ABC, & que du point B comme centre, l'on décrive l'Arc CDA, cét Arc ſoutendant eſt la meſure de l'Angle ABC. Fig. 4.

19. Angles égaux, ſont ceux qui ſont ſoutendus d'Arcs égaux ou de portions égales de cercles égaux. Par exemple, ſi les Angles ABC, DEF, ſont donnez, & que des centres B & E, l'on décrive Cercles égaux ACG, DFH, les Angles B & E ſont égaux, ſi les Arcs AC, & DF ſont égaux. Fig. 5.

20. Tous les Angles droits ſont égaux, parce qu'ils ont tous des Arcs égaux, de Cercles égaux. Figure 6.

21. Pour determiner la grandeur d'un Angle ou la portion du Cercle compris entre les jambes d'un Angle, les Geometres & les Aſtronomes ſe ſont déterminez à partager tout le Cercle en 360. parties égales. Comme vous voïez en la 1. Fig. de la page ſuivante.

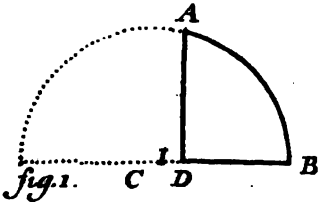


fig. 1.

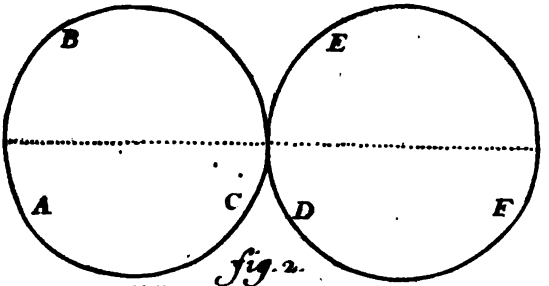


fig. 2.

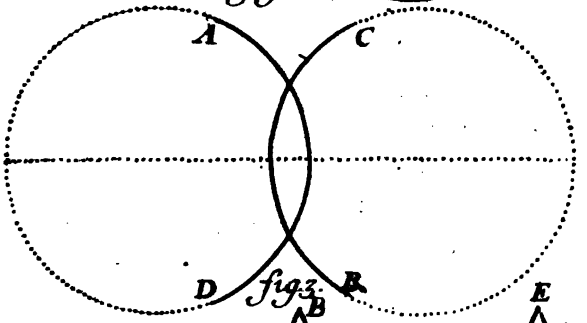


fig. 3.

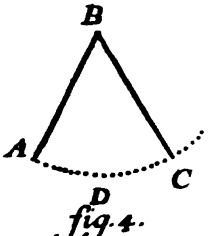


fig. 4.

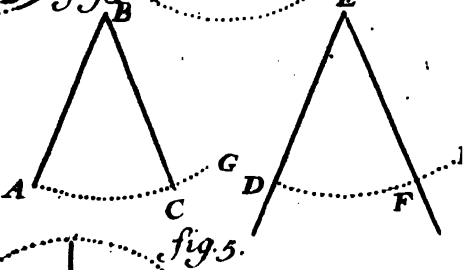


fig. 5.

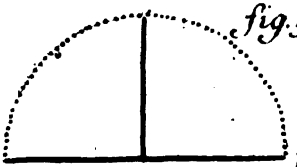


fig. 6.

22. Le demi Cercle ne contient que 180. portions du Cercle. L'on en fait de cornes transparentes ou de cuivre, qui servent à mesurer les Angles; comme nous le dirons dans la pratique. Figure deuxiéme.

23. Degré, est une des portions du Cercle divisé en 360. comme l'une de celles que vous voïez blanche ou noire dans les Figures 1. & 2. Et on appelle prime ou minute la soixantiéme partie d'un degré.

24. Seconde, est la soixantiéme portion d'une minute.

25. Troisiéme, est la soixantiéme portion d'une seconde; Quatriéme, est la soixantiéme portion d'une troisiéme: & ainsi jusques aux dixiémes, qui sont les plus petites portions dont les Mathematiciens se servent ordinairement.

26. Quart de Cercle ou de 90. est la quatriéme portion du Cercle qui contient 90. degrez, d'où il a pris son nom de quart de nonante. Voyez la Figure 3. avec le plomb que l'on met à l'Angle pour servir de mesure; comme nous le dirons dans la pratique.

27. Tous les Angles droits renferment 90. degrez: c'est pour cela, que dire un Angle de 90. degrez, c'est dire un Angle droit.

28. Un Angle prend sa dénomination du nombre des degrez qu'il renferme; c'est pourquoi l'Angle, par exemple, qui renferme 60. degrez s'appelle un Angle de 60. degrez; celui qui renferme un Arc de 30. degrez, s'appelle un Angle de 30. degrez.

29. Les minutes ou primes, se marquent par un petit trait (') les secondes par deux (") ainsi 60. minutes se marquent en cette sorte 60'. & 50. secondes de cette maniere 50".

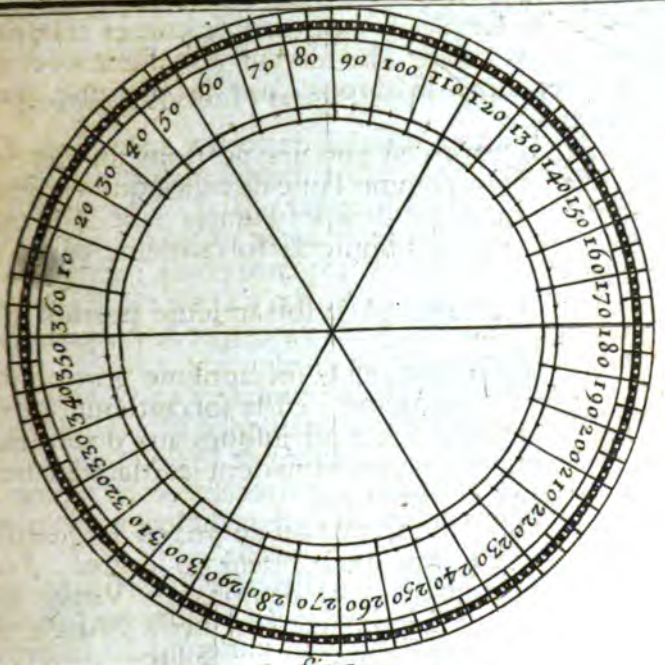


fig. 1.

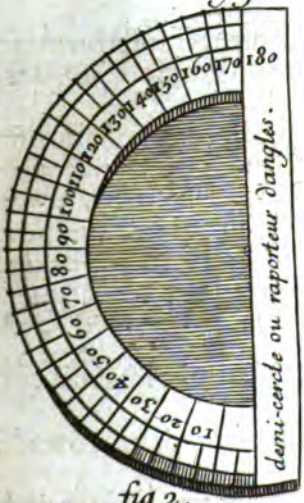
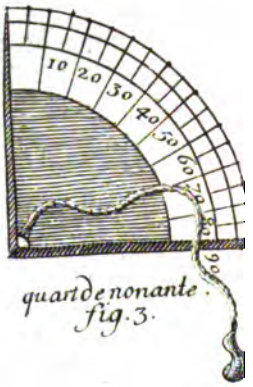


fig. 2.



quart de nonante.
fig. 3.

CHAPITRE VI.

Des differentes Figures Planes Rectilignes.

1. IL y a une infinité de ſortes de Figures Planes Rectilignes, qui prennent leurs noms du nombre des côtez qui les bornent. Ainſi l'on appelle Triangle une Figure à trois côtez ; Quadrangle ou Quadrilatere une Figure à quatre côtez ; Exagone une Figure à ſix côtez, &c. Il n'y a point de Figure plane rectiligne à deux côtez, parce que deux lignes droites ne peuvent pas clorre un eſpace.

2. Cependant l'on ne conſidere en Geometrie que trois ſortes de Figures rectilignes planes qui ſont, le Triangle, le Quadrilatere & le Poligone. Ce dernier renferme toutes les autres eſpeces de figures, qui comme nous avons dit, prennent leur nom du nombre des côtez qui l'environnent.

3. Le Triangle ou Trilatere, eſt une figure bornée de trois lignes comme A B C. Nous ne parlons ici que des Rectilignes ; nous parlerons des Spheriques ci-aprez. Voyez la fig. 1.

4. Il y a de ſix ſortes de Triangles : trois qui ſe conſiderent par rapport à leurs Angles, qui ſont, le Rectangle, l'Ambligone & l'Oxygone : les trois autres ſe diſtinguent par raport à leurs côtez, qui ſont l'Equilateral ou Iſopleure, l'Iſoſcelle & le Scalenne.

5. Le Triangle Rectangle, eſt celuy qui a un Angle droit. Voyez la 2. Figure.

6. Le Triangle Ambligone eſt celui qui a un Angle obtus. Voyez la 3. Figure.

7. Le Triangle Oxygone a les 3. Angles aigus. Figure 4.

8. Le Triangle Equilateral a les trois côtez égaux. Voyez la 5. Figure.

9. L'Iſoſcelle a ſeulement deux côtez égaux. Figure 6.

10. Le Scalenne a les trois côtez inégaux. Figure 7.

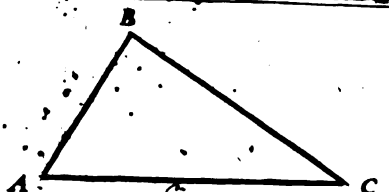


fig. 1.

triangle rectangle fig 2.

triangle ambligone fig. 3

triangle oxigone fig. 4.

triangle equilateral fig. 5

triangle Isoscelle fig. 6.

triangle Scalenne fig. 7.

11. Le Quadrilatere eſt une Figure bornée de quatre côtez. Il ſe diviſe en parallelogramme, & trapeſe.

12. Le Parallelogramme eſt un Quadrilatere dont les côtez oppoſez ſont paralleles & égaux, & les Angles oppoſez égaux, comme A B C D, de la figure 1. Et il y en a de deux ſortes, le Rectangle, & le non-rectangle, qui retient le nom ſimplement de parallelogramme.

13. Le Rectangle eſt un Parallelogramme qui a les quatre Angles droits. Voyez la ſeconde figure. Il y en a de deux ſortes, le quarré & le quarré-long.

14. Le Quarré eſt un Rectangle dont les quatre côtez ſont égaux. Fig. 3.

15. Le Quarré-long eſt un Rectangle qui a deux de ſes côtez oppoſez plus long que les deux autres. Figure 4.

16. Le Parallelogramme non rectangle n'a aucun de ſes Angles droits. Figure 5. Il y en a auſſi de deux ſortes : le Lozange, & le Rhombe ou Rhomboïde.

17. Le Lozange eſt un Parallelogramme non rectangle, qui a ſes quatre côtez égaux. Fig. 5.

18. Le Rhombe eſt un Parallelogramme non rectangle, qui a deux côtez plus longs que les deux autres. fig. 6.

19. Le Trapeſe, eſt un Quadrilatere irregulier, n'ayant ſes Angles ny ſes côtez égaux. On en peut diſtinguer de trois ſortes : par raport aux Angles; aux côtez paralleles ou non paralleles, & par rapport à quelques côtez inégaux ou égaux.

20. Le Trapeſe, par raport aux Angles, eſt ou Rectangle ou Ambligone ou Oxigone ou Mixte.

21. Le Trapeſe Rectangle doit avoir deux Angles droits, comme la fig. 7.

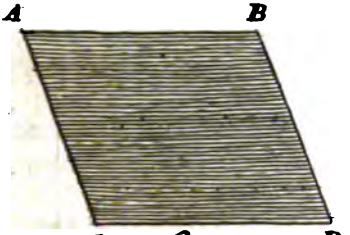


fig. 1.

fig. 2.

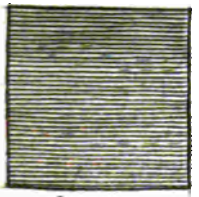


fig. 3.

fig. 4.

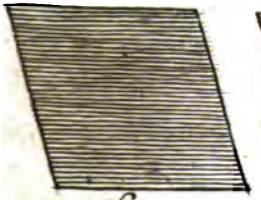


fig. 5.

fig. 6.

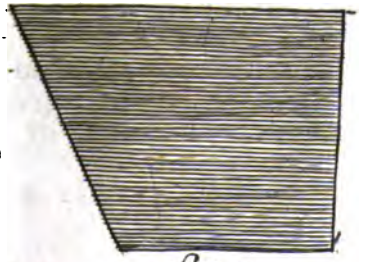


fig. 7.

22. Le Trapeſe Ambligone, eſt celui qui a deux Angles obtus, comme la fig. 1.

23. Le Trapeſe Oxygone, eſt celui qui a trois Angles aigus, comme la figure 2. Enfin le Trapeſe par raport aux Angles, prend ſa dénomination de l'Angle qui domine le plus.

24. Le Trapeſe Mixte, eſt celui qui a un Angle droit & un obtus. Fig. 3.

25. Le Trapeſe par raport aux côtez paralleles, eſt ou parallele ou non parallele, comme les figures 4. & 5.

26. Le Trapeſe par raport aux côtez égaux, eſt ou de deux côtez égaux, ou de tous ſes côtez inégaux: Le premier peut être appellé Iſoſcelle; le ſecond Scalenne. Voyez la fig. 6. & 7.

27. Le Poligone eſt une figure qui eſt bornée de plus de quatre côtez: Il y en a à l'infini, comme nous avons dit. On le diviſe cependant en regulier & irregulier. Voyez ce que nous avons dit ci-deſſus de la Figure reguliere & irreguliere, Chapitre troiſiéme.

Pentagone, eſt une figure bornée de cinq côtez. Voyez la figure 8.

Exagone, eſt une figure bornée de ſix côtez. Voyez la figure 9.

Heptagone, eſt une figure bornée de ſept côtez. Figure 10.

Octogone, eſt une Figure bornée de huit côtez. Figure 11.

Enneagone, eſt une Figure bornée de neuf côtez. Figure 12.

Decagone, eſt une Figure bornée de dix côtez. Figure 13.

Endecagone, eſt une Figure bornée de onze côtez. Figure 14.

Dodecagone, eſt une Figure bornée de douze côtez. Figure 15.

CHAPITRE

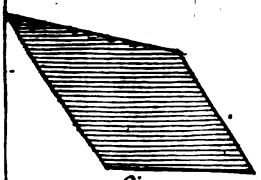


fig. 1.

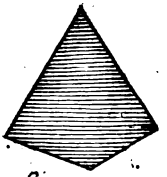


fig. 2.

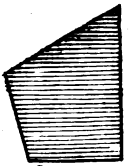


fig. 3.

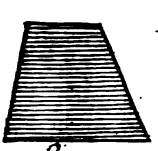


fig. 4.

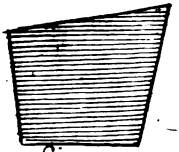


fig. 5

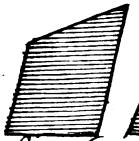


fig. 6.

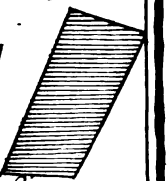
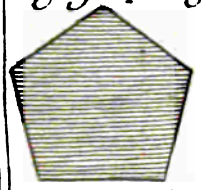
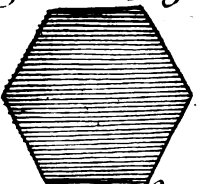


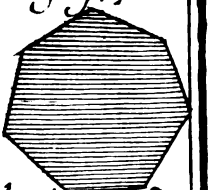
fig. 7.



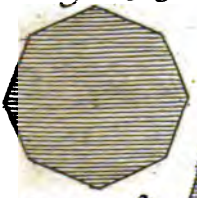
Pentagone fig. 8.



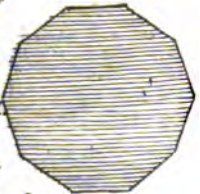
Exagone fig. 9.

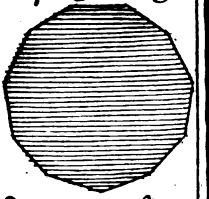


heptagone fig. 10



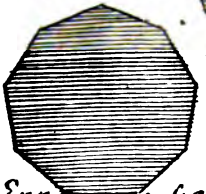
Octogone fig. 11





Endecagone fig. 14

decagone fig. 13



Enneagone fig. 12

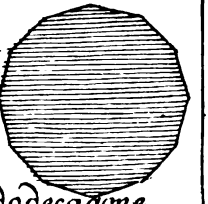


fig. 15. dodecagone.

Planche des figures volume page 55.

CHAPITRE VII.

Des differentes Figures des Solides.

A Figure des Solides eſt reguliere ou irreguliere; cette derniere a une infinité d'eſpeces que l'on peut dénommer ; nous parlerons ſeulement des reguliers, qui ſont les ſuivans.

. Le Globe eſt un Solide regulier borné d'une e Superficie ronde, de laquelle toutes les lignes que i conçoit aller juſqu'au centre, ſont toutes égales: ime le marque la Fig. 1.

Le Spheroïde eſt un Solide regulier borné d'une le Superficie ronde, de laquelle les diametres ſont gaux, ſur tout le plus grand & le plus petit. Voiez ig. 2. on apelle encores du nom de Spheroïde tou- figures irregulieres que l'on conçoit faire une re- ution entiere ſur leur baſe comme la fig. 13.

. Le Tetraëdre eſt un corps regulier, borné de ıtre plans triangulaires. Fig. 3.

. Le Cilindre eſt un Solide borné d'une Superficie de, & de deux planes. Fig. 4.

[Fig. 5.

. Le Cube eſt un Solide borné de ſix plans quarrés. Le Parallelipipede, eſt un Solide contenu ſous 6. fi- es.

ıdrilateres, dont les oppoſés ſont paralleles. Fig. 6.

. Le Cone eſt une Figure ſolide bornée de deux ›erficies, l'une plane, l'autre ronde & finiſſant en nte. On le conçoit par la revolution d'un triangle. ure 7.

. Pyramide, eſt un corps borné de pluſieurs plans : l'on conçoit menez d'un autre plan à un point où e rencontrent. Fig. 8.

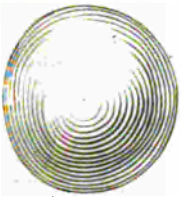
›. Priſme eſt un Solide borné par les deux bouts de ıx plans de differentes Figures, & tout au tour de ſieurs Parallelogrammes. Il peut y en avoir à l'in- i, ſuivant la figure des deux bouts. Fig. 9.

. L'Octaëdre eſt borné de 8. triangles plans. fig. 10.

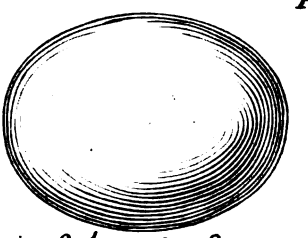
:2. Le Dodecaëdre eſt environné de douze Penta- nes plans. Fig. 11.

[l'environnent.

3. L'Icoſaëdre a 20. Triangles équilateraux qui



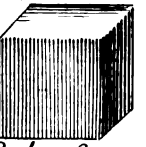
Sphere Fig. 1



Spheroide Fig. 2

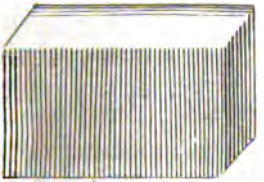
Tetraedre Fig. 3

Cilindre Fig. 4



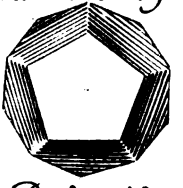
Cube Fig. 5

Cone. Fig. 7

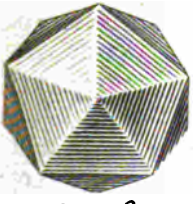


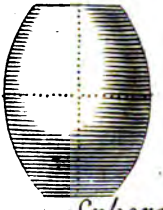
Parallelipipede Fig. 6

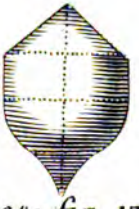
Pyramides Fig. 8



Prisme Fig. 9 Octaëdre Fig. 10 Dodecaëdre Fig. 11







Icosaëdre Fig. 12 Spheroides Fig. 13

Planche. 17

CHAPITRE VIII.

Des differens Noms que l'on donne aux Lignes & aux Angles des Figures.

1. Diagonale, eſt la ligne qui partage un Quadrilatere en deux, comme la ligne AC, du Parallelogramme ABCD. Fig. 1.

2. La Soutendante d'un Angle eſt la ligne ſur laquelle les deux jambes d'un Angle ſont appuyées. Ainſi le côté AB, eſt la ſoutendante de l'Angle C au Triangle ABC, fig. 2. & la ligne BC eſt la ſoutendante de l'Angle A, & la ligne AC, eſt la ſoutendante de l'Angle B.

3. La Baſe de toute ſorte de Figure, eſt la grandeur ſur laquelle toute la figure ſemble s'apuyer : de ſorte qu'on la conſidere toûjours au bas de toute la figure, ſoit dans les Plans, ſoit aux Solides. Ainſi AB eſt la baſe du Triangle ACB fig. 3. & le Cercle D eſt la Baſe du Cone DE. Fig. 4.

4. Hypotenuſe eſt la ſoutendante de l'Angle droit aux Triangles Rectangles, comme BC au Triangle Rectangle ABC. Fig. 5.

5. La Diametrale de toute ſorte de Figure, eſt la ligne qui part de l'une de ſes extremitez, paſſe par le centre de la figure, & va ſe terminer à l'extremité oposée. Comme AB C, au Pentagone AD CE F ou GHI, dans l'Exagone GL M IN O. Fig. 6. & 7.

6. Côté adjacent à deux Angles, eſt la ligne commune à deux Angles ; c'eſt-à-dire, qui forme deux Angles à ſes extremitez, comme AC, à l'égard des Angles A & C au Triangle ABC. Fig. 8.

7. Grandeur commune, eſt celle que l'on conçoit unie à deux grandeurs differentes ; ainſi AB eſt commune à AC & BD, dans la ligne DC. De même le Rectangle, ABCD eſt commun aux Rectangles ABEF & GHDC. Voïez la figure 9. & 10.

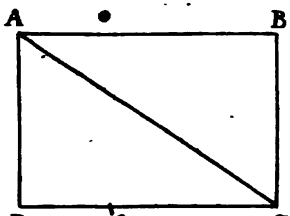


Fig. 1

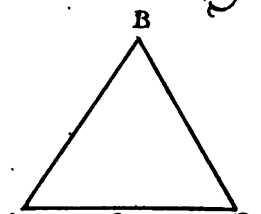


Fig. 2

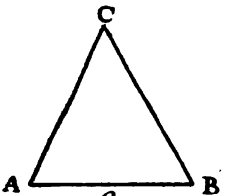


Fig. 3

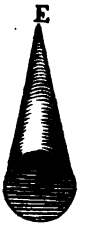


Fig. 4

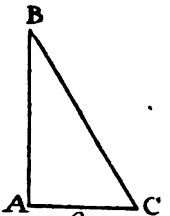


Fig. 5

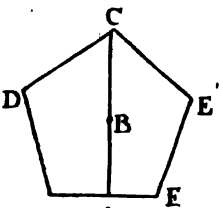


Fig. 6

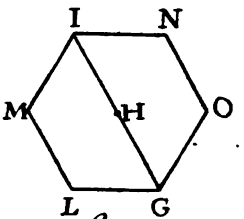


Fig. 7

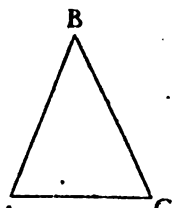


Fig. 8

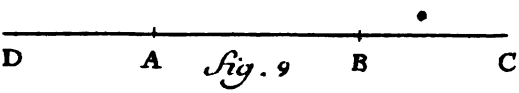


Fig. 9

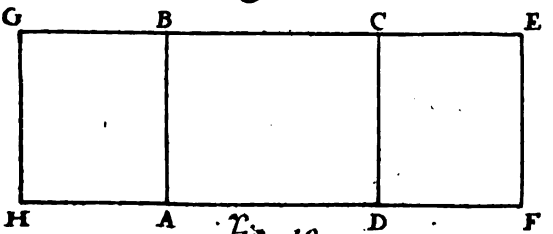


Fig. 10

8. Les Complemens d'un Parallelogramme, ſont les Parallelogrammes que la Diagonale ne diviſe point comme A B C D, C E F G du Parallelogramme H B E F Figure 1.

9. Les Parallelogrammes autour du Diametre, ſont ceux que la Diagonale ou Diametrale partage, comme dans la 1. fig. H A G C, C D E I.

10. Le Gnomon d'un Parallelogramme comprend les complemens, & l'un des Parallelogrammes autour du Diametre · on a accoûtumé de le deſigner par une portion du cercle qui finit aux côtez des complemens comme l'Arc L M N. fig. 1.

11. Angles de ſuite, ou de part & d'autre, ſont les deux Angles que forme une ligne en tombant ſur une autre, comme ſont les deux Angles A D C, C D B, que la ligne C D, forme en tombant ſur A B. fig. 2.

12. Angles oppoſez au ſommet, ſont les Angles qui ſont formez par le croiſement de deux lignes, c'eſt à dire, ceux-là ſeuls ſont oppoſez au ſommet que les lignes prolongées d'un Angle forment : comme A B C & D B E, produit par le prolongement de A B en E & de C B, en D. Fig. 3.

13. Angle externe d'une Figure, eſt celui qui eſt formé hors de la Figure par le prolongement de l'un de ſes côtez : comme B C D, eſt Angle externe du Triangle A B C. Fig. 4.

14. Les Angles internes oppoſez à l'externe dans un Triangle, ſont ceux qui ne ſont pas de ſuite à l'Externe, comme dans la fig. 4. les Angles A & B ſont les Internes oppoſez à l'Angle B C D : mais l'Angle B C A eſt de ſuite à l'Externe B C D.

15. Angles Internes aux Paralleles, ſont ce qu'une ligne forme au dedans de deux Paralleles ou pluſieurs, en tombant ſur elles : comme A B C, B C E ou E B C, B C D par la ligne G H, tombant ſur les Paralleles A B E, F D. fig. 5.

Page 39

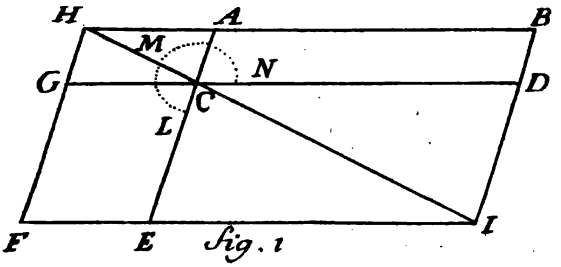


Fig. 1

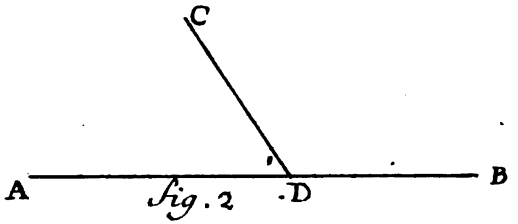


Fig. 2

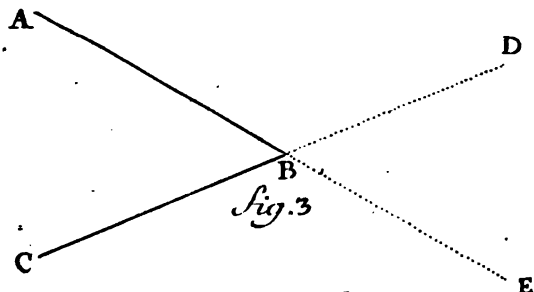


Fig. 3

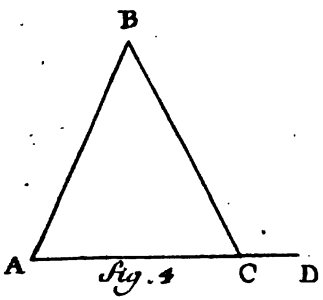


Fig. 4

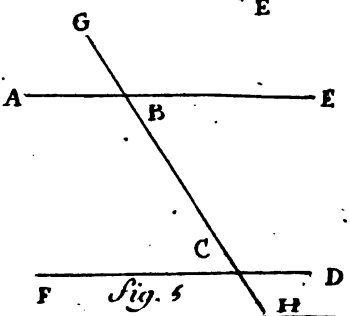


Fig. 5

Planche 19.

16. Angles externes des Paralleles, ſont ceux qu'une ligne forme au dehors de deux ou pluſieurs Paralleles tombant ſur elles : comme A G B, F C H ou B G E ou D C H. fig. 1.

17. Angles Alternes, ſont ceux que la ligne tombant ſur pluſieurs Paralleles forme de part & d'autre de l'une & l'autre Parallele, ſoit au dedans ſoit au dehors : comme dans la 1. fig. A G C, G C D. Angles Alternes Internes, & A G B, H C D, Angles Alternes Externes.

18. Angle rentrant, eſt celuy dont la pointe s'aproche du centre de la figure, comme A C B, de la Figure 2.

19. Angle ſaillant, eſt celui dont la pointe s'éloigne du centre : comme A B C. fig. 3.

20. Angle du centre, eſt celui dont la pointe eſt au centre de la figure : comme A D B. fig. 3.

21. Angle du Poligone, eſt celui que forment entre eux deux des côtez du Poligone : comme A B C. fig. 3.

Côté du Poligone, eſt une des lignes qui forment le Poligone : comme A B. fig. 3.

Il y a beaucoup d'autres noms que l'on donne aux Angles dont nous parlerons ailleurs.

CHAPITRE IX.

Des choſes qui ſe diſtinguent dans les Solides.

1. UNe ligne droite eſt perpendiculaire à un Plan, lorſqu'elle eſt perpendiculaire à toutes les lignes qui la touchent : comme F G eſt perpendiculaire au plan C D, ſi G B, G H, G A, qui la touche ſur le même plan C D, ſont toutes à Angles droits. fig. 4.

2. Un Plan eſt perpendiculaire à un autre plan lorſque toutes les lignes perpendiculaires de l'un, ſont perpendiculaires, aux perpendiculaires de l'autre plan dans la ligne de commune ſection, comme A I, G F, B E, aux lignes C L, M H, N D, du plan C D. fig. 4.

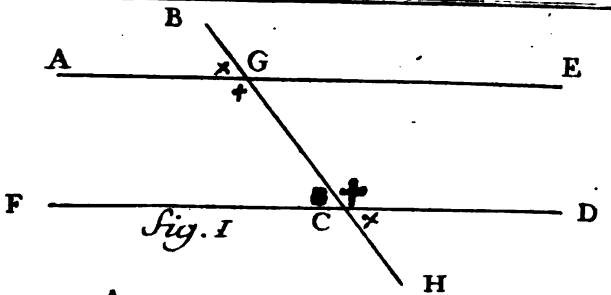


Fig. 1

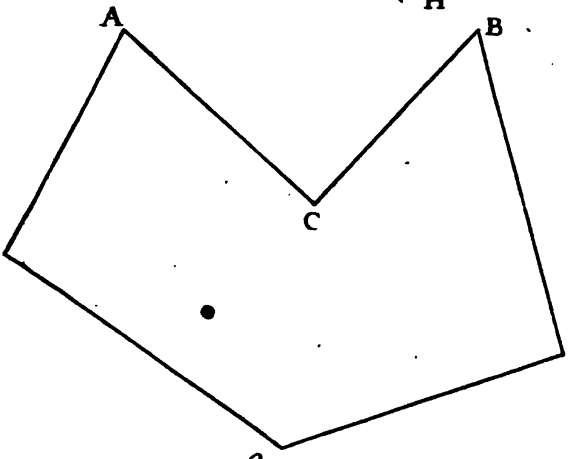


Fig. 2

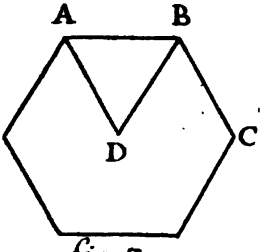


Fig. 3

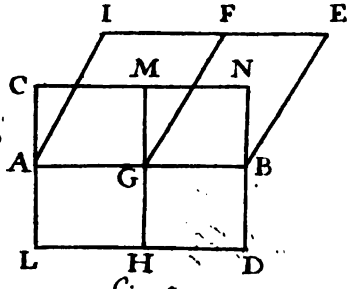


Fig. 4

Planche 20 pour la page 41.

3. Une ligne droite eſt inclinée à un plan lorſqu'elle forme un Angle aigu avec une autre ligne droite tirée ſur le plan par le point auquel tombe la ligne inclinante, comme AB, ſur le plan CD, Figure 1.

4. Un Plan eſt incliné à un autre plan, lorſque les perpendiculaires de l'un & l'autre plan forment des Angles aigus ſur la ligne de leur commune ſection, comme AB, CD, EF, à l'égard des lignes AL, CM, EN, Fig. 2.

5. Les Plans ſont ſemblablement inclinez à d'autres Plans, lorſque les Angles de l'inclinaiſon ſont égaux. Ainſi les deux plans BE, LI, de la fig. 3. ſont ſemblablement inclinez aux Plans VT, OZ, de la troiſiéme Figure, parce que les Angles d'inclinaiſon LAB, MCD, NEF, des Plans BE, LI, ſont égaux aux Angles ORV, PSX, QTY, des Plans VT, OZ.

6. Plans paralleles, ſont ceux qui ſont également diſtans en quelque part qu'ils ſoient pris, comme AB, CD, fig. 4. 5.

7. Figures planes, ſemblables ſont celles qui ont leurs Angles égaux, comme les deux plans ci-deſſus, AB, CD.

8. Solides, ſemblables ſont ceux qui ont leurs plans ſemblables, comme les deux cubes de la ſixiéme & ſeptiéme figure.

9. Axe de la Sphere, eſt la ligne droite immobile, autour de laquelle on s'imagine tourner un globe, comme AB, dans la Sphere de la fig. 8.

10. Le centre de la Sphere eſt le point du milieu de la Sphere; de ſorte que toutes les lignes qui en partent juſqu'à la circonference ſont égales: comme CD, CE, CF dans la Sphere de la fig. 8.

11. Le Diametre de la Sphere, eſt la ligne droite qui paſſant par le centre, ſe termine aux deux côtez oppoſez de la circonference, comme D C G.

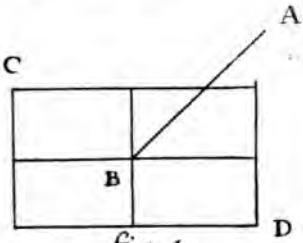


Fig. 1

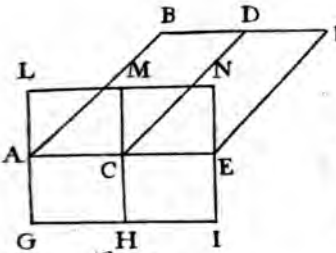


Fig. 2

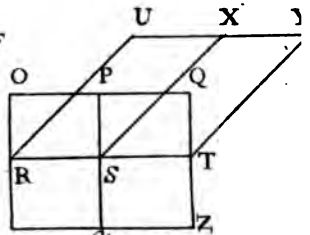


Fig. 3

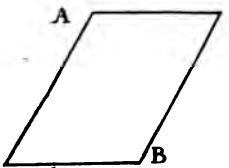


Fig. 4

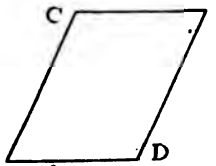


Fig. 5

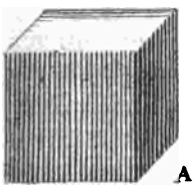


Fig. 6

Fig. 7

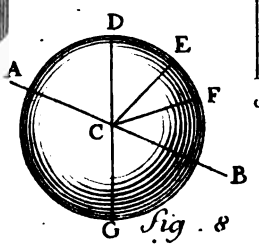


Fig. 8

Planche 21. pour la page 43

12. L'Axe du Cone eſt la ligne immobile, autour de laquelle l'on conçoit qu'un Triangle tourne pour former le Cone dans ſa revolution : c'eſt pourquoi la ligne A B dans le Cone de la 1. fig. eſt ſon Axe oppoſé.

13. La Baſe du Cone eſt le Plan circulaire oposé à la pointe du Cone, comme dans la 1. fig. le cercle CDE.

14. L'Axe du Cylindre eſt la ligne droite immobile, autour de laquelle l'on conçoit ſe mouvoir un quarré long pour former par ſa revolution le Cylindre: cõme la ligne AB du Parallelogr. AD, dans le Cylindre. fig. 2.

15. La Baſe du Cylindre eſt le plan circulaire que décrit le côté AC par ſa revolution, ou bien B D, ſi l'on conſidere le Cylindre autrement ſitué. Voiez la 2. fig.

16. Que ſi un cone eſt diverſemẽt coupé par un plan il formera les lignes courbes dont nous avons parlé ci-devant: la circulaire, ſi le plan coupe le cone parallelement à ſa baſe; l'ovale ſi les côtez du cône ſont coupez obliquement; la parabolique ſi le plan coupe le cone parallelement à un de ſes côtez; & l'hiperbolique ſi l'un des côtez étant prolongé tant que l'on voudra l'on tire de ſon extremité une autre ligne ou plan qui coupe l'autre côté du cone & ſa baſe. Voiez les figures 11. 12. 13. 14.

17. Cones & Cylindres, ſemblables ſont ceux dont les Axes & les Diametres des Baſes ont même proportion comme les Cones A, B, fig. 3. & 4. & les Cylindres C D, fig. 5. & 6. Nous dirons ci-aprez ce que c'eſt que proportion.

18. Une figure, ſoit ſuperficielle ou ſolide, eſt inſcrite dans une autre, lorſque tous ſes Angles ſont conſtituez aux côtez de l'autre fig. Ainſi ABC, eſt inſcrit dãs le cercle ABC, fig. 7. & le cube DEF, dãs la ſphere GHIL. fi. 8.

19. Une Figure, ſoit ſuperficielle ou ſolide, en circonſcrit une autre, quand ſes côtez touchent tous les Angles de l'autre figure, cõme le cercle ci-deſſus ABC, à l'égard du Triangle A B C, & la Sphere GHIL, à l'égard du Cube D E F. Fig. 7. & 8.

20. Une grandeur eſt accommodée dans une autre, ſavoir la ligne dans une Superficie, & une Superficie dans un Solide, lorſque ſes extremitez touchent tous

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

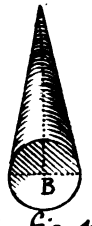


Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

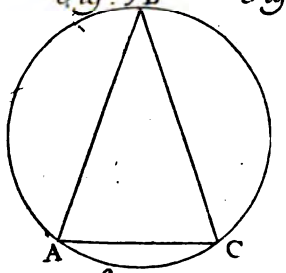


Fig. 7

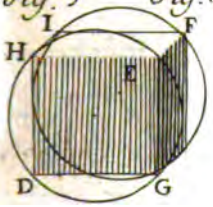


Fig. 8

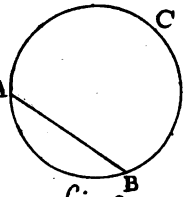


Fig. 9

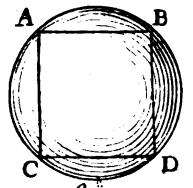


Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

Fig. 13

Fig. 14

Planche. 22

les côtez ou les Superficies de l'autre grandeur; ainsi la ligne A B est accommodée au cercle A B C. fig. 9. & le Plan A B C D, est accommodée dans la Sphere. figure 10 de la planche precedante.

CHAPITRE XI

Du Mouvement & des differentes choses que l'on y considere.

1. LE Mouvement est l'application continuë & successive d'une grande, r aux differentes parties des lieux qui l'avoisinent. Comme si vous considerez que le Globe A, s'aplique continuëment & successivement aux differentes parties de la ligne B C, comme premierement au point D, & ensuite aux points E, F, &c. le Globe sera dit se mouvoir. Fig. 1.

L'on considere dans le mouvement le mobile, le milieu, la force ou puissance, ses termes, sa determination, sa declinaison, son inclinaison, sa rencontre ou choc, sa reflexion, sa refraction, ses rayons, sa viteſſe & ses differentes especes, du moins les principales especes que peuvent considerer les Mathematiciens.

2. Le Mobile est la grandeur que l'on conçoit se mouvoir, comme dans la 1. fig. le Globe A.

3. Le milieu est le fluide dans lequel le mobile parcourt son mouvement, comme dans la 1. fig. la ligne B C, environnée d'air ou d'eau.

4. La force ou puissance du mouvement est la cause qui fait mouvoir le mobile, comme dans la 2. figure la main A, qui pousse avec un billard la boule B.

5. La quantité du mouvement se raporte à la puissance, parce qu'elle provient de la cause qui le produit: mais il faut avoir égard, non seulement à la viteſſe du mouvement, mais encore à la grosseur du mobile, à sa pesanteur, à l'espace qu'il parcourt, & à la resistance que fait le milieu. C'est pourquoi la quantité du mouvement est un aggregé de toutes ces choses.

6. Les termes du Mouvement sont les points qui bornent l'espace que le mobile parcourt, comme A B, sont les termes du mouvement A B. fig. 3.

7. La determination du mouvement est la disposition que le mobile reçoit de sa puissance pour aller plûtôt d'un côté que d'autre, comme à la pierre de plûtôt décendre selon la ligne B C, que selon la ligne B D. fig. 4.

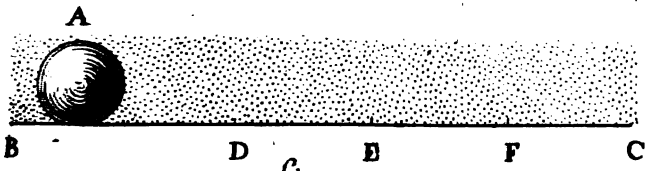


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

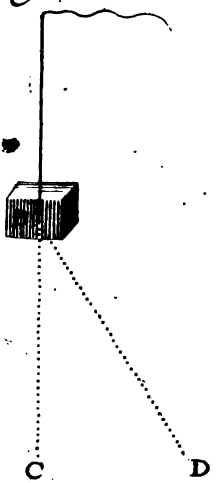


Fig. 4

Planche. 23

8. Declinaiſon du Mouvement, eſt la diſpoſition qu'il y a dans un mobile à s'éloigner de quelque part : comme ſi l'on conçoit A ſe mouvoir en B, il declinera de C. fig. 1.

9. Inclinaiſon eſt la diſpoſition du mobile à s'aprocher de quelque part, comme dans la même fig. A, à s'approcher de B.

10. Rencontre ou choc du mouvement, eſt l'atouchement immediat du mobile à quelque grandeur, comme la boule A à l'égard de la boule B, figure 2. Il y a de deux ſortes de rencontres, la directe & l'indirecte.

11. La rencontre directe eſt celle dont le mouvement aprés le choc, ſe communique en ſuivant la même determination, comme aux deux boules de la figure 2.

12. La rencontre indirecte, eſt lorſque le mouvement communiqué au ſecond mobile, ne ſuit pas la même determination. Comme ſi la boule B venant de A, rencontre la boule au point C, pour la faire mouvoir au point D, cette rencontre eſt indirecte. Figure 3.

13. Reflexion, eſt le changement de determination dans le mobile, à la rencontre d'une grandeur qui reſiſte à ſon déplacement ou à ſa diviſion. Comme ſi la boule A tombant ſur le point B de la ligne C B D, ſe detourne en E. Fig. 4.

14. Refraction, eſt le changement de determination dans le mobile, cauſé par le peu de reſiſtance que fait une grandeur au mobile qui la rencontre & la diviſe en continuant ſon mouvement. Par exemple, ſuppoſé qu'une boule tombant ſur la grandeur B C, ſuivant la ligne D E, & que diviſant B C au point D E, la boule continuë ſon mouvement & ſe détourne au point F; ce changement de determination s'apelle refraction. Voyez la figure 5.

15. Rayon, eſt le chemin que parcourt le mobile dans une même determination : comme la ligne A B, figure 4. que parcourt le mobile A, tombant ſur C B D.

16.

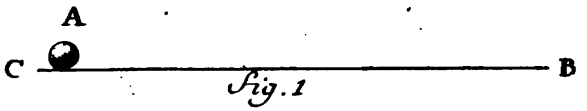


Fig. 1

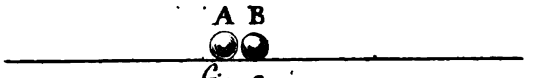


Fig. 2

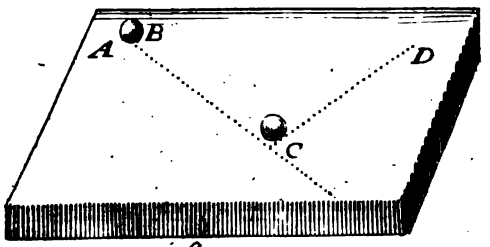


Fig. 3

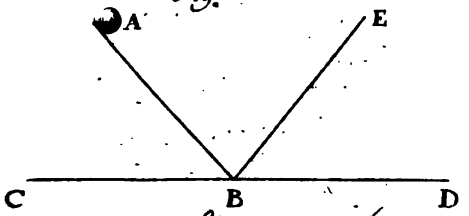


Fig. 4

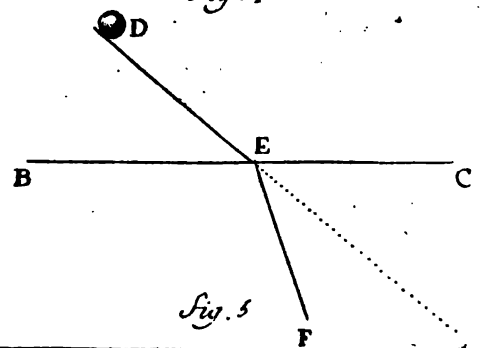


Fig. 5

16. Il y a de quatre ſortes de Rayons : le direct, l'indirect, le refléchi & le briſé.

17. Le Rayon direct, eſt celui qui parcourt le mobile dans ſa premiere determination, lorſque la reflexion ſe fait par le même chemin que le mobile a parcouru juſqu'au lieu de ſa reflexion. Ainſi A C, eſt un Rayon direct, parce que le mobile B, tombāt par le chemin A C ſur la ligne C D, la reflexion ſe fait par le même chemin C A. Fig. 1.

18. Le Rayon indirect, eſt celui que parcourt le mobile dans ſa premiere détermination, lorſque la reflexion ſe fait par un autre chemin que celui que le mobile a parcouru juſqu'au lieu de ſa reflexion. Tel eſt le rayon B C fig. 2. parce que la reflexion ſe fait par une autre ligne C D.

19. Rayon refléchi, eſt celui que parcourt le mobile dans ſa reflexion, comme C D. Fig. 2.

20. Rayon briſé, eſt celui que parcourt le mobile dans ſa refraction, comme C D. Fig. 3.

21. Viteſſe du mouvement eſt la promptitude avec laquelle le mobile parcourt ſon chemin.

22. Lenteur du mouvement, eſt le retardement ou le peu de viteſſe avec laquelle le mobile fait ſon chemin. Ainſi nous dirons que le mouvement de la boule A, eſt plus vite que celui de la boule B, ſi la boule parcourt un chemin égal à celui que parcourt la boule B en moins de temps. Fig. 4.

23. Par raport à la puiſſance du mouvement, l'on diſtingue le mouvement ſimple & le compoſé.

24. Le mouvement ſimple, eſt celui qui eſt produit par une ſeule puiſſance, comme A par le billard B. fig. 5.

25. Le mouvement compoſé, eſt celui qui eſt produit par pluſieurs puiſſances, comme le mouvement de la pierre A, par ſa peſanteur, & par le bâton B. fig. 6.

page 51.

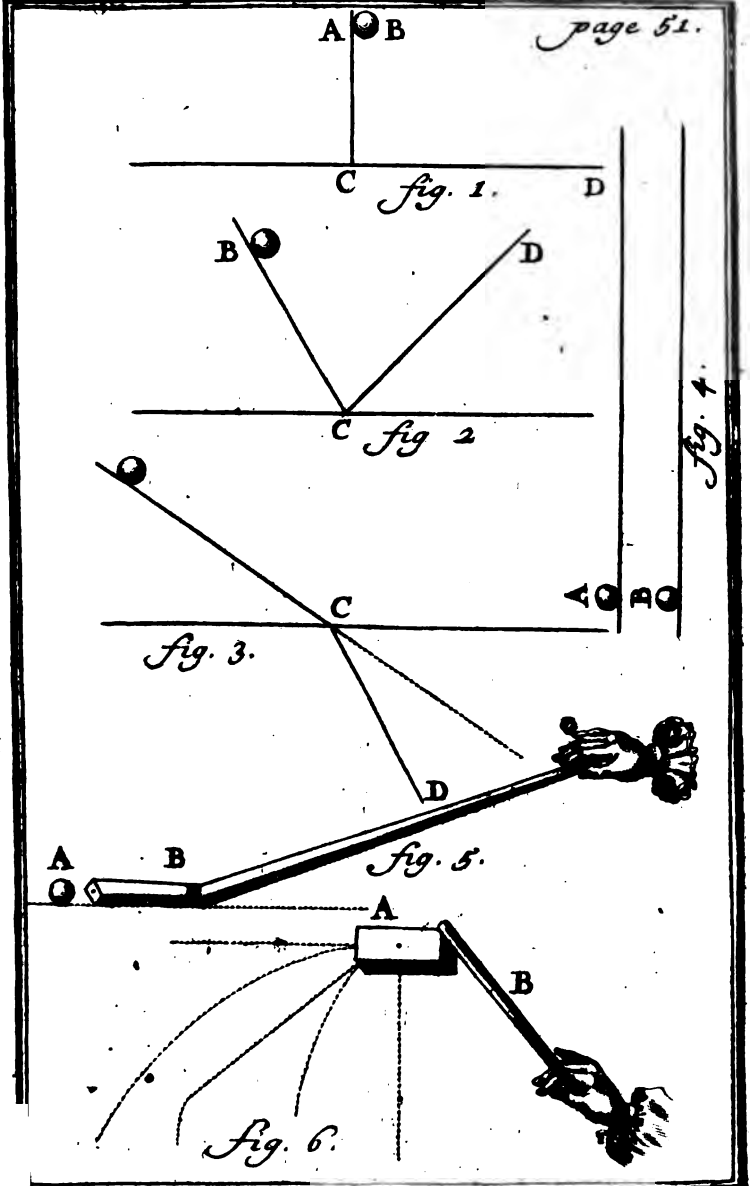


planche 23.

26. Il y a auſſi de deux ſortes de déterminations; ſimple & la compoſée.

27. La détermination ſimple eſt celle qu'une ſimple puiſſance a produite, comme au mouvement de la boule A en B. fig. 1.

28. La détermination compoſée eſt celle que pluſieurs puiſſances agiſſant en même temps produiſent, comme la détermination de la boule A en D; car ſi vous ſuppoſés une puiſſance en E, qui détermineroit la boule à aller en B, ſi elle agiſſoit toute ſeule, & en même tems une autre force en F, qui dérermineroit la boule à aller en C; il ſe fera une détermination compoſée par la ligne A, laquelle eſt du côté de B, & du côté de C en même tems. fig. 2.

29. Par raport aux puiſſances l'on diſtingue encore le mouvement des choſes naturelles comme celui des choſes peſantes, le libre comme le mouvement du bras & le violent comme le mouvement de la pierre en haut; mais ces ſortes de mouvemens regardent plûtôt le Phyſicien que le Mathematicien.

30. Il y a le mouvement droit, le circulaire, & le parabolique, ou hiperbolique, par raport au chemin que parcourt le mobile. Le mouvement droit ſe fait par une ligne droite, comme A B, fig. 3. Le circulaire par une ligne courbe, comme le mouvement de la ligne CDE, figure 4. &c.

31. Par raport au tems, il y a des mouvemens ſincroniques qui ſe font en même tems, & d'autres qui ſe font en differens tems.

32. Il y a le mouvement uniforme qui garde toûjours ſa même détermination & ſa même viteſſe, & des mouvemens difformes qui changent de détermination ou de viteſſe, ce qui fait les mouvemens accelerez qui augmentent leur viteſſe dans leur progreſſion, comme les choſes peſantes; & les ralentis qui diminuent comme le mouvement d'une toupie qui diminüe inſenſiblement. Il y a pluſieurs autres eſpeces de mouvement; mais je crois qu'il eſt inutile de les raporter ici.

page 53.

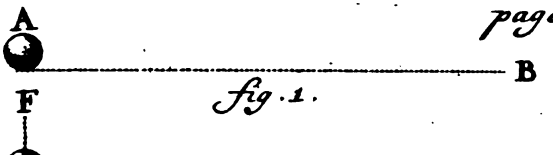


fig. 1.

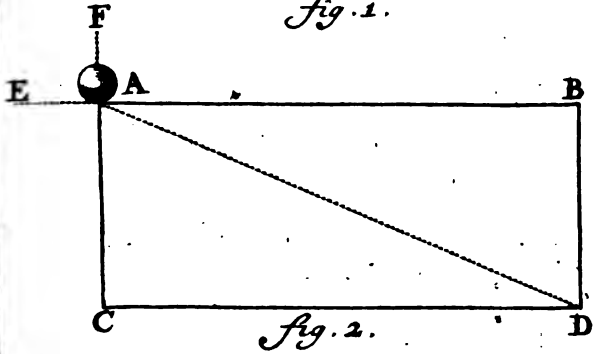


fig. 2.

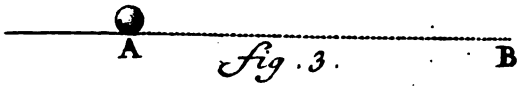


fig. 3.

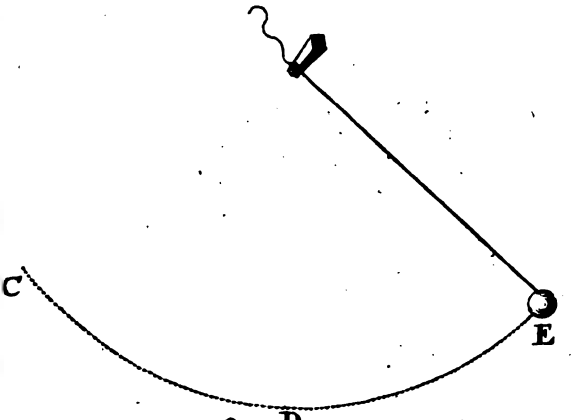


fig. 4.

planche 26.

CHAPITRE XI.

Des Spheriques.

1. TOutes ſortes de Figures curvilignes ſe peuvent décrire ſur un Plan par des lignes courbes qui les termineront, comme je l'ai déja dit ailleurs, & ſur une Superficie courbe telle qu'elle ſe trouve dans la Sphere ou Spheroïde. Il n'y a rien de particulier à dire pour les Figures bornées de lignes courbes ſur un Plan, parce qu'elles prennent les mêmes noms que les rectilignes : ſçavoir, de Triangle, de Quadrilatere, &c. mais nous remarquerons touchant les lignes & figures qui ſe peuvent tracer ſur une Sphere, ce qui ſuit.

2. Les Poles de la Sphere ſont les points extrêmes de ſon Axe, comme A B, de la fig. 1.

3. Les Poles d'un cercle dans la Sphere ſont des points, deſquels toutes les lignes qui ſont menées juſqu'à la conference de ce cercle ſont égales: comme AB, à l'égard du cercle C D E. fig. 2.

4. Les grands cercles d'une Sphere, ſont ceux qui la partagent en deux également, comme ABC, DBE, dans la fig. 3.

5. Les petits cercles ſont ceux qui partagent la Sphere inégalement, comme le cercle A B C. fig. 4.

6. Le plan d'un cercle eſt la ſuperficie plane que l'on conçoit être formée par la diviſion du globe aux endroits où répond le cercle, comme A & B qui repreſentent la Sphere coupée en deux. fig. 5.

7. Cercles égaux, ſont ceux dont les perpendiculaires tirées du centre de la Sphere ſur les plans de cercles ſont égales ; comme AB, AC, dans les plans de cercle D B F, G C I. fig. 6.

8. Cercles paralleles, ſont ceux qui ſont également diſtans entr'eux, comme ceux de la fig. 7.

9. Les Angles ſpheriques ſont meſurés par l'Arc qui leur ſert de ſoutendantes ; ainſi l'on dit un Angle ſpherique de 90. degrez, de 30. de 40. &c. Nous expliquerons le reſte où nous parlerons de la Sphere des cieux cy-aprés.

page. 55.

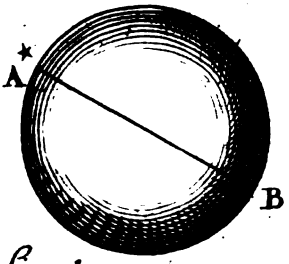


fig. 1.

fig. 2.

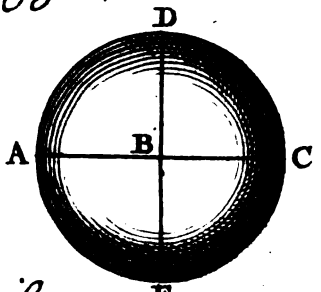


fig. 3.

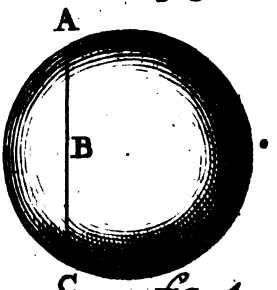


fig. 4.

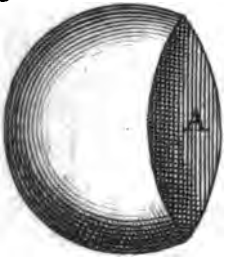


fig. 5.

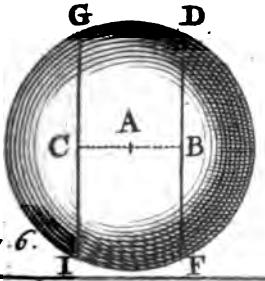


fig. 6.

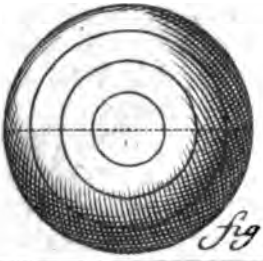


fig. 7.

planche. 27.

CHAPITRE XII.

Des Mathematiques ſenſibles.

1. LEs Mathematiques ſenſibles, ſont celles qui ont raport à quelque ſens. Par exemple à la vûë; parce que la vûë ſe fait par des rayons envoyés des objets juſqu'à l'œil. Les Mathematiques conſiderent les differentes proprietés de ces rayons. Nous conterons donc parmi les Mathematiques ſenſibles: L'Optique, la Catoptrique, la Dioptrique, & la Perſpective, dont nous parlerons ici dans nôtre premiere Partie, nous reſervant de parler cy-aprés de la Muſique qui a rapport à l'oüie, aprez que nous aurons parlé de l'Arithmetique.

2. L'Optique conſidere le Rayon direct, comme est le Rayon A B, juſqu'à l'œil C. fig. 1.

3. La Catoptrique conſidere le Raïon refléchi, comme B C venant à l'œil D du miroir E F G. Figure 2.

4. La Dioptrique conſidere le Raïon briſé, comme B C, paſſant par la lunette D, du point A, pour venir à l'œil E. Figure 3.

5. La Perſpective conſidere les Raïons de l'objet tels qu'ils ſont dans un Plan perpendiculaire à l'horiſon entre l'œil & l'objet, comme les raïons A B C, provenans de l'objet D, juſqu'au plan E F, qui eſt ſitué entre l'objet D, & l'œil G. fig. 4.

6. L'œil eſt l'organe de la viſion, ſitué dans la partie ſuperieure de l'homme, pour mieux appercevoir les objets. Voïez la fig. 5.

7. Les parties de l'œil qui ſervent à concevoir ces quatre ſciences, ſont, les nerfs optiques, les tuniques, & les humeurs. Nous repreſenterons ces differentes parties par des lettres alphabetiques, ſans donner d'autres définitions.

8. La ſixiéme Figure repreſente l'œil arraché de la tête avec toutes ſes parties. A eſt le Soleil, l'Iris ou le brun de l'œil. B la prunelle au milieu de l'Iris. C, le blanc de l'œil. D, le nerf optique.

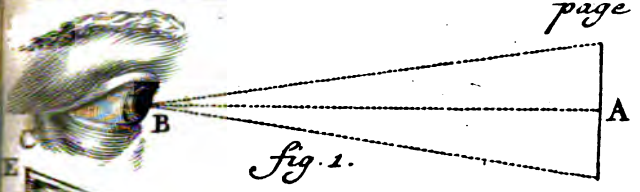


fig. 1.

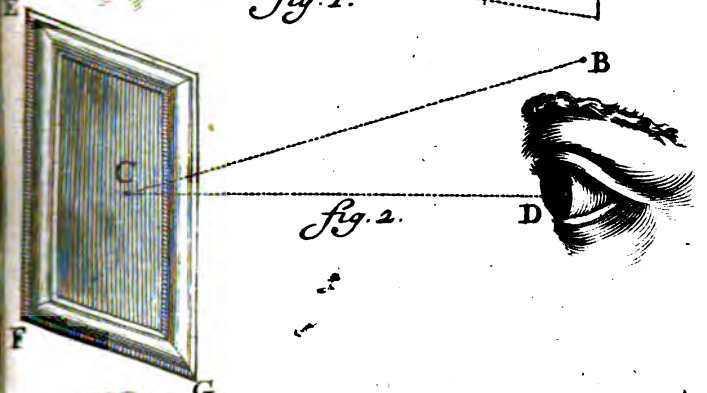


fig. 2.

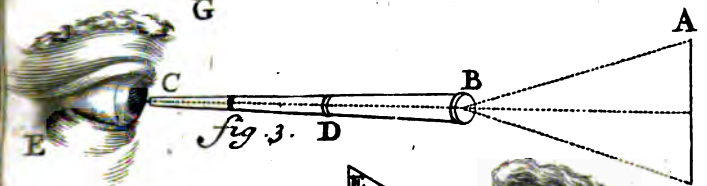


fig. 3.

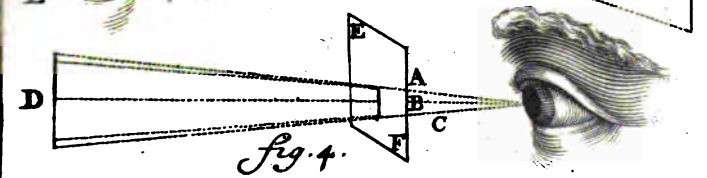


fig. 4.

fig. 5.

fig. 6.

9. Les Tuniques ſont, 1. la cornée au deſſous de laquelle eſt une pellicule blanche : la 2. eſt l'uvée avec la choroide : la 3. eſt la retine : la 4. eſt l'arachnoide : la 5. eſt la vitrée. Toutes ces Tuniques, & les trois humeurs qui ſont, l'aqueuſe, la criſtalline & la vitrée, ſe diſtinguent lorſque l'on coupe l'œil par le milieu le long du nerf optique, comme le preſente la premiere figure : la 2. diſtingue toutes les parties de l'œil : comme s'enſuit.

A A A, la Tunique blanche qui envelope l'œil juſqu'à l'iris, & qui forme le blanc de l'œil, apelée conjonctive : cette Tunique proprement n'eſt pas de l'œil, mais ſa robbe.

La Tunique qui la ſuit immediatement, & qui couvre tout l'œil s'appelle la cornée. Elle eſt beaucoup tranſparente ſur le devant de la prunelle, B B ; elle l'eſt moins ſur le derriere C C.

D D, la Tunique uvée, laquelle à cauſe de ſa noirceur ſemble être une graine de raiſin d'où elle a pris le nom d'uvée : cette Tunique eſt trouée aux extremitez D D, & c'eſt ce trou que l'on apelle la prunelle qui s'élargit dans l'obſcurité, & ſe retreſſit dans la grande lumiere.

E E, la Tunique retine, qui eſt formée comme un lacis, fait les differentes fibres du nerf optique F F. Les productions ciliaires qui ſuſpendent le criſtallin enveloppé de l'arachnoide H H : Tout l'eſpace I I marqué de petits points, eſt l'humeur aqueuſe.

G, l'humeur criſtalline : L L, eſt l'humeur vitrée dans tout cét eſpace que renferme la retine. M M, eſt le nerf optique qui prend ſon origine dans le cerveau.

10. Le principal objet de la vûë eſt la lumiere ; tout le reſte n'eſt vû que par le moyen de la lumiere qui envoye ſes rayons juſqu'à l'œil, ou directement, comme l'optique, ou par reflexion, comme dans la catoptrique, ou par refraction, comme dans la dioptrique.

fig. 1.

fig. 2.

planche 29.

11. Les Rayons optiques, ſont les lignes droites qui viennent des objets juſqu'à l'œil. Voyez la fig. 1.

12. Les Rayons optiques convergẽs, ſont ceux qui s'aprochent les uns des autres, venant de l'objet à l'œil. Ils ſe croiſent dans l'humeur criſtalline. figure 2.

13. Les Rayons optiques divergens, ſont ceux qui s'écartent en venant de l'objet à l'œil. Ils ſe réüniſſent par le moyen du chriſtallin ſur la tunique retine. Voïez la 3. figure.

14. La figure que forment les Rayons convergens, s'apelle cone, ou piramide optique. Voïez la 1. fig. ABC eſt le cone.

15. La figure formée par les Rayons divergens, s'apelle pinceau, parce qu'elle eſt formée de deux cones, dont la baſe eſt dans la criſtalline, & les ſommets, l'un à l'objet, l'autre dans la retine, fig. 3. CBA, cone de l'objet DBA, le cone de la retine. AB la baſe commune dans le criſtallin.

16. L'Angle optique eſt l'Angle ſolide dont le ſommet eſt dans le criſtallin. Le cercle de ce cone eſt apellé la baſe du cone optique.

17. Une ligne droite ſe dit être perpendiculairement oppoſée à la vûë qui convient avec quelque rayon optique; mais elle eſt apellée oblique lorſqu'elle coupe le rayon optique, ainſi les rayons ABC, ſont oppoſez perpendiculairement à la vûë; mais ceux de l'objet D, ſont obliques à la vûë. fig. 4.

18. L'Axe optique eſt l'axe du cone optique. fig. 1.

19. Le point rayonnant eſt celuy d'où partent les rayons optiques, comme A. fig. 4.

L'inclinaiſon d'un Rayon ſur une Superficie, eſt l'Angle aigu que fait le perpendiculaire avec le rayon qui tombe obliquement, comme DBE, dans les figures 5, 6, & 7.

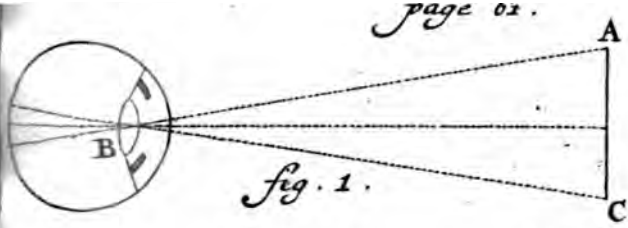


fig. 1.

fig. 2.

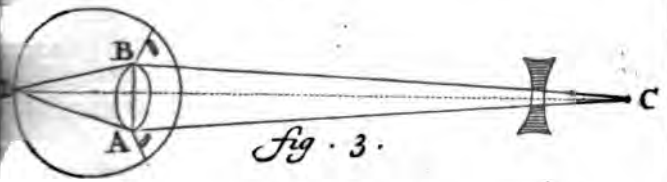


fig. 3.

fig. 4.

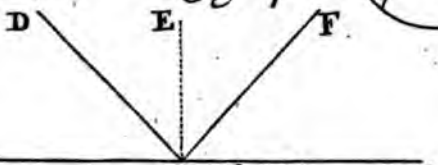


fig. 5.

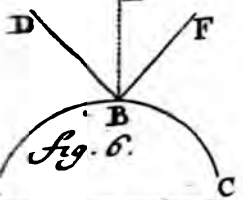


fig. 6.

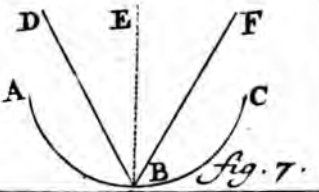


fig. 7.

20. Le point de reflexion, eſt le ſommet de l'Ang de reflexion, comme B. fig. 1.

21. Le Plan de reflexion eſt celui ſur lequel tom le rayon, comme A B C. fig. 1.

22. Le Rayon d'incidence eſt la premiere ligne q fait le Rayon avant ſa reflexion, comme D B. fig. 1.

23. Le Rayon de reflexion eſt la ligne décrite depu le point de reflexion juſqu'à l'œil : comme B F. fig. 1.

24. L'Angle d'incidence eſt celui que forme la ligu du Plan tirée du point de reflexion, & le Rayon d'inc dence : comme D B A. fig. 1.

25. L'Angle d'inclinaiſon, eſt celui que forme Rayon d'incidence, & la perpendiculaire au point reflexion: & l'Angle que forme la perpendiculaire av le Rayon de reflexion, s'apelle auſſi l'Angle d'inclina ſon, comme DBE, EBF, fig. 1.

26. L'Angle de reflexion, eſt l'Angle formé par l Rayon de reflexion, & la ligne du Plan tirée du poi de reflexion, comme F B C, fig. 1.

27. Lunette, eſt un verre ou criſtal en forme rond plus large qu'épais : comme la fig. 2.

28. La lunette eſt, ou convexe, ou concave, ou mixte. La lunette convexe à ſes deux Superficies con vexes : comme la fig. 3. La concave a deux Superficie concaves : comme la fig. 4. La mixte, ou mélangée l'une de ſes Superficies concave, & l'autre convexe comme la fig. 5.

29. Une lunette eſt de plus grand cercle, ou d Sphere, ſi ſa ſuperficie concave ou convexe eſt l'Ar d'un plus grand cercle, ou la portion d'une plus grand Sphere ; ainſi la lunette A eſt de plus grand cercle qu B, fig. 6. & 7.

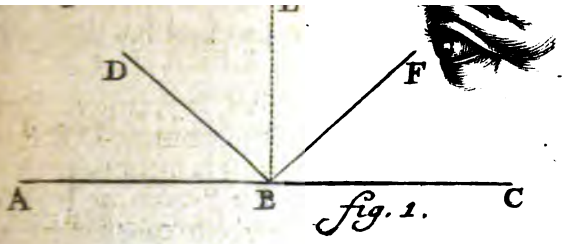


fig. 1.

fig. 2.

fig. 3.

fig. 4.

fig. 5.

fig. 6.

fig. 7.

planche

30. Une lunette eſt de plus grand Segment, qui contient un plus grand Arc de ſon Cercle, ou une plus grande portion de ſa Sphere. Ainſi A fig. 1. eſt de plus grand Segment que B, quoi qu'elle ſoit plus petite parce qu'elle contient un plus grand Segment de ſon Cercle, fig. 2.

31. Le Teleſcope ou Lunette d'approche, eſt un inſtrument qui fait voir les choſes éloignées comme ſi elles étoient proche, fig. 3.

32. Lunette à facettes, eſt un verre à pluſieurs faces ou plans, comme la figure 4.

33. L'Angle de refraction, eſt celui que fait le Raïon rompu avec celui d'incidence continüé directement, comme E C G. fig. 5.

34. Le vitre ou tableau dans la perſpective, eſt le plan qui coupe perpendiculairement le cone optique: comme ABCD. fig. 6.

35. Plan Geometrique, eſt une figure ſemblable à celle dont elle eſt le plan; comme ſi un Ingenieur tiroit exactement la figure d'une Ville, ce Plan s'appelleroit Geometrique.

36. L'Ichnographie, eſt la ſection d'un corps par un plan parallele à l'horiſon, (ce mot ſera expliqué cy-aprés.) Comme le Cylindre A, par le Plan BC, fig. 7. La Figure que forme la Superficie parallele à l'horiſon, s'appelle Plan Ichnographique. Ainſi le Cercle ABC, aprés la ſection du Cylindre figure 8, eſt le Plan Ichnographique.

37. L'Ortographie, eſt la ſection d'un corps par un Plan perpendiculaire à l'horiſon: & le Plan Ortographique, eſt celui qui eſt décri par la Superficie qui reſulte de la ſection, comme A B C D, aprés que le cylindre a été coupé, figure 9. & 10.

fig. 1.

fig. 2.

fig. 3.

fig. 4.

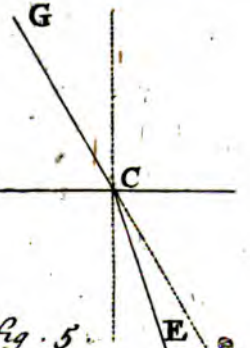


fig. 5.

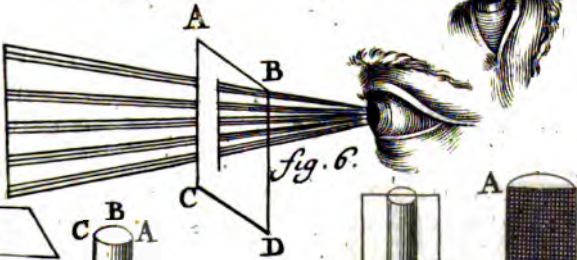


fig. 6.

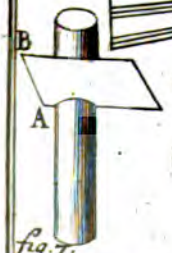


fig. 7.

fig. 8.

fig. 9.

fig. 10.

planche 32.

39. La Schénographie, Sciagraphie, ou Perspective, eſt la ſection du Cone par le vitre. Tel qu'eſt celui dont nous avons parlé ci-devant nombre 33.

40. L'horiſon eſt le plan que l'on conçoit parallele au lieu où l'on eſt, & qui paſſe par l'œil de celui qui regarde, comme A B, parallele au lieu C D, fig. 1.

41. Rayon principal, eſt la perpendiculaire tirée de l'œil ſur le vitre A B. fig. 2.

42. Point principal, eſt celui où le Rayon principal ſe termine ſur le vitre, comme A fig. 2. Ce point s'apelle l'œil de la perſpective, parce qu'il eſt directement opoſé à l'œil de celui qui regarde l'objet.

43. Le point ſuboculaire, eſt celui où tombe la perpendiculaire menée du point principal ſur le plan de l'Ichnographie, comme C. fig. 2.

44. La ligne de vûë, eſt celle par laquelle l'horiſon paſſant par l'œil, coupe le vitre, comme A B. fig. 2.

45. La ligne de terre, ou la baſe du vitre, eſt l'interſection du vitre, & du plan de l'Ichnographie, comme D E, ſi l'on conçoit le vitre couper l'Ichnographie. Fig. 2.

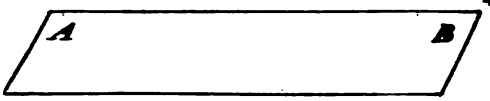
46. Le troiſiéme ou tiers point, eſt celui qui en la ligne de vûë eſt autant éloigné du principal point que l'œil eſt du vitre, comme A. fig. 3.

47. La diſtance d'un point de l'objet, eſt la perpendiculaire menée du même point ſur le vitre, comme F A, fig. 2. eſt la diſtance du point F, de l'objet G H.

48. La hauteur d'un point de l'objet, eſt la perpendiculaire abaiſſée d'icelui point, ſur le Plan Ichnographique, comme A B, fig. 4.

49. La latitude d'un point d'objet, eſt la perpendiculaire tirée de ce point ſur le plan du rayon principal perpendiculaire à l'horiſon, comme A B, fig. 5.

Page 67



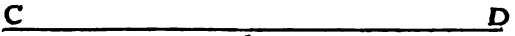


Fig. 1

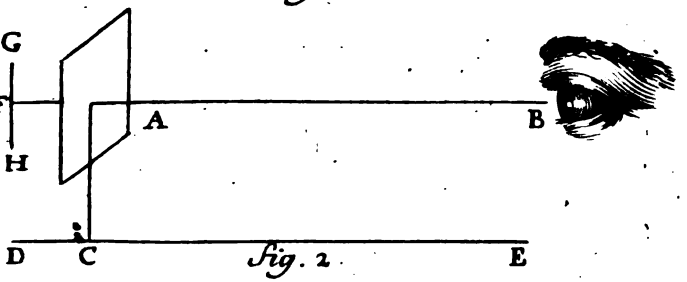


Fig. 2

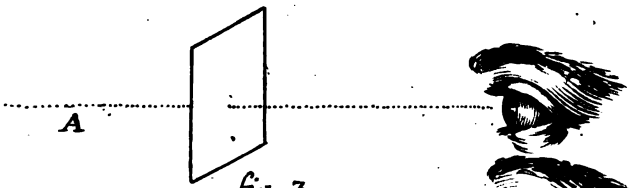


Fig. 3

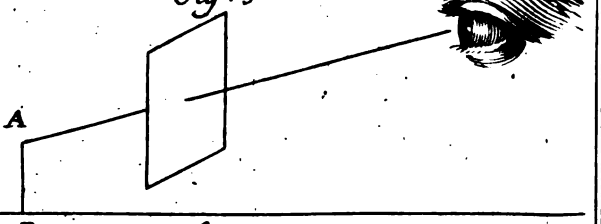


Fig. 4

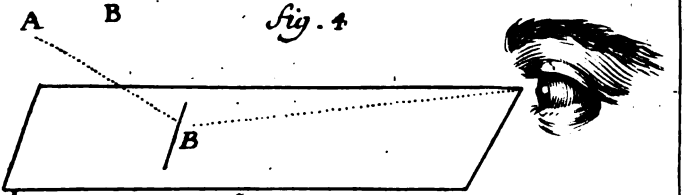


Fig. 5

Planche. 33

CHAPITRE XIII.

Des principaux termes de l'Architecture civile, & de ſes cinq ordres.

1. L'Architecture eſt la ſcience, & l'art de bien bâtir.

2. On appelle du nom de bâtimens, generalement toutes ſortes de conſtructions de lieux bas ou élevés pour la magnificence, & l'utilité : de ſorte que les Forts, & autres ouvrages qui ſervent à la défenſe, ſont du nombre des bâtimens ; & c'eſt pour cela que l'on diſtingue deux ſortes d'Architecture, la civile, & la militaire.

3. L'Architecture civile regle les bâtimens & édifices, tant pour la magnificence & utilité publique, que pour celle des particuliers : & la militaire conſtruit des Forts & autres ouvrages ſeulement, pour la ſeureté & la defenſe ; c'eſt à cette derniere que l'on a donné le nom de fortifications ; nous en traiterons au Chapitre ſuivant.

4. Il y a de deux ſortes de bâtimens dans l'Architecture civile, les publics & les particuliers. Les bâtimens publics, ſont les Temples, les Egliſes, les Univerſitez, les Colleges, les Hôpitaux, Sepultures, Ponts, Chauſſées, Ports, Aqueducs, Baſiliques, Marchez, Arcs-de-triomphe, Amphiteatres, Obeliſques, Portiques, &c. Les particuliers, ſont ceux qui ſervent à chaque perſonne particuliere ſuivant ſa condition, comme les Palais, les Hôtels, les Maiſons religieuſes ou de Communauté & celle des Bourgeois.

5. Les Temples & Egliſes, ſont des edifices où les peuples s'aſſemblent pour le culte & la religion.

6. Les Univerſitez & Colleges, ſont des bâtimens publics, deſtinez à l'inſtruction de la jeuneſſe, tant pour les Sciences, que les Arts-liberaux.

7. Les Hôpitaux, que l'on apelle encore du nom de Charité ou Hôtel-Dieu, ſont des maiſons de retraite pour les pauvres & les malades.

8. Les Sepultures, ſont des lieux qui ſervent à inhumer les corps. Il y en a auſſi de particuliers, que l'on enrichit d'architecture, de ſculpture, de deviſes & inſcriptions pour la memoire de quelque Grand-perſonnage qui y eſt inhumé, & pour lors on les appele du nom de Mauſolée.

9. Les Ponts ſont des chemins de communication bâtis de pierre ou de bois ſur les rivieres ou autres lieux difficiles à paſſer, avec pluſieurs arcs, pour l'écoulement des eaux.

10. Les Chauſſées & Levées, ſont des conſtructions de terre ou de murs, pour faciliter les chemins dans les marais, ou pour ſervir de digues à quelques rivieres étang ou courant d'eaux.

11. Les Ports ſont des endroits au bord de la mer ou des rivieres, deſtinés à la ſûreté des Vaiſſeaux, ou autres bâtimens qui y abordent.

12. Les Aqueducs ſont des canaux ſoûterrains, ou élevés pour conduire de l'eau d'un lieu à un autre.

13. Les Baſiliques ou maiſons de Ville, ſont des edifices où le peuple s'aſſemble pour reſoudre ou deliberer ſur les affaires publiques. Et l'on appelle du nom de Palais, celles où les Juges s'aſſemblent pour rendre juſtice. Le nõ de Baſilique eſt encore dõné aux Egliſes.

14. Les Marchez, ſont des places publiques pour la debite des danrées ; on les apelle Halles, lorſqu'ils ſont à couvert & environnés d'arcs ou de boutiques, pour faciliter le commerce.

15. Les Arcs-de-triomphe ſont des portes détachées de tous autres bâtimens, ordinairement placées à l'entrée des Villes, & enrichies d'architecture, d'inſcriptions & de ſculpture, pour ſervir de triomphe & de monument perpetuel, au retour d'une expedition victorieuſe, ou d'une action memorable.

16. Les Amphiteatres étoient chez les anciens de grands bâtimens, comme une ſeule Sale environnée de toute part au dedans de pluſieurs ſieges par divers étages, en forme de degrez, & le fond ou arene deſtiné aux combats des Gladiateurs, ou bêtes feroces. Tel eſt le Coliſée de Rome.

17. Les Obeliſques ſont des eſpeces de pyramide ornées & enrichies d'architecture, de ſculpture, & d'inſcriptions, que l'on éleve au milieu des Places publiques, pour les embellir ou pour ſervir de monumẽt.

18. Les Portiques ſont des eſpeces de galeries publiques avec des arcades pour ſe promener à couvert.

19. Les Palais ſont les maiſons des Princes.

20. Les Hôtels ſont des maiſons de diſtinction, pour des perſonnes de haute qualité.

21. Les maiſõs de Cõmunauté, & de Bourgeois, ſont des edifices qui prẽnẽt leur nõ de ceux qui les habitẽt.

22. Les maiſons ruſtiques ſe font à la campagne ou pour le plaiſir ou pour la neceſſité. Elles prennent differens noms, comme de châteaux lorſqu'elles ſont comme des petites fortereſſes environnées de foſſez avec Ponts-levis & autres defenſes; ou de maiſons de plaiſance, lorſqu'elles ſont ſans defenſes, & que les foſſez n'y ſervent que d'ornement.

23. L'architecture civile a deux principales parties, qui ſont la diſtribution des parties qui doivent compoſer l'edifice; & la decoration qui deſſigne tous les ornemens qui doivent l'embellir. Nous parlerons ici ſeparément de l'un & de l'autre.

DE LA DISTRIBUTION.

PREMIERE PARTIE.

De l'Architecture civile.

1. Trois choſes principales compoſent un edifice ou bâtiment; les cours, les jardins & les logemens.

2. Les cours ſont de grands eſpaces ordinairement quarrés & pavés, renfermés de murs ou des corps du logement, pour le degager & faciliter la communication aux divers apartemens.

3. Les cours prennent differens noms ſuivant leur ſituation, & leurs uſages. On appelle cour de devant celle qui ſe trouve ſur le devant d'une maiſon; cour de derriere celle qui repond à l'arriere face d'une maiſon. Les cours de cuiſine. celles qui la deſervent; cours de fumiers, celles qui deſervent les écuries. Et baſſe cours en campagne, celles qui ſervent aux volailles & autres animaux que l'on nourrit; & pour les outils de l'agriculture. Voyez la planche 34. cy-aprez.

4. Les Jardins ſont des eſpaces de terre cultivés pour la production de differentes ſortes de plantes, ou pour le plaiſir ou pour la nourriture. Ils prennent differens noms, ſuivant les choſes qu'ils contiennent. On apelle par exemple Jardin potager celui où ſont cultivés tous les herbages, legumes & autres choſes ſemblables; on appelle verger celui où l'on edifie des arbres fruitiers en plein vent; l'eſpalier ſe dit des arbres fruitiers & autres dont les branches étendües & paliſſées ſur un treillage, revétant les murs de clôture d'un Jardin. Et ſuivant l'eſpece des arbres qui y ſont édifié. On appelle les Vergers ou Eſpaliers, ceriſaye, prunelaye, &c.

5. Les Parterres ſont ſeulement deſtinés à la culture des fleurs ou autres plantes odoriferentes & agreables à la vûë. Il y en a de broderie, de pieces coupées, de gazons & de compoſés. Ceux de broderie ſont formés de pluſieurs feüillages ou autres figures diſtinguées par des bordures de buyts, nains ou autres plantes ſemblables. Les Parterres de pieces coupées ſont enrichis de compartimens de diverſes figures ſeparées par des ſentiers: ceux de gazon ſont ornés de divers compartimens verds avec enroulemēts & toute ſorte de figures. Les compoſés ſont faits de broderies de pieces coupées, & de gazons. Voyez cy-aprés la planche.

6. Les Allées & les Cours peuvent être compris ſous le genre de Jardins. Les Allées ſont de longs chemins droits & paralleles, bordés d'arbres, de part & d'autre; leurs contr'allées ſont d'autres petites allées à côté des grandes. Ordinairement elles forment les avenües des belles maiſons en campagne. Les cours ſont de ſemblables allées, fort longues aux avenües des Villes, qui doivent être de niveau & garnies de leurs contr'allées.

7. Les logemens ſont les lieux où l'on ſe retire & où l'on fait ſa demeure. Voyez la Planche 34. 35. 36. La differente ſituation leur donne auſſi differens noms: ainſi l'avant logis eſt le corps de devant qui répond ſur la rüe, le corps de logis de derriere, celui qui eſt ſur une cour ou ſur un Jardin; les aîles ſont les corps qui accompagnent à droite & à gauche le grand corps de logis qui eſt au milieu; les Pavillons ſont des corps

quarrés ſur le milieu du corps de logis, ou dans ſes angles. L'avant-corps eſt, la ſaillie des ornemens ſur le devant ; & le ſolide du mur qui y eſt joint, & ſur lequel eſt appuyé l'avant-corps, s'appelle l'arriere-corps. Voyez les planches ſuivantes.

8. Le Maſſif & les vuides forment tous les corps d'un logis. Le maſſif eſt ce qu'il y a de ſolide dans tout le bâtiment, comme les murs, &c. Et les vuides ſont les eſpaces libres renfermés & formés par le maſſif, comme les chambres, &c.

9. Les diverſes parties maſſives ſont les murs, les planchers, les voutes, & les combles ou couverts. Les vuides ſont les étages & les jours ; & dans les étages ſe trouvent les offices, les remiſes, les écuries, les ſales, les apartemens, les eſcaliers, les galeries, Terraſſes, aiſances & galetas.

10. Les murs ou murailles, ſont corps de maçonnerie, qui ſervent à former les vuides du bâtiment. Ils prennent differens noms par rapport à leur ſituation. Ainſi on appelle mur de clôture ceux qui ne ſervent qu'à clore une cour, un jardin, ou quelqu'autre eſpace ſemblable. Les murs mitoyens ſont les murs communs qui ſervent de ſeparation avec le bâtiment voiſin qui appartient à un autre proprietaire. Les murs de refend ſont ceux qui ſervent à ſeparer les vuides du dedans. Les murs de face ſont ceux qui forment au dehors le corps de logis ou les aîles, dans les ruës, cours ou jardins.

11. Le mur a deux parties differentes, le fondement qui eſt en terre, & le corps de mur qui en eſt dehors. On appelle empatement du mur l'épeſſeur qu'il a dans le fondement plus que dans le corps ; & la retraite en eſt la diminution au deſſus de l'empatement.

12. Les materiaux qui ſervent à conſtruire une murailles ſont les pierres de taille, les moiſlons, les briques & autres choſes ſemblables.

13. Les pierres de taille ſont celles qui ſont equarrées & appareillées : lorſqu'elles ſont de même hauteur & qu'elles forment divers rangs, de niveau, ou en rempant, ces rangs s'appellent aſſiſes.

Et generalement toutes les tailles prennent differents noms ſuivant leur uſage : on les appelle vouſſoirs quand elles ſervent à former les voutes, clavaux lors qu'elles forment une plattebande ; & les uns & les autres ſont des vouſſoirs ou clavaux à croſſettes, lors que leurs têtes retournent avec les aſſiſes de niveau ; & ce ſont des clefs lorſque dans le milieu ils ferment un arc ou une plattebande. Il y a une infinité d'autres noms qu'on leur donne, qui s'entendent preſque d'eux-mêmes, que je n'ay pas voulu definir icy, de peur de m'écarter du deſſein que je me ſuis propoſé de donner un traité en abregé. Ceux qui en ſouhaiteront davantage, pourront lire le Vignole de Monſieur Daviler imprimé depuis peu.

14. L'on diſtingue ordinairement ſix faces dans les pierres de taille. Et l'on donne un même nom aux oppoſées. La tête eſt le parement interieur ou exterieur de la pierre qui ſe voit de part & d'autre du mur. Le Doüelle eſt la face d'en-haut ou d'en-bas ; & le lit eſt l'un ou l'autre des côtés qui touchent aux autres pierres avec leſquelles elles ſont liées.

15. Les boſſages ſont des pierres de taille qui excedent le nû du mur & dont les joints de lits ſont marqués par des enfoncemens ou canaux quarrés. Et lorſque les encognures d'un bâtiment ou ailleurs en forme de longs rangs de ces ſortes de taille, on appelle ces rangs, Chaines de liaiſon. Voyez cy-aprés la Planche 34.

16. Les planchers ſont des conſtructions ſolides faites de pluſieurs pieces de bois pour ſervir de ſeparation aux étages. Ordinairement ils ſont faits de poutres, de ſolives, d'ais, & de pavé au deſſus.

17. Les poutres ſont les plus groſſes pieces de bois, qui ſoûtiennent tout le maſſif du plancher : & les ſolives ſont d'autres plus petites pieces quarrées & deſſiées de la longueur des travées ou eſpaces entre les poutres. Celles qui ſont de bois de brin & de toute la groſſeur de l'arbre equarri forment les planchers ſans avoir beſoin de poutres. On appelle entrevoux les eſpaces laiſſés entre les ſolives.

18. Les voutes ſont des murs en arc ſoûtenus en l'air par la ſeule diſpoſition des pierres qui les compoſent, dont voicy les principales choſes qu'il y a à remarquer.

19. Le Berceau qui eſt une voute en plein ceintre ou demy circonference ſur un plan quarré.

20. Les arcs Doubleaux, qui ſont les premiers arcs qui forment une voute. Il y en a en plein ceintre; il y en a de bombés, c'eſt-à-dire dont l'arc eſt plus petit que la demi-circonference; il y en a de ſurbaiſſés ou en anſe de panier, dont l'arc eſt une portion d'ovale, & entiers point ou gotiques, lorſque deux arcs ſe vont terminer en pointe au ſommet de l'arc doubleau.

21. Les lunettes qui ſont des voutes qui traverſent les reins d'un berceau, ou pour donner du jour, ou pour en foulager la portée, & en empêcher la pouſſée, & il y en a d'autant de ſortes que d'arcs doubleaux, ſuivant l'arc qu'elles décrivent. D'où elles prennent le nom de plein-ceintre, de bombées, de ſurbaiſſées ou entiers point, ou en arc parabolique.

22. Les Ogives qui ſe croiſent diagonalement à la clef de la voute.

23. Les areſtes qui ſont les angles où ſe terminent les lunettes, & ſe croiſent avec un berceau.

24. Les Formerets qui ſont les arcs de la lunette, ou de l'Ogive qui ſe vont terminer en pointe à la clef de la voute.

25. Les Liernes qui ſont les arcs qui forment une croix dans la voute, & qui vont ſe joindre par un bout aux Tiercerons.

26. Les Tiercerons qui ſont les arcs qui naiſſent des angles, & qui ſe vont joindre aux Liernes.

27. Les Nervures qui ſont des moulures dans les arcs qui forment la voute, & qui en ſeparent les pendentifs.

28. Les Pendentifs qui ſont les eſpaces entre les arcs de la voute, comme entre les formerets, ogives,

lernes, tiercerons, &c. & dont le parement interieur eſt appellé Douële.

29. Les differentes ſortes de voutes prennent leurs noms des parties qui les compoſent, & que nous venons de décrire.

30. Les voutes en Berceau, ſont celles qui ſe font en plein ceintre, & ſi ſon plan eſt plus étroit par un bout que par un autre, on l'appelle voute en canoniere.

31. Les voutes Spheriques ſont celles qui ſont formées ſur le plan d'un cercle, & qui font une portion d'une Sphere. Et ſi les aſſiſes ne ſont pas poſées de niveau depuis les couſſinets ou impoſtes juſqu'à la clef, qu'au contraire elles forment une eſpece de ſphere, elles s'eppellent voutes en limaçons.

32. Les voutes ſurbaiſſées ou en anſe de panier, ſont toutes celles dont le ceintre eſt plus petit que le demi cercle: & les voutes ſurmontées, celles dont le ceintre ſurpaſſe le demi cercle.

33. Les voutes à lunettes ſont celles dont le berceau eſt traverſé par des lunettes.

34. Les voutes d'ogives ſont celles qui ſont compoſées d'ogives, & dont le ceintre eſt fait de deux lignes courbes égales, qui ſe coupent diagonalement au ſommet.

35. Les voutes à areſtes, ſont celles dont les angles paroiſſent au dehors, étant faites de la rencontre de quatre lunettes égales.

36. Les voutes en arcs de Cloitre, ſont celles qui ſont faites de quatre portions de cercles, dont les angles font au dedans un effet contraire à la voute d'areſte.

37. Les voutes de biais, ſont celles dont les murs lateraux ne ſont pas déquerre avec les pieds droits de l'entrée.

38. Les voutes rampantes, ſont celles qui forment les rempes d'un eſcalier. Il y en a de diverſes ſortes ſuivant les divers eſcaliers, dont nous parlerons cy-aprés. Voyez la Planche ſuivante, qui repreſente

les principales choſes que nous avons definies.

A quartier ou lot prêt à être taillé. B pierre toute taillée où ſont marquez le douële, la tête & le lit. C clef de voute ou de plattebande. D vouſſoir. E claveau, & boſſage avec parement ruſtiqué avec ciſelures. F clef à croſſette pour une plattebande droite. G claveaux à croſſette. H clef poſée dans ſon arc I vouſſoirs à croſſette. L L pierre de refend ou boſſage. M impoſtes ou couſſinets des arcs. N voute en arc de cloitre. O O voute d'ogive gothique ou entiers point avec ſon arc doubleau en nervures, & ſes formerets. P P les piliers de l'arc. Q piliers quarrés.

39. Le Comble ou couvert du bâtiment eſt la charpente garnie de tuiles ou d'ardoiſes, pour couvrir le bâtiment: chaque côté eſt apellé pan; & les égouts du comble ſont les extremités du bas faites des dernieres tuilles avancées au delà de la corniche pour jetter les eaux loin du mur de face.

40. Les differentes figures qui forment les combles, leur font prendre differens noms. Les pointus ſont ceux dont les pans forment un angle aigu au ſommet: & les couverts plats, ſont ceux qui forment un angle obtus. L'on ſe ſert des premiers dans les païs Septentrionnaux à cauſe des neiges, & des autres dans les païs chauds où il n'en tombe pas beaucoup.

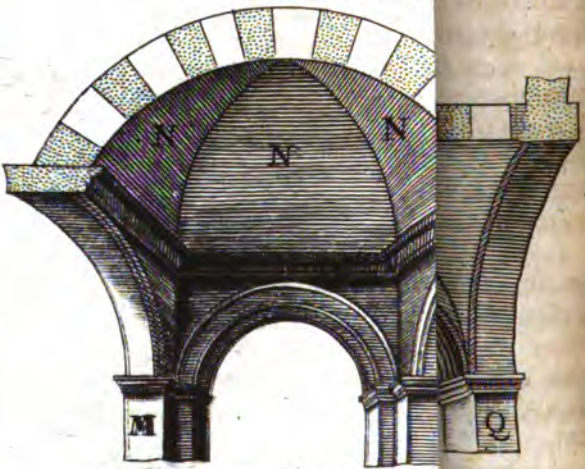
41. Les combles à pignon, ſont ceux qui ſont ſoûtenus des deux murs de pignon. Ce mot ſignifie la partie la plus haute d'une muraille, qui aboutit en pointe.

42. Les combles à croupe ſont ceux dont les pans forment un angle, ſaillant depuis le ſommet juſques à legout; cet angle ou encoignure eſt appellée areſte, & la piece de bois qui le ſupporte areſtier; & la croupe eſt le pan qui ſe trouve entre les deux areſtes.

43. Les combles à la Manſarde, ſont des combles dont les pans briſés forment ce qu'on appelle le faux comble & le vray comble: le faux comble, eſt la partie ſuperieure qui eſt plus couchée, & qui va ſe termirent au ſommet; le vray comble eſt celui qui aboutit

quartier

Claveaux a cr



Voute en arc de cloitre

ſur la corniche, & qui eſt plus roide. On a donné ce nom à ces ſortes de comble du nom de ſon autheur appellé Manſard.

44. Comble en Dome, eſt celui dont le contour eſt ceintré ſur un plan quarré ou d'autre figure angulaire. Et ſi ſa partie ſuperieure eſt concave, & l'inferieure convexe, on l'appelle comble à l'Imperiale.

45. Le comble rond, eſt celui qui eſt fait ſur un plan rond ou ovale, & qui va en pente droite.

46. Le comble à potence, eſt celui qui eſt fait d'un ſeul pan contre un mur, ſur lequel il forme ce qu'on appelle apentis, & s'il a à côté des arreſtiers, il s'apelle comble en patte d'Oye.

47. Le comble à Terraſſe, eſt celui dont la pointe eſt couppée quarrement à certaine hauteur, & couvert d'une terraſſe. Le Comble entrapeté ou entrapeſé, eſt celui qui ayant une large baſe eſt couppé pour en diminuer la hauteur, & couvert d'une terraſſe de plomb un peu élevée vers le milieu.

48. Les noües d'un comble, ſont les angles rentrans que forment deux pans en ſe joignant. Elles ont un effet contraire aux areſtes.

49. Les diverſes parties qui compoſent la charpente d'un comble, ſont la platte-forme, la ferme, l'enrayure, & les pans garnis de chevrons.

50. La Platte forme eſt un cours au pied du comble, de pluſieurs pieces de bois plattes à double rang, & aſſemblées par des entretoiſes, ſur leſquelles aboutiſſent les pans du comble, & ſi le mur eſt trop étroit pour ſouffrir un double rang de pieces, on appelle ſabliere les pieces plattes qui regnent tout au tour du mur.

51. Entretoiſes, ſont des pieces de bois qui en lient d'autres.

52. Les Blochets, ſont des petites pieces de bois entaillées ſur la Platte forme, dont l'uſage eſt de porter les chevrons, & les petites entailles faites dans la piece la plus avancées de la Platte forme, pour recevoir les chevrons juſques au mur, ſont nommez les pas des chevrons.

53. Les Tirans, ſont de longues poutres qui traverſent d'un mur à l'autre, ſur leſquels ſont conſtruites les fermes, de peur qu'elles ne s'écartent. On arrête les tirans à l'extremité par des ancres qui ſont des barres de fer qui les retiennent.

54. Les fermes ſont les aſſemblages de charpente; qui portent tout le comble d'un bâtiment. Elles ſont ordinairement appuyées ſur les tirans, & en cas on les appelle maîtreſſes fermes, pour les diſtinguer des fermes de rempliſſage, qui portent ſur des vuides ou ſur des morceaux de bois. Les demi-fermes ſont celles qui forment les croupes.

55. Les parties d'une ferme ſont les ſuivantes. La jambe de force qui eſt une groſſe piece qui ſe leve obliquement depuis le tiran juſqu'à l'entrait. Et lors qu'une force eſt dans le faux comble d'une manſarde, on l'appelle petite force.

56. Les entraits ſont des groſſes pieces de bois qui traverſent le comble au deſſus du Tiran, & dans leſquels ſont aſſemblez les forces d'une ferme.

57. Les taſſeaux ſont de petits morceaux de bois, arrêtez par tenon & mortoiſe ſur les forces d'une ferme pour en ſupporter les pannes, qui ſont d'autres pieces de bois traverſantes d'une ferme à l'autre, pour en ſupporter les chevrons, dont celle qui ſe trouve au droit du briſis dans une Manſarde, eſt nommée la panne de briſis.

58. Les mortoiſes ſont des entailles longues & quarrées dans une piece de bois pour recevoir les tenons qui ſont dans d'autres morceaux de bois des bouts diminués quarrément à proportion de leurs mortoiſes pour lier deux pieces enſemble.

59. Les Chantignoles ſont des petits corbeaux de bois entaillés dans les forces ſous les taſſeaux, pour porter les pannes.

60. Les Jambetes ſont des petites pieces de bois poſées perpendiculairement pour ſoulager les forces, & autres bois ſitués obliquement.

61. Les Eſſetiers ſont des pieces qui s'aſſemblent

dans la jambe de force & ſupportent l'entrait d'une ferme.

62. Les poinçons ou aiguilles, ſont des pieces de bois qui du milieu de l'entrait ou de l'enrayure s'élevent perpendiculairement juſques au ſommet du comble.

63. Les contrefiches ſont les pieces aſſemblées avec le poinçon & les forces.

64. Les arbaleſtriers ſe prennent ordinairement pour toutes les groſſes pieces qui ſervent à contreventer un couvert ou bien pour les petites forces de faux comble.

65. L'enrayeure eſt un aſſemblage de charpente poſée de niveau, & compoſée de pluſieurs pieces de bois qui forment pluſieurs rais, & qui ſert à retenir les fermes du comble. Ses parties ſont les ſuivantes; les entraits dont nous avons parlé, les ſablieres, les coyers qui ſont les pieces de bois poſées diagonalement ſous les arreſtiers, & qui ſe reüniſſent au poinçon. Les embranchemens qui ſont aſſemblés de niveau avec le coyer, & les empanons dans la croupe; les gouſſets qui ſont poſés obliquement dans l'enrayeure pour aſſembler les coyers avec les tirans.

66. Les pieces qui ferment chaque pan du comble, ſont le faiſte, les pannes ou filieres, les chevrons, & les empanons.

67. Le faiſte eſt le ſommet de la charpente du comble où ſe vont terminer les chevrons, qui ſont de longues pieces de bois de deſſiage, poſées depuis le faiſte juſques ſur la muraille où aboutit le pied du comble, dont ceux qui ſe terminent ſur larreſtier d'une croupe, ſont appellés empanons, & les pannes ou filieres, comme nous avons deja dit, les ſoûtiennent ſur les fermes.

68. Le ſoûfaiſte eſt une autre piece au deſſous du faiſte qui eſt liée par des entretoiſes, des liernes & des croix de ſaint André. Les Liernes ſont des pieces qui ſervent à entretenir deux poinçons ſous le faiſte, & les croix de ſant André, ſont des aſſemblages qui ſe croiſent diagonalement ſous le faiſte avec le ſoufaiſte.

69. Les coiaux ou chanlates, ſont de petits morceaux de bois, qui portent ſur le bas des chevrons, & ſur ſaillie de lentablement pour former l'avãce de l'égou

70. Les lates ſont de longues regles de bois de chêne fort déliées qui s'attachent ſur les chevrons pour e porter la tuile ou l'ardoiſe.

71. Les parties que l'on diſtingue dans le comble aſſemblé & garni de tuiles, ſont

72. Le Cheſneau qui eſt un canal de plomb ou de fe blanc ſur la corniche du bâtiment pour recevoir le eaux du comble, & les conduire par ſa pente dans u tuyau de décente auſſi fait de plomb ou de fer blan ou de bois, on nomme ce tuyau gouttiere.

73. Le Bourſeau eſt une moulure ronde ſur la pann du briſis d'un comble d'ardoiſes ou de tuiles vernifſée qui eſt recouverte de plomb blanchi ou de fer blanc.

74. Le Membron eſt une baguette qui ſert d'orlet à l bavette du bourſau & aux ennuſures du comble.

75. La bavette eſt une bande de plomb blanchi a deſſous du bourſau ou bien de fer blanc.

76. Les ennuſures ſont des morceaux de plomb en forme de trapeze au deſſous de la bavette du bourſau, dans les encoignures du comble.

77. L'enfaitement eſt une table de plomb ou de fer blanc ou autre choſe ſemblable qui couvre le faiſte du comble.

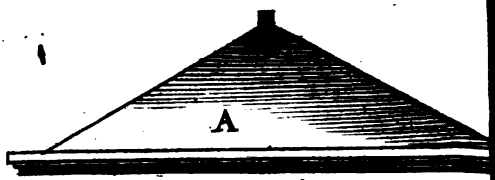
La Planche ſuivante repreſente les diverſes ſortes de comble que nous avons défini, & les parties que l'on diſtingue lors qu'ils ſont garnis de tuiles.

A comble ou couvert plat. B comble ou couvert pointu dont on ſe ſert dans les païs Septentrionnaux; quelques-uns les apellent dans nos contrées couverts à la Françoiſe, parce que depuis Lyon, au deſſus, les couverts ſont preſque tous pointus. C couvert à la Manſarde D briſis de la Manſarde E faux comble F vrai comble G le bourſau H le Membron I la bavette L l'ennuſure M l'enfaîtement N N ſont des Luxernes dont nous parlerons ci-aprés. O comble à l'Imperiale P comble en dome, à contour ſpherique Q dome à contour ſpheroïde avec la lanterne R & ſon chapiteau S & la boule T.

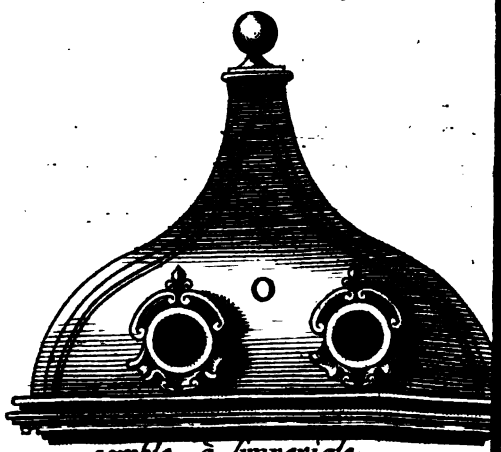
L

UNIV. OF MICH.

page. 80. et 81



couvert plat



comble à limperiale

planche 35.

a Planche ſuivante repreſente toutes les diverſes
es qui compoſent la charpente des combles.
ns la premiere figure AAAA, les Platteformes BB
chets avec leurs mortoiſes à recevoir les chevrons,
eurs jambetes C,C, entretoiſes qui lient les Platte-
mes E E pas à recevoir les chevrons. F gouſſet de
rayeure G coyer H tiran I entrait.

Dans la ſeconde Figure L L plateformes M tiran
N forces. O entrait P P pannes Q Q pannes du
R R chantignoles & leurs taſſeaux au deſ-
des pannes. S, S, contrefiches, entre leſquels
poinçon, T T jambettes V V eſſeliers X petite
e dans la fermette, Y Y chevrons Z Z coyaux.

a troiſiéme Figure qui repreſente un comble poin-
(ou une fléche, ſi l'angle au ſommet étoit plus
u avec un plus grand nôbre de fermes & d'enrayeu-
,) à preſque toutes les mêmes parties que la ferme
a manſarde. A A ſont les platteformes. B le tiran
C les forces de la ferme avec les eſſeliers D D, & la
mbette E. F eſt le grand entrait & G le petit H H les
inçons avec leurs contrefiches I I les chevrons, L L
coyaux, M M ſont les pannes ou filures poſées ſur
ſſeaux & chantignoles.

La quatriéme Figure eſt l'aſſemblage d'un dome à
mperiale, ayant les mêmes parties que les fermes
recedentes, excepté qu'entre les courbes N N qui
rvent de chevrons & les forces O O, ou les arbale-
ers P l'on met des entretoiſes. Et les liernes ſont po-
ées entre les courbes, comme les pannes dans les cou-
erts quarrés. Voyez la figure 11. Q Q.

La cinquiéme Figure eſt pour un dome à contour
heroïde, dont les poinçons R R ſont contreventés
ar les arbaleſtriers S S, & des entretoiſes entre-deux
les courbes. T, T, T, T, ſont les endroits où les lier-
es doivent être poſées entre les courbes.

La ſixiéme Figure eſt la lanterne que l'on poſe or-
inairement ſur les domes, dont V V eſt la chaiſe, &
X la cage, & Z le chapeau de la lanterne.

La ſeptiéme Figure repreſente le courant du com-
ble à la manſarde, dont A A ſont les arreſtiers. B B les

pannes dans le vray & faux comble C C, le courant de pannes du briſis D D, les chevrons E E les empanons.

La huitiéme Figure eſt le plan d'une partie de l'enrayeure du grand entrait du grand entrait, F & G le gouſſet H le coyer. I I I. les embranchemens aſſemblés dans le coyer & les empanons repreſentés par les points qui ſont continués juſques ſur les ſablieres L L.

La neuviéme Figure eſt l'aſſemblage d'une enrayeure ronde. M M ſont les liernes ou ſablieres. N N les places des courbes entre les liernes, & dans les plattes formes O O entraits P P gouſſet Q Q coyers.

La dixiéme & l'onziéme Figure repreſenteñt, l'une pour le quarré, & l'autre pour le rond, la maniere de poſer les empanons & les chevrons ſur les pannes ou les courbes entre les liernes.

78. Les Etages ſont les diverſes pieces d'un bâtiment qui ſe trouvent de plain-pied, c'eſt-à-dire de niveau, en ſorte qu'il ne faille point du tout monter pour communiquer à ſes diverſes pieces d'un même étage.

79. Le plus bas des étages, que l'on appelle ſoûterrain, eſt deſtiné aux offices, il eſt ordinairement plus bas que celui du rez de chauſſée, qui eſt preſque de niveau à une ruë ou à une cour.

80. Le premier ou bel étage, eſt celuy qui ſe trouve immediatement au deſſus de l'étage du rez de chauſſée; Et les étages ſuivans prenent leur nom ſuivant la ſituation qu'ilſont avec le premier étage.

81. Les étages en galetas, ſont ceux qui ſont pratiqués dans les combles du bâtiment. Et l'on y voit toûjours quelques-unes des groſſes pieces de chaque ferme, quoy qu'ils ſoient lambriſſés ſous l'entrait de la ferme.

82. Dans l'étage ſoûterrain ſe trouvent les offices qui ſont ordinairement voutés, & ſous ce nom ſont compris generalement toutes les pieces du département de la bouche, comme cuiſines, gardemangers, depenſes, ſommelleries, buchers, lavoirs, office, les ſales du commun & les caves.

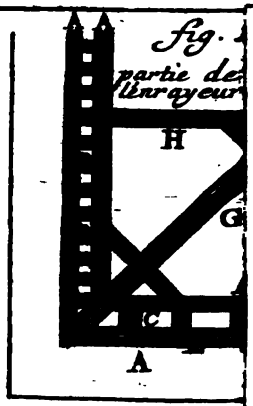


fig. 1 partie de l'enrayeur

plate formes

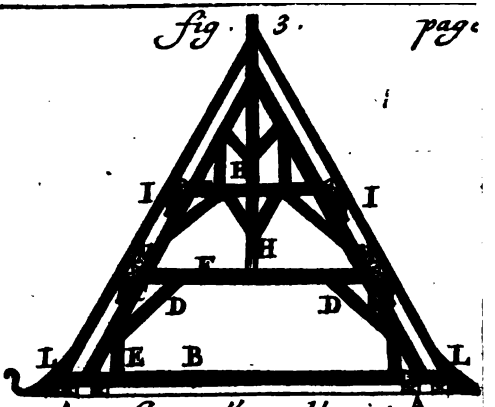


fig. 3. pag.

ferme d'un comble pointu

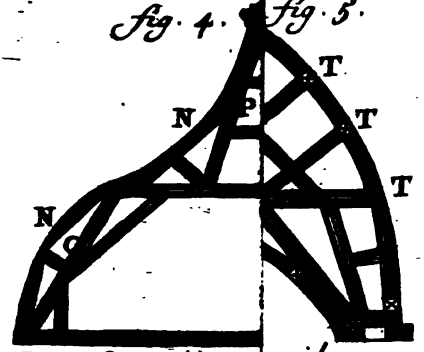


fig. 4. fig. 5.

ferme d'un comble droit

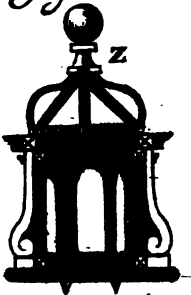


fig. 6.

la lanterne et son chapiteau

fig. 7

Courant du comble à la

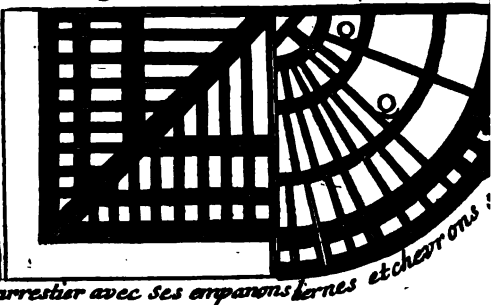


fig. 10. fig. 11.

arrestier avec ses empanons lernes et chevrons

planche 36.

83. Les cuiſines ſont des pieces du departement de la bouche, dans lequelles ſe preparent & s'appreſtent toutes les viandes. Il doit y avoir une cheminée, un four, & un ou pluſieurs potagers, de hauteur d'appui, avec leurs rechauts ſcellés pour deſervir la cuiſine.

84. Les gardemangers ſont deſtinez prés de la cuiſine, à ſerrer les viandes.

85. Les depenſes ſont d'autres pieces pour les proviſions de chaque jour & pour les reſtes des viandes.

86. Les Sommelleries ſont deſtinées pour la garde du vin de la table; Elles ont ordinairement communication avec les caves.

87. Les lavoirs ſont des lieux prés de la cuiſine, où l'on retire toute la vaiſſelle pour la laver.

88. Les buchers ſont des petits lieux obſcurs & ſeparés où ſe ſerre le bois deſtiné à la cuiſine.

89. L'office eſt un lieu particulier pour renfermer tout ce qui dépend du ſervice de la table & du deſſert.

90. Les ſales du commun ſont prés des cuiſines & des offices pour y faire manger les domeſtiques.

91. Les caves ſont pour ſerrer le vin & autres liqueurs pour la table.

92. Les aiſances ou lieux communs, ſont des voutes avec un long tuyau, répondant prés d'une garderobbe ou d'un eſcalier.

93. Dans l'étage du rez de chauſſée, ſe trouvent ordinairement les remiſes, écuries, apartemens, ſales, & eſcaliers.

94. Les remiſes ſont des enfoncemens ſous un corps de logis pour y ranger le carroſſe. On les appelle doubles, lorſqu'ils peuvent loger deux ou pluſieurs carroſſes.

95. Les angars peuvent ſouvent ſervir de remiſes, & ce ſont des appentis couverts d'un demy comble adoſſé contre un mur, & ſoûtenus de piliers pour ſervir de magazin, d'attellier ou de bucher.

96. L'on ménage quelquefois au haut des remiſes certains petits étages pour avoir des cabinets ou garderobes: on leur a donné le nom d'entreſoles ou Mezanines.

97. Les écuries ſont les lieux deſtinez aux chevaux, on les entre-couppe de poteaux & de perches pour les ſeparer les chevaux. La mangeoire & le ratelier occupent la longueur de l'écurie, elles ſont ordinairement voutées & pavées en pente pour faciliter l'égout des urines.

98. Les appartemens ſont des corps de pluſieurs pieces enſemble pour rendre l'habitation complette; Et les differentes pieces qui les compoſent ſont au moins une chambre, une antichambre, un cabinet, & une garderobbe.

99. Les chambres ſont les pieces deſtinées à l'habitation, & il y en a qu'on appelle de Parade, où ſont les meubles les plus precieux, & d'autres pour coucher, où l'on pratique aſſez ordinairement un alcove, qui eſt une eſpece de retraitte au fond de la chambre ſur une eſtrade ou marchepié pour y placer le lict.

100. Les antichambres ſont d'autres pieces qui precedent la chambre du maître, dans laquelle s'arrêtent les domeſtiques de ceux qui le viennent voir.

101. Les Cabinets ſont les pieces les plus ſecrettes de l'appartement pour y écrire, étudier, ou ſerrer ce que l'on a de plus precieux.

102. Les Garderobes ſont pour ſerrer les habits, & coucher les domeſtiques que l'on tient prés de ſoy: & les *Bouges* ſont des petits cabinets ordinairement au côté d'une cheminée pour ſerrer des uſteneiles. Ce ſont encore des petits lieux propres à mettre des petits lits ſeparés.

103. Les Sales ſont les plus grandes pieces, & les plus enrichies: Elles ſont ordinairement communes & deſtinées aux aſſemblées. Il y en a qu'on appelle ſales à manger, d'autres que l'on appelle ſales de bal, ſales de ceremonies & d'une infinité d'autres noms qu'on peut leurs donner.

104. Les eſcaliers ſont les montées qui ſervent à communiquer d'un étage à l'autre. Leurs parties ſont la cage, les marches ou degrez, les rampes, les appuits, les paillers, les noyants.

105. La cage eſt l'eſpace renfermé de murs au dedans duquel eſt l'eſcalier.

106. Les marches ou degrez ſont les parties de l'eſcalier ſur leſquelles on foule. Leur hauteur eſt ordinairement de cinq à ſix pouces, & leur giron ou largeur, eſt la ſuperficie ſur laquelle l'on foule. Elle eſt differente ſelon les differens eſcaliers, comme nous le dirons ailleurs. Le collet d'une marche eſt la partie la plus étroite du gyron qui tient au noyau.

107. La rampe eſt la ſuite des marches poſées pour former l'eſcalier. On apelle encore du nom de rampe tout ce qui ſe leve de bas en haut par une ligne oblique.

108. Les appuis ſont des pieces de bois, de fer ou de pierres qui ſuivent la rampe de l'eſcalier à la hauteur d'environ trois pieds pour le plus.

109. Les Repos ou paillers, ſont des eſpaces plains entre les rampes pour ſoulager la peine qu'il y a de monter.

110. Les Noyaux ſont les parties ſur leſquelles ſont ſoûtenües les marches par leurs collets, & les echiffres ſont les murs qui portent les marches.

111. Les eſcaliers prennent differens noms, ſuivant leur figure ou leur rampe ou les diverſes parties qui les compoſent.

112. L'on appelle un eſcalier à repos celui dont les marches terminent à des paillers.

113. L'Eſcalier à quatre noyaux eſt celui qui laiſſe un vuide quarré entre ſes rampes.

114. Eſcalier rond eſt celui qui eſt à vis avec un ſeul noyau.

115. Eſcalier en limace eſt celui qui eſt dans une cage ronde ou ovale, dont la rampe eſt ſans degrez & qui tourne en vis à l'entour du mur circulaire.

116. Eſcalier à jour eſt celui qui eſt ouvert d'un côté avec baluſtrades.

117. Perron eſt un eſcalier decouvert hors de la maiſon, & s'il eſt en ovale ou rond en ſorte que les marches ne ſoient point paralleles, & leur plan concave ſur le devant ou derriere de la maiſon, il s'appelle fer à cheval.

118. Dans le premier ou bel étage ſe trouvent encore plus ordinairement les galleries, balcons & terraſſes.

119. Les Galleries ſont comme de tres longues ſales, & peu larges dans un bâtiment pour ſe promener, & pour degager les appartemens. Et ſi ces Galleries ſont petites & deſtinées ſeulement à communiquer aux differentes pieces des appartemens, on les appelle corridors.

120. Les Balcons ſont des ſaillies hors du mur de face, ſupportées par des conſoles & fermées de baluſtrades.

121. Les Terraſſes ſont generalement toutes ſortes de terres élevées, & revêtuës d'une forte muraille; mais la terraſſe dans un bâtiment, telle que nous la décrivons au premier étage, eſt la couverture en plateforme qui ſe fait ſur quelque étage en place de cõble.

122. Les cheminées ſe trouvent indifferemment dans les differentes pieces des appartemens, & ce ſont de longs tuyaux par leſquels s'exhale la fumée du feu que l'on fait.

123. La ſouche de la cheminée, eſt ce qui paroit hors le comble.

124. Le Manteau eſt tout ce qui paroit d'une cheminée dans une chambre, cependant ce mot ſe dit plûtôt de la partie inferieure compoſée des jambages, de la gorge & de la corniche, que de la partie ſuperieure qui ne comprend que le tuyau couronné de ſa corniche, & orné d'un quadre.

125. Les jambages ſont les petits murs élevés pour en porter le manteau.

126. Le contrecœur eſt le fond entre les jambages & le foyer.

127. Latre eſt la partie de la cheminée entre les jambages, le contrecœur & le foyer.

128. Le foyer eſt la partie au devant des jambages, que l'on pave ordinairement de grands carraux quarrés de terre cuite.

129. cheminée en hotte, eſt celle dont le manteau eſt fort large par le bas & en figure pyramidale.

130. Cheminée afleurée, eſt celle dont le tuyau eſt pris dans l'épeſſeur du mur.

131. Cheminée en ſaillie, eſt celle dont le contre-cœur affleure le nû du mur, & dont le manteau eſt en dehors.

132. Les jours qui ſe trouvent dans toutes ces diverſes pieces ſont les arcs ou arcades, les portes, les fenêtres, vitraux ou croiſées, les abajours, les mezanines, les lucarnes & les yeux de bœuf.

133. Les arcs ſont des grand vuides ceintrés dans une muraille ; nous en avons déja parlé cy-devant. L'on s'en ſert pour les voutes & pour les remiſes, ou autres choſes ſemblables, qui demandent une ouverture conſiderable dans un mur.

134. Les portes ſont des ouvertures dans les murs pour communiquer aux diverſes pieces du bâtiment. Elles ont deux parties la baye & l'enceinte de cette baye.

135. La Baye eſt le vuide même qui eſt fait dans le mur & ſon enceinte, ſont les diverſes parties qui terminent cette baye; ſavoir les jambages ou pieds droits, la plattebande ou le ceintre & le ſeüil.

136. Les Jambages ou pié-droits, ſont les parties qui s'élevent de bas en haut, de part & d'autre de la baye.

137. La plattebande eſt la fermeture quarrée, bombée ou ceintrée au deſſus des jambages.

138. Le ſeüil eſt la partie inferieure de la porte qui borne la baye par le bas; & s'il fait ſaillie hors du mur, on l'appelle Pas de la porte.

139. Dans chacune de ſes parties, l'on diſtingue encore le Bandeau ou chanbranle, le tableau, la feüillure, l'embrazure & l'écoinçon.

140. Le Bandeau eſt la partie exterieure de l'enceinte de la Baye lorſqu'elle eſt ſans ornement ; & s'il y a des ornemens on l'appelle *chambranle*.

141. La feüillure eſt l'entaille faite dans l'embraſure pour recevoir les batans de la porte.

142. L'embraſure eſt l'élargiſſement de la baye au dedans depuis la feüillure juſqu'au parement interieur du mur.

143. L'écoinçon eſt l'encognure de l'embraſure, & qui eſt jointe avec le lancis. On appelle *lancis* les deux pierres plus longues que le piédroit, lorſqu'il eſt tout d'une piece. Celle de ces deux pierres qui eſt dans le parement exterieur, eſt appellé le lancis du tableau, & l'autre qui eſt au parement interieur, le lancis de l'écoinçon.

144. Nous diſtinguerons de quatre ſortes de portes; les portaux, les cocheres, les bourgeoiſes, & les petites portes.

145. Les portaux ſont de grandes ouvertures faites dans les faces ou frontiſpices d'une Egliſe ou d'autres maiſons conſiderables, lorſqu'elles ſont ornées d'architecture.

146. Les portes cocheres, ſont celles qui ont une ouverture ſuffiſante à faire paſſer libremẽt un caroſſe.

147. Les portes moyennes ou bourgeoiſes, ſont beaucoup moindres, & elles ont entre 4 & 6 pieds de large.

148. Les petites ſont toutes celles qui ſervent dans les murs de refend. Elles ont trois pieds pour le plus de largeur.

149. L'on appelle encore du nom de porte l'aſſemblage de menuiſerie ou autre choſe ſemblable, propre à fermer la baye ou ouverture.

150. Ces portes ont des ventaux ou batans, & quelquefois un dormant. Les *ventaux* ſont les parties mobiles qui ſervent à fermer ou ouvrir la baye. Et le *dormant* eſt dans le haut d'une porte quarrée ou ceintrée, un chaſſis de bois qui eſt attaché à la feüillure, & qui ſert de battemens aux ventaux. Le *linteau* eſt une piece de bois pour fermer le haut de la porte, & qui eſt oposé au ſeüil.

151. Il y a differentes ſortes de portes mobiles, qui prennent differens noms ſuivant l'ouvrage ou la decoration, dont nous parlerons cy-apres. Nous diſtinguerons ſeulement ici les portes à deux ventaux & les portes coupées; les portes briſées & les doubles. Les portes à deux *ventaux* ſont celles qui ont un battan à chaque piédroit ou jambage. Les portes *coupées* celles

qui ont deux ou quatre ventaux, attachez à un ou aux deux piédroits de la baye, comme aux boutiques. Les portes *briſées* ſont celles dont la moitié ſe double ſur l'autre. Les portes *doubles* celles qui ferment doublement une même baye ; ou pour la ſeureté ou pour conſerver la chaleur.

152. Les fenêtres ou croiſées ſont les ouvertures faites dans les murs de face pour recevoir le jour ; on les appelle croiſées, parce que leur baye autrefois étoit entre-coupée par pluſieurs croiſillons ou meneaux de pierre. La menuiſerie fait à preſent le même effet, & donne plus de jour.

153. Les parties qui compoſent les fenêtres, ſont toutes les mêmes que celles qui compoſent une porte. Excepté qu'au lieu du ſeüil & du pas, ſe trouve la tablette qui ſe met à hauteur d'appuy.

154. Les fenêtres prennent differens noms, ſuivant leur figure ou ſituation. Par exemple on apelle *vitraux* les grandes fenêtres des Egliſes ou des Baſiliques, avec croiſillons de pierre ou de fer. On apelle *fenêtres droites* celles qui ſont quarrées, longues en hauteur, & la fermeture en plattebande. Les *ceintrées* ſont celles dont la fermeture eſt en plein ceintre ou en anſe de panier. Les *bombées* ſont celles qui n'ont qu'une portion d'arc: Les *quarrées* celles qui ont la hauteur égale à la largeur: Les *rondes* celles dont la baye eſt enceinte d'un cercle ; & les *ovales* dont l'enceinte eſt une ovale. Les fenêtres *ébraſées* ſont celles dont les tableaux forment une *embraſure* par dehors pour faciliter la lumiere ; & les fenêtres en *embraſure* celles qui ſont plus étroites par dehors que par dedans.

155. Les abajours ſont des eſpeces de ſoûpiraux, dont l'embraſement de l'appui eſt en talud entre deux joüées rempantes par dedans, & au deſſus de la vûë. Ils ſervent à éclairer l'étage ſoûterrain.

156. Les mezanines ſont d'autres fenêtres moins hautes que larges pour éclairer des entreſoles ou autre choſes ſemblables.

157. Les lucarnes ſont des mediocres fenêtres poſées ſur le mur de face & dans le comble. Elles prennent

auſſi differens noms ſuivant leurs figures. Il y en a d quarrées, de rondes, de bombées, &c. L'on y diſtin gue les Joüées avec des noquets, les noulets, les che valets, la fourchette, le chapeau & les poteaux.

158. Les Joüées ſont les côtés de la lucarne. C mot ſe prend auſſi pour toute ſorte d'épeſſeur de mu qui forme une baye, & qui comprend le tableau, l feüillute & l'embraſure. Les pieces de plomb que l'o applique ſur les joüées des lucarnes ſont appellés *no quets*.

159. Les noulets ſont les petits chevrons qui for ment les chevalets & les noües, par leſquels une lu carne ſe joint au comble.

160. Les chevalets ſont les aſſemblages de deux noulets ſur le faiſte d'une lucarne.

161. La fourchette ſont les deux petites noües de la lucarne, qui ſe vont joindre au comble, au deſſus du faiſte de la lucarne.

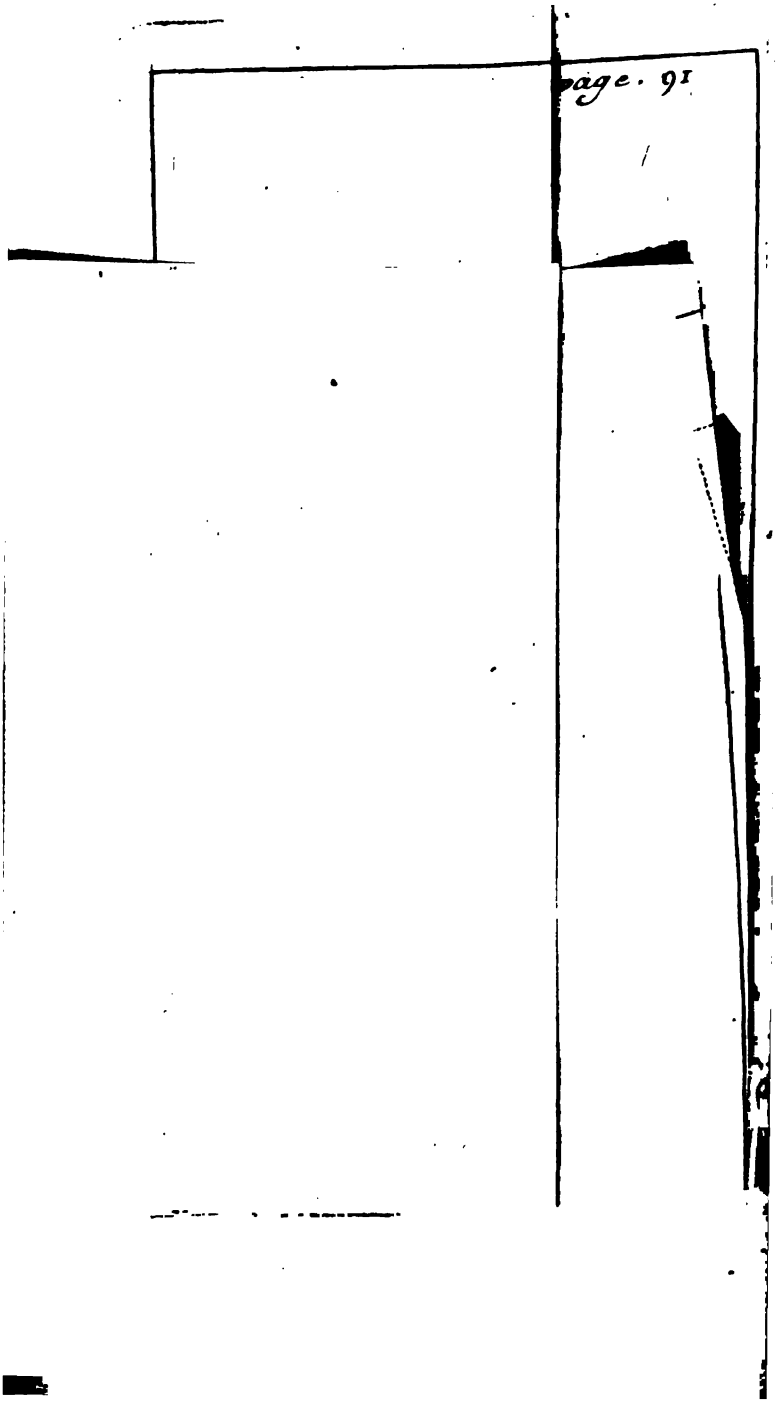
162. Le chapeau eſt la piece de bois qui fait la fermeture d'une lucarne, & qui eſt appuyée ſur deux poteaux qui ſont à côté de la lucarne.

163. Les yeux de bœuf, ſont des petits jours ordinairement ceintrés & pris au deſſus du faux comble, ou d'un dome pour éclairer un grenier ou pour donner air à la charpente.

Explication de 37. Planche.

A A cuiſine. B B gardemangers. C C depenſes. D D les fours dans chaque cuiſine. E E cheminée de la cuiſine faite en hotte. F F potagers. G lavoir. H H buchers. I I offices. L L Sales du commun. M M M M M caves. N N deſcentes. O eſcalier. P P P paſſages. Q foſſe d'aiſances. R puits. S S S S maſſifs des perrons. T T T T &c. abajours grillés V V V &c. pilliers des voutes. X X X &c. cheminées.

UNIV. OF MICH.



Explication de la 38. Planche.

A A A veſtibules. B grand eſcalier. C grande Salle. ambre de parade. E grand cabinet. F ſalle à man- G G chambres à coucher. H H autres chambres. ichambres. L anticabinet M M M M garderob- N N N N eſcaliers. O O petits eſcaliers. P P P P s. Q Q remiſes de caroſſes. R R écuries. S cham. Portier. T lieux communs, V puits & auge.

lanche 39. eſt expliquée par elle-même, il ne e lire ce qui eſt dans chaque membre ; voila les la diſtribution, tirés des deſſeins de Monſieur

DE LA DECORATION,

SECONDE PARTIE,

De l'Architecture.

1. LA decoration eſt la partie de l'Architecture, c
en fait la pricipale beauté, puiſque c'eſt elle q
deſigne tous les ornemens qui doivent embellir
edifice.

2. Le mot d'ornemens peut ſe prendre pour
terme general, qui ſignifie tout ce qui eſt capa
d'embellir les diverſes parties d'un edifice: cepend
pluſieurs de nos Autheurs reſtreignent ce mot à
ſignifier que certaines petites parties de l'Architectu
comme les moulures ou la Sculpture qui decore l'A
chitecture. Nous le prendrons ici dans une ſignific
tion generale.

3. Le terme de Membre eſt encore general, &
ſignifie toute ſorte de parties qui ſervent à la diſtrib
tion & à la decoration. Ceux qui avancent au delà
nû du mur pour la decoration d'une face, ſont ap
lés projectures ou ſaillies.

4. Les divers ornemens qui ſervent à la decora
peuvent être reduits à trois genres qui ſont les gra
les moyens & les petits.

5. Les grands ornemens ſont principalement
piédeſtaux colomnes, entablements, pilaſtres, arc
voltes, frontons, acroteres, amortiſſemens, ſtatu
cariatides, balcons, baluſtrades, conſoles, corbeau
corbeilles & cartouches. La Planche ſuivante & ſ
explication deſigneront tous ces divers orneme
apres que nous les auront definis.

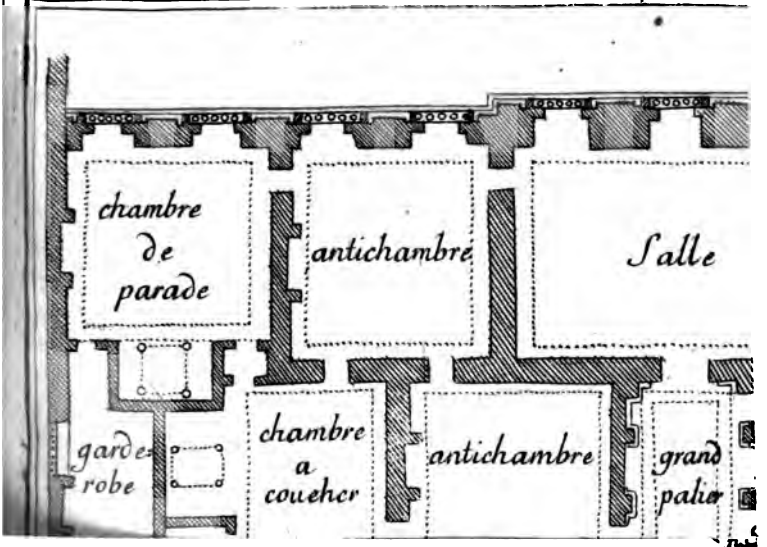
6. Les piédeſtaux ſont des corps ordinaireme
parallelipipedes ou approchans de la figure cubiqu
avec divers ornemens, petits & moyens. Leur uſage e
de ſervir de ſoûbaſſement à des colonnes ou à d
ſtatuës.

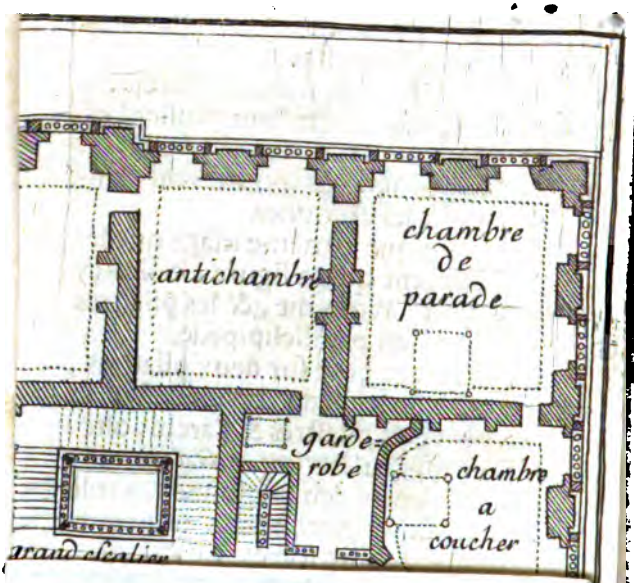
7. Les colonnes ſont des corps longs, & aprocha

de la figure cylindrique, dont l'uſage eſt de ſupporter la partie que l'on appelle Entablement. On les met aſſez ordinairement ſur des piédeſtaux.

8. L'entablement eſt le corps de l'architecture qui

plan. 39. pag. 91




antichambre
chambre
de
parade
garde=
robe
chambre
a
coucher
grand escalier

de la figure cylindrique, dont l'uſage eſt de ſupporter la partie que l'on appelle Entablement. On les met aſſez ordinairement ſur des piédeſtaux.

8. L'entablement eſt le corps de l'architecture, avec divers ornemẽs, petits & moyens qui font ſaillie; il eſt porté par deux ou pluſieurs colonnes. Et il eſt ainſi nommé, parce que ce ſont comme des poutres ou plantes qui ſont couchées ſur les colonnes.

9. Les pilaſtres ont preſque le même uſage que les colonnes dont ils ne different qu'en figure; celles-cy ſont rondes, comme nous l'avons dit, & les pilaſtres ſont longs, & ont la figure du parallelipipede.

10. L'archivolte eſt un arc poſé ſur deux pilaſtres, pour ſervir de bandeau à une arcade. Le piédeſtal, les colonnes, l'entablement, les pilaſtres & l'archivolte, compoſent ce que l'on appelle *Portique ou Gallerie.*

11. L'eſpace compris entre deux colonnes, garde le nom d'entrecolonne. Et les Architectes ordinairement n'en admettent que de cinq ſortes. Le *Pycnoſtile*, qui eſt de trois demidiametres de la colonne par le bas: le *Syſtile* qui eſt de quatre demidiametres, l'*Euſtyle* qui eſt de cinq; le *Diaſtyle* de ſix, & l'*Areoſtyle* de huit demi-diametres.

12. Les frontons ſont de grands couronnements, poſés au deſſus de l'entablement. Il y en a de diverſes ſortes, des *circulaires* qui forment un arc au deſſus de l'entablement des *triangulaires* qui ſe terminẽt en pointe; des *frontons à pans*, lorſque le couronnement a plus de deux côtés qui s'élevent au deſſus de l'entablemẽt; des *briſez*, dont les côtés qui s'élevent ne ſe joignent point, & des *frontons* avec *enroulements*, lorſque les côtés qui s'élevent forment une eſpece de contour & de rouleau.

13. Les acroteres ſont des petits piédeſtaux poſés ſur un entablement ou ſur un fronton pour ſupporter des figures.

14. Les amortiſſemens ſont toutes ſortes d'ornemens qui s'élevent pour terminer une decoration.

15. Les ſtatuës ſont des repreſentations en ſculpture de quelque perſonne. Elles ſont ordinairement *iſolées*,

c'eſt à dire, dégagées & ſéparées de toute par[illegible] les poſe ſur des piédeſtaux, & elles ſont les princ[illegible]aux ornemens des grands edifices.

16. Les Cariatydes ſont des figures de femmes captives vétuës, qui ſervent à la place des colonnes pour porter les entablemens. Voyez en l'Hiſtoire dans Vitruve livre 1. chap. 1.

17. Les balcons ſont des corps en ſaillie, au delà du nû du mur, fermés par une baluſtrade de pierres, ou un grillage de fer. Lorſque ces ſortes de balcons ſont petits, & qu'ils ſont fermés par une jalouſie, on les appelle *mènianes*, qui eſt un terme pris des Italiens. Une *jalouſie* eſt une eſpece de fermeture faite de petits bois croiſés diagonalement, qui laiſſent des vuides en lozange, par leſquels on peut voir ſans être apperçû.

18. On appelle *Baluſtrades* des rangs entiers de baluſtres. Les *baluſtres* ſont des petits pilaſtres ou colonnes qui ſervent à porter des appuis ou tablettes.

19. Les conſoles ſont des ornemens en ſaillie propres à ſuporter des petits entablemens, figures ou vaſes, &c.

20. Les corbeaux ne different des conſoles, qu'en ce qu'elles ont plus de ſaillie que d'hauteur, & les conſoles au contraire ont plus d'hauteur que de ſaillie.

21. Les corbeilles ſont des eſpeces de paniers en ſculpture pour ſervir d'amortiſſement.

22. L'on appelle *ailerons* des conſoles avec enroulemens, que l'on place ordinairement aux côtés d'une lucarne ou d'un portail.

23. Les Cartouches ſont des ornemens de ſculpture avec enroulemens, pour ſervir de table à quelque inſcription ou armoirie.

24. Tous ces divers membres que nous venons de décrire étans aſſemblés pour faire la decoration de quelque face d'un bâtiment, compoſent ce que l'on appelle façade.

25. L'on appelle *attique* dans une façade l'exhauſſement d'un petit étage, qu'on éleve au deſſus des pavillons angulaires, & ſur le milieu d'un bâtiment. Il ſont ordinairement décorés de pilaſtres, & l'on n'y doit point voir le comble.

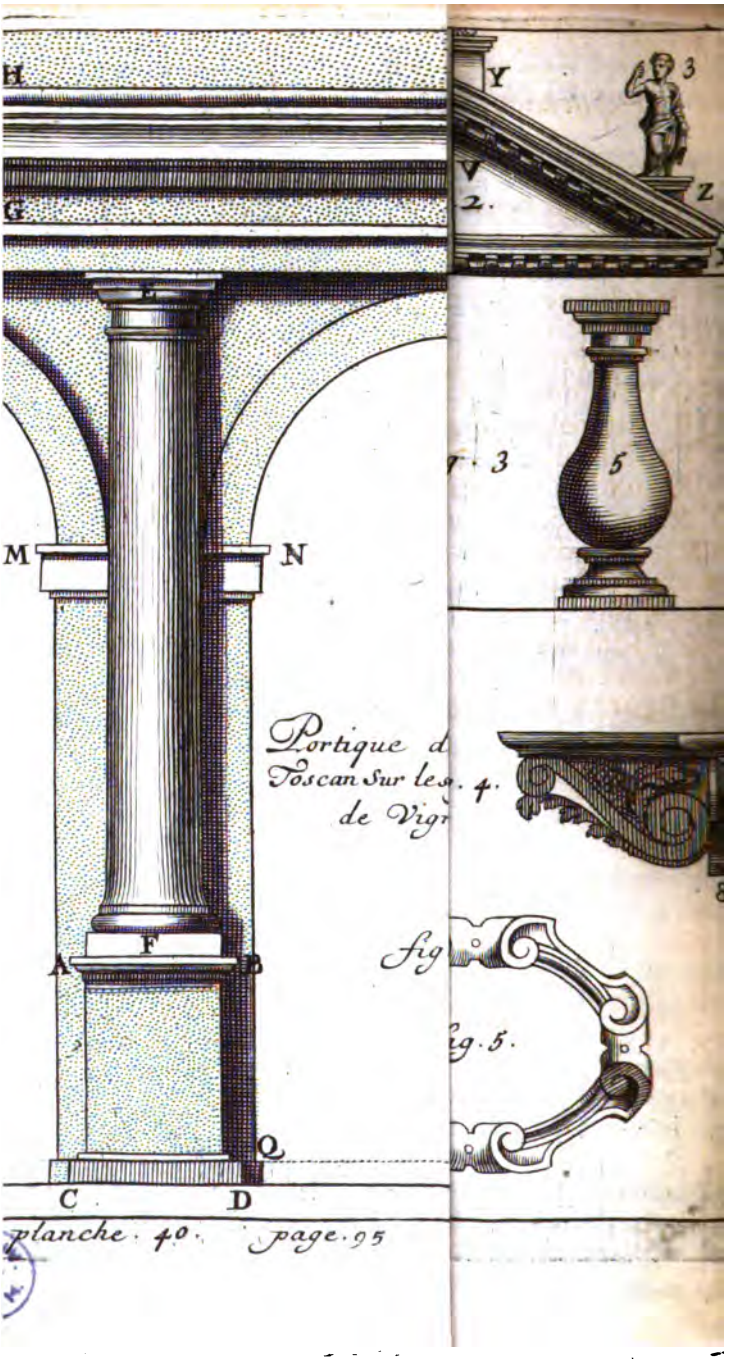


planche. 40. page. 95

Explication de la Planche ſuivante 40.

La Planche ſuivante repreſente tous les principaux ornemens que nous venons de definir.

A B C D Stilobate ou piédeſtal.
F F la colonne & ſes parties que nous décrirõs ci aprés.
G H I L l'entablemẽt & ſes molures dãs l'ordre Toſcan.
C D M N Pilaſtre.
N O P Archivolte.
Q R entrecolonne, areoſtile. fig. 1.
S T moitié d'un fronton circulaire, fig. 2.
V X moitié d'un autre fronton qui eſt triangulaire.
Y & Z ſont des acroteres.
1 & 2 ſont des amortiſſemens.
3 eſt une ſtatuë ſur un acrotere.
4 & 5 ſont des baluſtres, fig. 3.
6 & 7 ſont des conſoles, fig. 4.
8 eſt un corbeau, mutule ou modillon, fig. 4.
La figure 5 eſt une cartouche.

26. Tous les divers ornemens que nous venons de décrire en ont encore d'autres que nous avons apellés moyens & petits : nous allons les definir.

27. Le Piédeſtal eſt compoſé de trois parties ; la baſe, le dé & la corniche. Voyez la Planche ſuivante, & ſon explication.

28. Le mot de *Baſe* eſt un terme general qui ſignifie la partie la plus baſſe, qui ſoûtient ou qui en porte une autre avec empatement. C'eſt pour cela que le Piédeſtal á ſa baſe, la colonne en a une & quantité d'autres ornemens, dont la partie inferieure eſt toûjours appellée la baſe.

29. Le Dé d'un piédeſtal, c'eſt le ſolide à peu prés cubique, qui ſe trouve entre ſa baſe & ſa corniche.

30. Le terme de corniche eſt auſſi un mot commun pour ſignifier toute ſorte de ſaillies qui couronnent un corps.

31. La colonne a auſſi trois parties qui ſont la baſe, le fuſt & le chapiteau.

32. Le fuſt eſt le tronc de la colonne compriſe entre la baſe & le *chapiteau*, qui en eſt la partie ſuperieure & qui la termine.

33. L'entablement comprend l'architrave, la friſe, & la corniche.

34. L'architrave eſt la partie inferieure de l'entablement qui porte ſur les colonnes.

35. La friſe eſt celle qui ſe trouve entre l'architrave & la corniche de l'entablement. C'eſt une eſpece de bande platte plus enfoncée que l'architrave ni la corniche. Elle a pris ſon nom de ce que ſouvent elle eſt enrichie de bas relief en maniere de broderie.

36. Les Pilaſtres ont comme les colonnes leur baſe, leur fuſt & chapiteau.

37. Les impoſtes d'un arc ou archivolte, ſont des ſaillies en forme de chapiteau ſur leſquels tombent les pendentifs d'une archivolte.

38. Les frontons n'ont qu'une corniche qui les forme ou des enroulemens ; & l'eſpace qui ſe trouve entre la corniche de l'entablement & d'un fronton, s'apelle *Tympan*. Ce mot ſignifie encore les eſpaces triangulair

gulaires qui ſe trouvent aux encognures d'une arcade.

39. Les parties d'un baluſtre ſont le piédouche, la poire ou panſe, le col & le chapiteau.

40. Le piédouche generalement pris, eſt une petite baſe longue ou quarrée en adouciſſement, avec moulures pour porter un buſte ou toute autre figure: mais dans le baluſtre c'eſt la partie inferieure qui lui ſert de baſe.

41. La poire ou panſe en eſt la partie la plus groſſe & la plus enflée par le milieu; la partie la plus étroite en eſt le *col*; & le *chapiteau* eſt la partie ſuperieure qui termine le baluſtre. L'on ſe ſert ordinairement de baluſtres pour porter quelque appuy aux croiſées, balcons rempes d'eſcaliers & autres choſes ſemblables.

42. Les conſoles corbeaux & cartouches ſont plus ordinairement compoſées d'enroulemens, nervures & autres ornemens de ſculpture, dont nous parlerons cy-aprés.

Explication de la Planche ſuivante 41.

FIGURE 1.

A la baſe du piédeſtal.
B le dé du piédeſtal.
C la corniche du piédeſtal.
D la baſe de la colonne.
E F le tronc ou fuſt de la colonne, tige, ou vif.
G le chapiteau de la colonne.
H l'architrave de l'entablement.
I la friſe.
L la corniche de l'entablement.
M M impoſtes.
N N Tympans.

FIGURE 2.

A A corniche d'un entablement.
B B corniche de deux frontons differens.
C C Tympans des frontons.

FIGURE 3.

A piédouche d'un baluſtre.
B poire ou panſe.
C le col & D le chapiteau.

ſignifie toutes moulures quarrées, plus hautes que ſaillantes. Il s'en met preſque dans tous les membres comme dans l'architrave, corniche, linteaux, lambris, quadres, &c. Celle qui ſe trouve dans la corniche de l'ordre corinthien où ſont attachez les modillons, s'apelle *la platebande des modillons*; & ſi ailleurs elle eſt un peu circulaire en ſaillie, on l'appelle *platebande bombée*.

49. Le filet autrement liſtel, quarré ou reglet, eſt une petite moulure quarée, qui ſert de couronnement & de ſeparation aux grandes moulures. On l'appelle *ceinture orle* ou *annelet* dans les membres ronds.

50. L'aſtragale ſur les corps ronds & baton ſur les plats, c'eſt une petite moulure dont la ſaillie forme un demi cercle.

51. Le Congé eſcape ou apophyge, eſt un adouciſſement en portion de cercle juſqu'à la ceinture ou reglet, qui ſert de couronnement ou de baſe. Le *chamfrain* differe du congé en ce qu'il eſt en ligne droite, c'eſt le pan qui ſe forme par l'*arreſte* rabatuë, (*arreſte* eſt un terme general pour ſignifier l'angle vif de toutes ſortes de membres quarrez.) Lorſque l'on ne veut point tant orner les corniches ou baſes, on ſe contente de leur donner leur ſaillie en chamfrain.

52. Le Talon eſt une moulure, qui peut être groſſe & petite, ſelon les diverſes rencontres, il a ſa partie la plus ſaillante, convexe & l'autre concave, faiſant un effet contraire à la cymaiſe, dont la partie plus ſaillante eſt concave. Lorſqu'il ſe trouve dans la baſe des piédeſtaux, comme la partie la plus ſaillante ſe trouve en bas, on l'appelle talon renverſé.

53. L'ove ou quart de rond, eſt une moulure ronde & convexe, dont la ſaillie eſt le quart d'un cercle parfait. On l'appelle droit dans les corniches, & renverſé dans les baſes; parce que dans celle-cy la partie la plus ſaillante eſt en bas. On les fait auſſi quelquefois petits, & quelquefois gros.

54. Le creux ou cavet, eſt une moulure ronde & cave, faiſant l'effet contraire du quart de rond.

55. Le tore ou *boſel*, eſt une moulure ronde, dont la ligne circulaire a ſon arc plus grand que le demi

cercle. Il prend le nom de *boudin* ou *gros baton* ſur les membres plats. Et lorſque l'on en met deux dans un même membre, le plus bas doit être le plus gros, & s'appelle interieur, le plus haut doit être le plus petit, & ſe nomme tore ſuperieur: mais s'il ne forme pas la portion d'un cercle parfait, qu'au contraire il ſoit en ovale, ou en forme de cœur ou de quelqu'autre maniere, on l'apelle *torre corrompu* ou *brayette* par les ouvriers.

56. La ſcotie, nacelle, membre creux ou trochile, eſt une moulure concave, faiſant l'effet contraire des toresentre leſquels elle ſe met.

57. Dans la colonne l'on diſtingue encore le tailloir ou abaque, le colarin, la fuſarole & ſon renflement.

58. Le tailloir ou abaque, eſt la partie ſuperieure qui couronne les moulures du chapiteau, & ſur laquelle porte l'architrave de l'entablement.

59. Le colarin ou gorgerin, eſt une eſpece de friſe qui ſepare les moulures du chapiteau,

60. La fuſarole eſt l'aſtragale ſous l'ove des chapiteaux, on la taille quelquefois de grains & d'olives.

61. Le renflement eſt la partie la plus groſſe de la colonne vers le tiers.

62. Le mot de bande ou de face, peut ſe raporter aux moulures, c'eſt un terme general, pour ſignifier tous membres plats entre pluſieurs moulures en ſaillie.

63. La caiſſe ou panneau, eſt une eſpece de renfoncement quaré dans un plafond, lambris ou cõpartiment.

64. Les gargoüilles dans une cimaiſe, ſont des petits trous par où les eaux de la goulotte s'écoulent: on les orne de têtes d'animaux, & particulierement de mouſles de Lyons.

65. Grain d'orge parmi les Menuiſiers, & crochet parmi les Maſſons, eſt une petite cavité entre les moulures pour les dégager.

Explication de la Planche ſuivante 42.

A cimaiſe ou doucine. B larmier. C le bec. D congé. E C le canal de la mouchette pendente ou le ſofite & plafond. G platebande à modillõs. H H modillons. I liſtel reglet ou filet. L petit baton ou aſtragale. M talon. N ove ou quart de rond. O creux ou cavet. P gros tore. Q ſcotie. R tore corrompu. S tailloir du chapiteau. T colarin. V fuſarole. X renflement de la colonne Y caiſſe ou panneau.

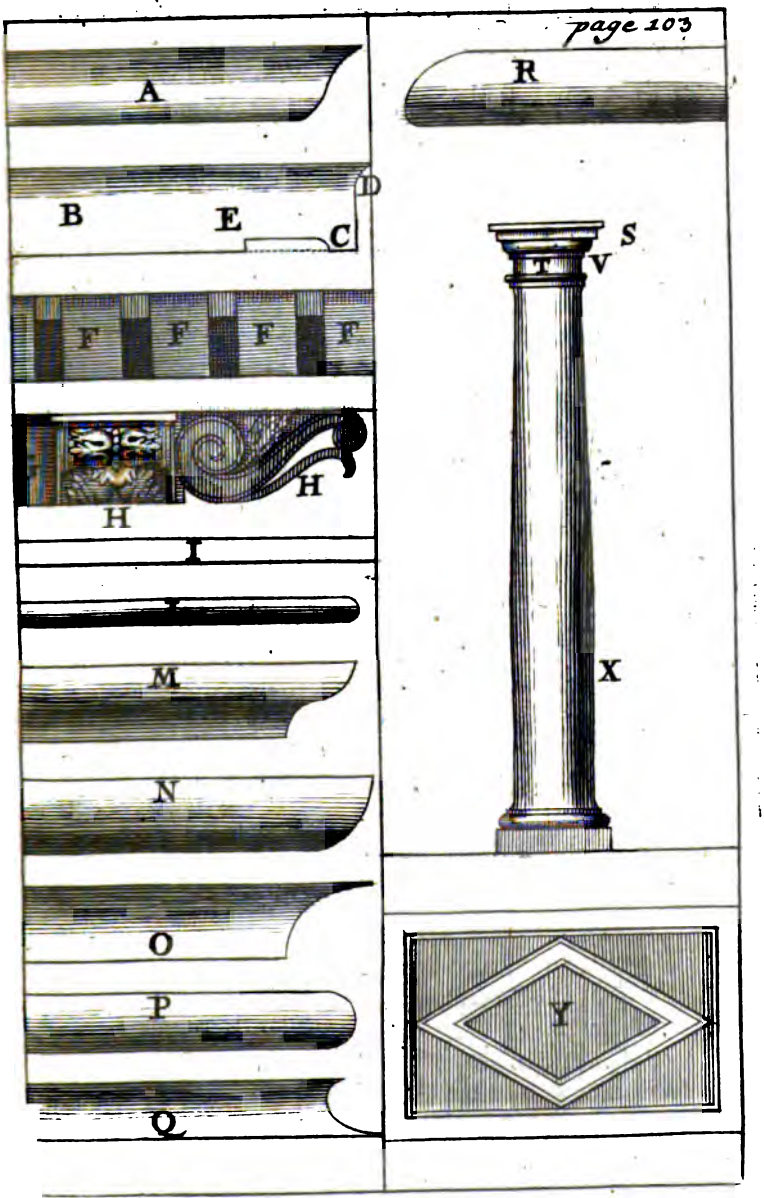


planche. 42.

66. Les ornemens de ſculpture ſont ou en *creux* ou en *relief* : ceux-cy ſont relevez en boſſe par deſſus les divers membres où on les applique ; & les premiers ſont entaillez dans les moulures ou autres ornemens. Ceux qui ſont en creux, ſont ou ſimplement gravez par des traits ſeuls ou foüillez & recherchez pour paroître en relief, & rendre le membre où ils ſont moins peſant. Pour les ornemens en relief, il y en a de *grand relief*, & de *bas relief*. Les premiers ſont beaucoup élevez, & paroiſſent preſque tout dégagés ; au contraire le bas relief a tres peu de ſaillie. Ceux qui ont leur veritable rondeur & qui ſont iſolez, s'appellent de *ronde boſſe*, & les parties ſaillantes & détachées d'un bas relief ſe nomment *demi boſſe*.

67. La gravure ſert quelquefois à decorer de diverſes manieres les paremens des pierres : mais ſon principal uſage en architecture, eſt pour les epigraphes ou inſcriptions.

68. Les ornemens foüillez peuvent ſe faire d'une infinité de manieres, ſuivant les genies differens : cependant nous décrirons icy les principaux ornemens que l'on a de coûtume de foüiller.

69. Les Gliphes ſont des canaux creuſez en rond ou en anglet : ainſi l'on appelle digliphe un eſpece de boſſage qui a ſeulement deux canaux & trigliphe celui qui en a trois ou deux entiers & deux demis. Voyez ci-aprés l'ordre dorique ſur la friſe. Le bas de chaque canal dans les trigliphes, eſt orné d'une *goute* pendante, qui eſt comme un petit cone ou une pyramide.

70. Les Metoches ou coupures, ſont des eſpaces que l'on taille entre les denticules. Voyez ci-devant à la Planche 42. les denticules F F & les intervales qui y ſont taillez.

71. L'on appelle *Canelures* d'autres canaux foüillez en rond ſur le fuſt d'une colonne, & il y en a de deux ſortes, les unes que l'on nomme *canelures à coſtes*, parce qu'elles ſont ſeparées par des petits liſtels, & les autres ſont appellées canelures à vive areſte, parce qu'elles forment en dehors un angle vif, & qu'elles n'ont point de liſtels qui les ſeparent. Que ſi ces canelures tournent

en maniere de vis au tour du fuſt d'une colonne, elles ſe nomment canelures torſes.

72. Les rudentures ſont des bâtons, cordes, roſeaux ou autre choſe de figure ordinairement ronde, qui rempliſſent les canelures juſqu'au tiers de la colonne. Ils prennent differens noms, ſuivant la forme de ce qui remplit la canelure. Ainſi il y en a de plates, il y en a à bâtons, à baguettes, à roſeaux, à cables, à feüilles de refend, à cordelette, à feüilles tournantes, à jour, à rubans tortillez, à perles & olives, &c.

73. Les oves ſont des ornemens taillez en forme d'œufs ou de chataignes dans leurs coques ou échines.

74. Les dards qui accompagnent ordinairement les oves, ſont des ornemens taillez en forme de dards ou de bouts de fleches. Ils ſont le ſimbole de l'amour à cauſe que les oves qu'ils accompagnent ont à peu prés la figure du cœur.

75. Les rais de cœur, ſont certains ornemens à feüilles d'eau, qui repreſentent à peu prés un cœur: il y en a de ſimples & de refendus.

76. Les trefles ſont des ornemens qui approchent de l'herbe de ce nom à cauſe des trois feüilles. Il y en a à palmettes & à fleurons.

77. Les godrons ſont certains ornemens en forme d'amandres ſur quelque moulure ronde. On les appelle *fleuronnés*, quand ils ont quelque feüille ou fleuron, qui les entoure, & on les nomme en *noyau*, quand ils ſont ſimples.

78. Les miroirs ſont certains ovales foüillez dans quelque moulure: on les orne quelquefois de fleurons.

79. Les chappelets ſont des petites baguettes taillées de petits grains ronds comme d'olives, de grelots, de fleurons, de patenotres, &c.

80. Les ornemens de bas reliefs peuvẽt auſſi être d'une infinité de manieres, puiſque ſur les friſes ou dans les Tympans des frontons on y décrit ordinairement des hoires ou fables entieres, des combats, des ſacrifices, & autres choſes ſemblables, ſuivant la nature des edifices ou la qualité de ceux qui les font conſtruire: nous dirons cependant les plus communs, & ceux qui ſont le plus en uſage.

81. Les feüilles ſont les ornemens qui ſont les plus ordinaires, on les aplique ſur toute ſorte de membres. Soit qu'elles ſoient naturelles comme celles du laurier, du chêne, de l'oliviet, du palmier, &c. ou qu'elles ſoient imaginaires comme celle des rinceaux dont nous parlerons cy-aprés. Il y en a qui ſont ſimples & ondées, à qui l'on a donné le nom de *feüilles d'eau*; d'autres qui ſont découpées ſur les bords, que l'on appelle *feüilles de refend*, & d'autres qui ne ſont qu'ébauchées, pour être refendüe, que l'on a appellé *feüilles galbées*. Celles qui ſont appliquées au tour d'un membre rond s'appellent *tournantes*, & celles qui ornent les coins des quadres, & les retours des plafonds ſont nommées *feüilles d'angles*. Les chapiteaux n'ont pour l'ordinaire que la feüille de perſil & d'acanthe, qui eſt découpée, celle de laurier qui eſt refenduë par trois feüilles & celle d'olivier par cinq. L'acanthe eſt une plante dont les feüilles ſont larges & refendües : nous en dirons l'hiſtoire plus bas en traittant des cinq ordres.

82. Les Rinceaux ſont des branches de feüillages naturels ou imaginaires & refendus avec des roſes, boutons, graines, fruits, &c. qui prennent ordinairement leur naiſſance dans un *culot* qui eſt une eſpece de tige refendüe & ornée de feüilles. Tres ſouvent auſſi les rinceaux prennent leurs naiſſances de la partie inferieure qui termine un genie ou petit enfant; & pour lors ce *genie* s'apelle *fleuronné*.

83. Les fleurs qui ſervent d'ornement en architecture, ſont auſſi ou naturelles ou artificielles & imaginaires : celles-ci s'apellent *fleurons* ou *groteſques*, quand elles ſont mélées de figures d'animaux, de feüillages, de fruits, &c.

84. Les palmettes ſont des feüilles de palmier taillées ſur quelque ornement : & le *pampre* eſt un feſton de feüilles de vigne, de grapes de raiſins ou autre plante aprochans de la figure de la vigne, dont on orne les colonnes torſes.

85. Les Guillochis ſont pluſieurs reglets paralleles, qui font pluſieurs retours ſur une face platebande ou ſofite de quelque architrave. Il y en a de ſimples & de plus compoſées.

86. Les entrelas ſont des ornemens de liſtels & de fleurons liez & entrecroiſez les uns dans les autres qui ſe taillent ſur les moulures ou dans les friſes.

87. Les chiffres ſont des entrelas de lettres fleuronnées pour marquer le nom de quelque perſonne.

88. Les medailles ſont des têtes de quelque perſonne diſtinguée, que l'on grave en bas relief dans des ronds ou des ovales ſur quelque metal ou ailleurs.

89. Les boucliers & les candelabres ſe font aſſez entendre d'eux-mêmes. On s'en ſert particulierement dans les friſes.

90. L'on appelle *Metopes*, des eſpaces quarrés entre les trigliphes de l'ordre dorique, ſur leſquels on taille en bas relief, des têtes de victimes, boucliers, &c.

91. Les ornemens qui ont un peu plus de relief, ſont les ſuivans outre quantité d'autres que l'on peut employer ſuivant les occaſions & le genie de l'architecte.

92. Les feſtons ſont des cordons de feüilles, de fleurs & de fruits liez enſemble, qui ſont plus gros par le milieu, & ſuſpendus par les extremitez.

93. Les chutes de feſtons & d'ornement, ſont des bouquets de fleurs & de fruits ſuſpendus.

94. La guir lande eſt une eſpece de petit feſton formé de bouquets de même groſſeur, dont on fait des chutes dans des montans, dans des friſes, & dans des panneaux de compartimens.

95. Les Caulicoles ou tigetes, ſont de petites tiges d'herbes qui ſoûtiennent des *volutes*. Ce dernier mot ſignifie des enroulemens en ligne ſpirale, comme nous le verrons ci-aprés dans l'ordre jonique & compoſé.

96. Les panaches ſont des ornemens de plumes d'autruches, que l'on ſubſtitüe quelquefois à la place des feüilles.

97. Les roſes ſont des ornemens qui repreſentent la fleur de ce nom que l'on met ordinairement ſur les panneaux des plafonds, ou ſur les faces des tailloirs. On les appelle roſaces quand elles ſont beaucoup grandes.

98. Pour les coquilles, grains & autres noms aſſez connus par eux-même, je ne les definis pas de peur de me carter de la briéveté que je me ſuis propoſée.

99. Les ornemens de grand relief & quelquefois iſolez, ſont ſans nombre & aſſez connus par leurs figures. Les principaux dont on ſe ſert ſont

100. Diverſes têtes comme d'anges, de cherubins, d'hommes, de bêtes, & particulierement les têtes decharnées, de bœuf & de belier, pour marquer les ſqueletes d'animaux que l'on ſacrifioit autrefois. On ſe ſert encores de maſques d'hommes & de femmes & de têtes de ſatyres.

101. Les chimeres ſont des animaux monſtrueux, dont la tête & l'eſtomac ſont d'un lyon, le ventre d'une chevre, & la queüe d'un dragon.

102. Les genies ſont de petits enfans à qui l'on donne des aîles.

103. Les harpies ſont des oiſeaux monſtrueux, qui ont la tête & le ſein d'une femme, les aîles d'une chauve-ſouris, des grandes griffes & la queuë d'un dragon.

104. Les griffons ſont auſſi des animaux fabuleux, qui ont la partie ſuperieure d'une aigle, & l'inferieure d'un lyon.

105. L'on nomme generalement du nom de perſan toutes les ſtatües d'hommes qui portent des entablemens.

106. Et les termes ſont d'autres ſtatües d'hommes ou de femmes, dont la partie inferieure ſe termine en gaine, c'eſt-à-dire, diminüant inſenſiblement en ligne droite, juſque ſur la baſe qui ſert de pied.

170. Les autres ſtautües ſont ſans nombre, comme celles des Dieux ou des Deeſſes, tant du ciel que des eaux & de l'enfer des demi-dieux, des empereurs, des rois, des magiſtrats, des ſages, &c.

108. Outre ces ornemens, l'on ſe ſert encore des choſes purement naturelles que l'on tâche d'imiter, comme les flâmes, les glaces, les rochers, &c. L'on appelle Rocaille un aſſemblage de tout ce qui ſe trouve d'ordinaire dans les rochers, qu'on tâche d'imiter, ſur tout dans les grotes des jardins & parterres. L'explication de la Planche ſuivante eſt ci-aprés.

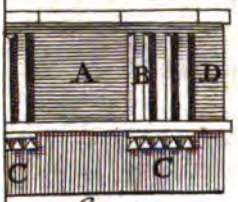


fig. 1.

fig. 2.

fig.

fig. 8.

fig. 9.

fig. 10.

fig. 14.

7. 16.

fig 17

planche. 43. page. 109.

Explication de la Planche precedante qui eſt la 43.

La premiere figure repreſente des trigliphes & metopes. A metope. B canaux des trigliphes. C C clochetes pendantes. D demi metope.

La ſeconde figure repreſente les oves. E, F eſt l'eſpine ou coque, & G G les dards qui accompagnent les oves

La troiſiéme figure repreſente une portion de colonne avec des canelures à vive areſte H H.

La quatriéme eſt une autre portion de colonne, avec canelures à côtes & rudentures. I rudenture plate. L rudenture à bâton. M rudenture à baguette. N rudenture à roſeau & laurier. O rudenture à roſeau & lierre.

La cinquiéme figure repreſente les deux ſortes de rais de cœur. P rais de cœur ſimples. Q rais de cœur refenduës.

La ſixiéme repreſente des trefles. R ſont des trefles à fleurons. S des trefles à palmetes,

La ſeptiéme a des godrons fleuronnez. T & V godrons ſimples ou en noyau.

La huitiéme figure repreſente des miroirs X X.

La neuviéme eſt une portion de friſe en bas relief, avec les rinceaux de feüillages qui prennent naiſſance au culot Y &

La dixiéme figure eſt une autre portion de friſe avec rinceau, qui prennent naiſſance dans la partie inferieure du genie Z.

La onziéme figure eſt une feüille d'acanthe ou de refend.

La douziéme eſt une roſace.

La treiziéme un fleuron propre à mettre ſur la face d'un tailloir.

La 14. figure a ſes guillochis ſimples & quarrés 1, & des ronds & fleuronnez 2.

La 15. & 16. fig. repreſentent de deux ſortes d'entrelats. On en fait d'une infinité de ſortes.

La 17. repreſente un feſton accompagné de chutes de part & d'autre.

La 18.& 19.fig.repreſentent des pôſtes ainſi appellé parce que ces rouleaux ſemblent ſe courir les uns ſ les autres.

Des cinq ordres de l'Architecture.

1. Il n'eſt rien de ſi commun que le nom d'ordr parmi les autheurs qui aprés Vitruve ont traité de l'a chitecture ; & cependant l'on peut dire qu'il n'eſt rie dont ils ayent moins determiné la ſignification ; i conviennent tous des cinq ordres que l'on appelle l Toſcan, le Dorique, le Jonique, le Corinthien & l Compoſite ; ils determinent même les differente proportions de chacun, & les differens caracteres d'or nemens qui leur conviennent : mais preſque pas u d'eux ne s'accorde pour donner une notion generale à ce terme dont ils ſe ſervent ſi ſouvent. Quelques uns le confondent avec celui d'ordonnance qui (comme l'a fort bien remarqué Monſieur Perrault dans ces Annotations ſur Vitruve) a une toute autre ſignification que le mot d'ordre. Scamoſi en donne une definition plus obſcure que le mot même ; & Vignole ſe contente de diſtinguer les cinq ordres, ſans s'arrêter à en donner une definition generale. Pour moi je me contente d'aporter ici la definition qu'en donne Monſieur Perrault dans ſon Traité des Colonnes au chapitre premier de la premiere Partie & dans ſon Vitruve, à la Preface du Livre quatriéme. Il dit que l'*Ordonnance* „ eſt ce qui regle la grandeur de toutes les parties d'un „ bâtiment par rapport à leur uſage. Et que l'*Ordre* eſt „ ce qui eſt reglé par l'Ordonnance lorſqu'elle preſcrit „ les proportions des colonnes entieres, & qu'elle de„ termine la figure de certaines parties qui leur con„ viennent ſelon les proportions differentes qu'elles „ ont. En ſorte que ſuivant cet Autetir la difference des ordres ſe prend de la proportion qu'à la hauteur d'une colonne au diametre de ſa groſſeur vers ſa baſe, avec certains caracteres d'ornemens qui accompagnent cette proportion plûtôt qu'une autre.

Cependant il fait voir dans la longue Preface qu'il a fait au commencement de ſon Livre, qu'il traite de

l'ordonnance de cinq eſpeces de colomnes. Que ſi dans ces divers ordres il y a beaucoup de choſes qui ſoient fondées ſur la raiſon, il y en a auſſi beaucoup que l'on ne doit qu'au ſort & au caprice, ce qui provient du trop de religion & de deference que les modernes ont eu pour l'antiquité, n'oſans rien changer à ce qu'ils en ont laiſſé comme ſi c'étoit une choſe ſainte & ſacrée.

2. Ainſi parce que les Doriens, les Ioniens & les Corinthiens peuples Grecs, ont été les premiers qui aſſignerent les proportions des colonnes & leurs donnerent à chacun divers ornemens. L'on a obſervé religieuſement le caractere qu'ils donnerent à chacun de ces ordres, & les noms des peuples qui les ont inventez. Voila l'origine des trois premiers ordres, le Dorique, le Jonique & le Corinthien. Les Italiens en inventerent un quatriéme, beaucoup plus ſimple & plus groſſier que ceux des Grecs à qui l'on donne le nom de Toſcan. Mais les Romains qui dans le temps qu'ils firent fleurir les Sciences & les Arts, voulurent chercher plus de magnificence dans leurs edifices, ils inventerent un cinquiéme ordre qui renfermoit toutes les beautez de l'Ionique & du Corinthien, à qui pour cette raiſon l'on a donné le nom de Compoſite.

Neanmoins à proprement parler ces deux derniers ne ſont qu'une ſuite des autres, en ſorte que le Toſcan ne differe du Dorique que parce qu'on l'a rendu plus maſſif & moins orné, & le Compoſite n'eſt que le Corinthien perfectionné. Nous décrirons cy-aprez chacun de ces ordres en particulier, commençant par l'ordre Toſcan comme le plus ſimple & le plus groſſier, & nous ſuivrons les meſures & les proportions de Monſieur Perrault, comme celles qui nous ont paruës les plus faciles pour l'intelligence de ce Traité: nous reſervant d'en parler plus à fond cy-aprez dans le Traité particulier de nôtre architecture.

3. Le Toſcan qui comme nous avons dit eſt le plus ſimple de tous les ordres n'a que tres-peu d'ornemens. On ne l'enrichit point de ſculptures, & il n'y a que tres-peu de moulures.

Son piédeſtal n'a dans ſa baſe qu'un ſocle, un reglet, & un cavet : Le Dé eſt plus large que haut, & la corniche a ſeulement un cavet un liſtel, & une platebande qui lui tient lieu de larmier.

Sa colonne a ſept fois & un tiers le diametre de ſa groſſeur, y compris la baſe & le chapiteau. La baſe n'a qu'un plinthe, un tore & une ceinture ; le fuſt a un congé par le bas & par le haut, & le chapiteau eſt orné d'une petite ceinture, d'une aſtragale, du colarin, d'un filet ou anneau, d'un ove & du tailloir.

Son entablement n'a dans l'architrave qu'un liſtel qui la couronne ; la friſe eſt toute unie ; la corniche n'a qu'un talon couronné d'un liſtel, le larmier avec un reglet & une baguette, & le tout couronne d'une grande ove ou quart de rond ſans liſtel. Voyez la Planche ſuivante.

Pour les baſes des pilaſtres ils n'ont qu'un plinthe. Leurs impoſtes n'ont qu'une face ou platebande entre deux reglets & l'archivolte, n'a dans ſon bandeau qu'une ſimple platebande, j'ay pris ces ornemens des pilaſtres & impoſtes dans Vignole, parce que Monſieur Perrault n'en dit rien.

4. L'ordre Dorique eſt le premier ordre chez les Grecs, qui ſoit le plus ſimple & le plus fort. Cet ordre affecte particulierement une grande ſolidité, & ce fut du temps du Roi Dorus qu'il commença à être mis en uſage pour les Temples, dont le premier fut dedié à Junon par ce même Roi Dorus ; de qui les peuples prirent le nom de Doriens, & cet ordre celuy de Dorique.

Son piédeſtal a dans ſa baſe un ſocle, un tore, un filet & un cavet : le Dé n'eſt gueres plus long que large ; & la corniche eſt ornée d'un cavet, d'un filet, un larmier couronné d'un liſtel.

Sa colonne a d'hauteur huit fois le diametre de ſa groſſeur, y compris la baſe & le chapiteau. La baſe que Vitruve appelle attique, dont pluſieurs ſe ſervent dans tous les ordres, eſt ornée d'un plinthe, & d'un cavet entre deux filets qui ſepare deux tores. La ceinture ſous le congé, eſt du vif de la colonne qui a dix-

huit

huit canelures à vive areſte. Le chapiteau à un anneau, une aſtragale, un col, trois filets ou armilles, un ove ou échine, & le tailloir qui eſt couronné d'un talon, & d'un filet.

Son entablement a l'architrave toute unie comme l'ordre Toſcan, excepté que ſous chaque trigliphe de la friſe répondent ſix clochettes ou goutes pendantes comme des pyramides qui paroiſſent attachées à un filet qui les couronne. La friſe eſt ſeparée de l'architrave par un reglet ; elle eſt diverſifiée par des trigliphes, & des metopes ; dans celles-ci ſont gravées en relief ou des boucliers, ou des têtes de victimes, ou autres choſes ſemblables, ſelon l'édifice auquel cet ordre eſt deſtiné. Chaque metope eſt couronné d'un reglet : mais les trigliphes ont une eſpece de tailloir ou chapiteau qui fait ſaillie & qui les couronne. La corniche commence par un cavet & un liſtel, & au deſſus ſe trouve la platebande des mutules qui eſt couronnée d'un talõ. Les mutules y ſont quarrées & couronnées pareillement d'un talon ; elles répondent directement ſur les trigliphes, & leur ſophite eſt orné de trente-ſix goutes pendentes en forme de cone, & rangées de ſix en ſix, dont la pointe eſt attachée au ſofite du larmier des mutules. Au deſſus eſt un grand larmier à mouchette pendente qui a beaucoup de ſaillie : il eſt couronné d'un talon & d'un filet & le tout d'une cymaize en doucine avec ſon reglet.

Pour l'impoſte Dorique, Vignole luy donne une double face, un liſtel, une baguette, un ove & un reglet, & le bandeau de l'archivolte garde le même profil. Les tympans ſont ornez de tables triangulaires avec des roſaces ; & la baſe du piédroit a outre ſon plinthe une baguette & un liſtel.

5. L'invention de l'ordre Ionique eſt entierement dûë aux peuples de la Grece, appellez Joniens, comme nous l'avons déja remarqué. Ces Peuples aprés avoir fait bâtir un Temple à Apollõ, ſemblable à ceux qu'ils avoient vû chez les Doriens, ils chercherent d'autres proportions, & d'autres ornemens pour en dédier un à la Déeſſe Diane, dans la ville d'Epheſe, l'une des plus

grandes & des plus belles des treize qu'ils avoient fait construire. Pour cet effet, cherchant quelque chose de plus delicat que le Dorique, & remarquant que la proportion du corps d'une femme paroissoit plus agreable & plus dégagée que celle de l'homme, qui est representée par l'ordre Dorique, ils firent les colonnes de ce Temple, beaucoup plus déliées par raport à leur hauteur : ils inventerent les volutes connuës pour representer les boucles des cheveux qui ornoiẽt les femmes ; & enfin adjoutant un plus grand nombre de moulures à la base des colonnes, ce Temple se trouva d'un autre ordre, & beaucoup plus delicat que le Dorique.

Le Piédestal de l'ordre Ionique a dans sa base, outre le socle une doucine renversée entre deux listels & un cavet : son Dé ou tronc est plus long que le dorique, & sa cornice est ornée d'un cavet avec son listel, d'un larmier, & d'un talon avec le listel au dessus.

La colonne a dans sa hauteur neuf fois moins un tiers le diametre de sa grosseur. Sa base est ornée de deux astragales, qui separent deux scoties entre deux reglets avec un tore au dessus, & une ceinture sous le congé du fust, qui a vingt-quatre canelures à côtes. Le chapiteau a sur le devant & sur le derriere deux volutes canelées, qui à droite & à gauche forment des especes de balustres apellez coussinets. Au dessous des volutes sont des oves taillez sur un quart de rond avec des coques & des dards, & des enroulemens des volutes dans le canal, naissent des gousses qui couvrent les premiers oves. Le centre des volutes que l'on appelle l'œil est enrichi d'une rose. Le dessus du chapiteau est couronné par un talon avec un reglet, qui luy sert de Tailloir.

L'entablement a dans son architrave trois bandes ou faces, qui sont couronnées d'un talon avec un reglet. La frise est quelquefois enrichie de sculpture en bas relief. Au dessus se trouvent un talon, un denticule, un listel, une baguette, un quart de rond, le larmier, un talon avec son listel & la cymaise en doucine couronnée d'un reglet.

La baſe du piédroit, ſelon Vignole a ſon ſocle, une baguette & un filet. L'impoſte a deux faces, un reglet, un quart de rond & un larmier. Le Bandeau de l'archivolte a une conſole à ſa clef & le même profil des impoſtes. Les Tympans ont des tables triangulaires.

Cet ordre ſe trouve tres ſouvent enrichi de ſculpture dans ſes moulures, comme de rais de cœur, de treſles, & de feüilles refendües.

6. Vitruve au Chapitre premier de ſon quatriéme Livre rapportant l'origine des trois ordres que les Grecs ont inventé, raconte qu'une jeune fille preſte „ à marier, étant morte ſa nourrice poſa ſur ſon tom„ beau dans un panier quelques petits vaſes que cet„ te fille avoit aimé pendant ſa vie ; & afin que le „ temps ne les gatât pas ſi-tôt étant à découvert, elle „ mit une tuile ſur le panier, qui ayant été poſé par „ haſard ſur la racine d'une plante d'acanthe, il arriva „ lors qu'au Printemps les feüilles & les tiges com„ mencerent à ſortir, que le panier qui étoit ſur le mi„ lieu de la racine, fit élever le long de ſes côtez les ti„ ges de la plante qui rencontrant les coins de la tuile, „ furẽt contraintes de ſe récourber en leur extremité, „ & faire le contournement des volutes. Le Sculpteur „ Calimachus.... paſſant auprez de ce tombeau vit le „ panier, & de quelles ſortes ces feüilles naiſſantes „ l'avoient environné : Cette forme nouvelle luy „ plut infiniment, & il en imita la maniere dans les „ colonnes qu'il fit depuis à Corinthe, établiſſant & „ reglant ſur ce modele, les proportions & la maniere „ de l'ordre Corinthien.

Pluſieurs croyent cette hiſtoire une fable, & pretendent que cet ordre de colonnes avoit été mis en uſage par les Iſraëlites dans la conſtruction de leur tabernacle & du temple qui fut conſtruit par Salomon. Quoy qu'il en ſoit voicy les caracteres qui diſtinguent cet ordre des autres que nous avons cy-devant décris.

Le piédeſtal Corinthien a un ſocle, un tore, un filet, une doucine renverſée & un talon avec ſon filet. Le tronc eſt plus grand que celuy de l'ordre Ionique. La

corniche a un talon avec ſon filet en deſſus, une dou-cine qui monte ſous le larmier qu'elle creuſe pour faire une mouchette, un larmier & un talon avec ſon filet.

Monſieur Perrault ne determine point de ſculpture dans le Piédeſtal : mais Vignole taille ſur le tore de la baſe des entrelats. Sur la doucine renverſée des feüilles de refend. Il donne une friſe ou col au piédeſtal; il taille des canaux avec roſeaux ſur la doucine de la corniche, & ſur le talon des rais de cœur.

La colonne a de hauteur 9 fois & un tiers le diametre de ſa groſſeur. Sa baſe a un plinthe deux aſtragales qui ſeparent deux ſcoties entre deux filets, & deux tores. Le fuſt de la colonne a ſa ceinture baſſe, un congé deſſus & deſſous, 24 canelures à coſtes, une ceinture au deſſus & une aſtragale. Le chapiteau qui fait ſa principale difference d'avec l'ordre Ionique, n'a point de col ou gorge : mais il eſt garni d'un double rang de huit feüilles d'olives recourbées en dehors, d'entre leſquelles il ſort de petites tigettes d'où naiſſent les volutes qui ne ſont point ſemblables à celles de l'ordre Ionique, & qui y ſont en plus grand nombre, y en ayant quatre à chaque face de ce chapiteau, qui font le nombre de ſeize, & l'on vuide celles des angles pour les rendre plus legeres. Le deſſus ſe termine en forme de vaſe par un rebord que l'on appelle la levre du vaſe, cloche ou tambour, qui eſt la ſolide ſur lequel ſont taillées les feüilles, les tiges & les volutes. On luy a donné ce nom, parce que lors qu'on conſidere le chapiteau dégagé de ſes feüilles, il a la figure d'un vaſe ou d'une cloche renverſée. Son tailloir eſt beaucoup different des autres cy-devant ; car il a ſes 4 faces courbées & creuſées en dedans avec une roſe au milieu dont les moulures conſiſtent dans un larmier, & un échine ſimple avec les angles coupez.

L'entablement a dans ſon architrave trois faces ; la premiere eſt ſeparée de la ſeconde par une baguette taillée de grains & d'olives. La ſeconde eſt couronnée d'un talon taillé de rais de cœur, & la troiſiéme a au deſſus un cordon en chapelet avec un talon enrichi de

treſles, & ſon filet au deſſus. La friſe s'enrichit de toute ſorte de bas relief, & quelquefois elle ſe termine par un congé, mais mal, comme le remarque Monſieur Perrault, la corniche commence par un talon, enrichi de rais de cœur avec un filet au deſſus. Le denticule ſe trouve en ſuite avec un filet & une baguette taillée de grains & d'olives. Au deſſus eſt une échine taillée d'oves & de dards, & en ſuite la platebande des modillons qui ſont faits en maniere de conſoles avec baluſtres & feüilles de refend, & un eſpece de tailloir ou chapiteau qui les couronne. Au deſſus eſt un talon & un larmier couronné d'un autre talon taillé de rais de cœur avec ſon filet, & enfin la cymaiſe que l'on garnit ordinairement de muſles de lyon pour les gargoüilles, le filet couronne la cymaiſe.

Les baſes des piédroits dans le portique, Vignole leur donne outre le ſocle une baguette & un filet. L'impoſte a un filet & une baguette, une gorge ou friſe avec canaux & roſeaux, un filet & aſtragale taillée de perles; une échine avec oves & dards; un larmier & un talon taillé de rais de cœur avec ſon filet. La clef de l'archivolte eſt une menſole avec nervure. Le profil du Bandeau eſt de trois faces, la premiere eſt ſeparée de la ſeconde par une aſtragale taillée d'olives, la ſeconde eſt ſeparée de la troiſiéme par un filet & une échine taillée d'oves; la troiſiéme enfin eſt couronnée d'un talon avec rais de cœur & un filet. Les Tympans ont des tables triangulaires.

Le ſofite du larmier dans les entre-modillons eſt orné de caiſſes ou panneaux avec roſaces refendües. Il y en a qui ont des roſaces ſans caiſſes.

7. L'ordre compoſite eſt ſans difficulté le plus riche & le plus magnifique de tous les ordres; mais il n'eſt pas le plus delicat: & c'eſt pour cette raiſon que Vincent Scamoſi le met au quatriéme rang, & le Corinthien en ſuite comme le plus delicat. Nous avons cependant ſuivi l'uſage qui ſemble être reçû, qui eſt de le mettre aprés le Corinthien, comme étant le plus beau & compoſé de l'Ionique & du Corinthien, dont il a la beauté & les richeſſes, avec la ſolidité de l'Ioni-

que, Vitruve ne donne aucune meſure de cet ordre; c'eſt lui neanmoins qui a dõné occaſion d'en inventer les meſures & proportions, lorſqu'il dit que ſon chapiteau eſt compoſé de pluſieurs parties priſes dans le Dorique dans l'Ionique, & le Corinthien. Ce ſont les Romains, comme nous l'avons déja remarqué, qui en ont été les premiers inventeurs; auſſi quelques-uns aiment mieux l'appeller l'ordre Romain que Compoſite, parce que l'on peut appeller de ce nom toutes les diverſes manieres d'ornemens qui participeront de tous les ordres, ſans avoir les caracteres de l'ordre Romain. Mais cõme l'uſage lui a donné ce nõ, & que les autres ordres s'appellent plûtôt compoſez que compoſites, nous ne nous écarterons point de l'uſage. Et voici le caractere qui le diſtingue de tous autres, ſur les remarques de Monſieur Perrault.

Le Piédeſtal de l'ordre compoſite outre ſon ſocle a un tore, une baguette, un filet, une doucine ou gorge renverſée, un bâton ou groſſe aſtragale & un filet, faiſant un congé avec le nû du Dé. La Corniche eſt compoſée d'un filet avec ſon congé ſur le Dé d'un gros aſtragale ou bâton, d'une doucine avec ſon filet, un larmier & un talon avec ſon filet.

La Colonne a de hauteur dix fois le diametre de ſa groſſeur. Sa baſe eſt la même que celle du Corinthien. Quelques-uns cependant, comme Vignole, ne veulent qu'un aſtragale entre les ſcoties pour diſtinguer cet ordre du Corinthien. Le fuſt de la colonne a tous les mêmes ornemens que le Corinthien, mais le chapiteau en fait le principal caractere. Il a double rang de huit feüilles d'acanthe, & au lieu des caulicoles qui ſont au chapiteau corinthien, il y a des petits fleurons colez au vaſe ou tambour contournez vers le milieu de la face du chapiteau, & finiſſant en une roſe. Au deſſus eſt une aſtragale taillée de grains & d'olives, & une échine avec des oves, des dards & des gouſſes. Le tailloir qui eſt ſemblable au corinthien, a au milieu de ſes faces un fleuron compoſé de pluſieurs feüilles, dont les unes ſe joignent au milieu, les autres ſe détournẽt de côté, qui s'élevẽt depuis l'échine juſqu'au haut du tail-

loir. Les volutes prénent naiſſance au deſſus de l'ove à côté du fleuron & au deſſous du tailloir, elles ſont un peu ovales & cõtournées, cõme celles de l'ordre Ionique ; elles ſont evidées pour être plus legeres, & le deſſus eſt orné, & comme couronné de feüilles d'acanthe, dont celles qui ſont ſous les coins de la baque ſe recourbent en haut, & les autres ſont couchées ſur les côtez de chaque volute ; l'œil eſt orné d'une roſe, & le bas de chacune porte ſur le retour des feuilles du ſecond rang.

L'architrave de l'entablement compoſite n'a que deux faces, entre leſquelles il y a un petit talon gravé de rais de cœur ; la ſeconde face eſt couronnée d'une aſtragale à grains & olives, d'une échine taillée d'oves & un cavet orné d'entrelats avec roſes & culots, & un filet au deſſus. La friſe a un tres-petit congé ſous le filet qui commence la corniche. Celle-cy a en ſuite du filet une aſtragale, taillée de grains & d'olives, & un talon orné de trefles à fleurons : au deſſus eſt la premiere face du modillon, qui eſt couronnée d'un petit talon, taillé de rais de cœur fleuronnés ; & la ſeconde face du modillon qui ſuit, & qui eſt plus grande, eſt couronnée d'un liſtel & d'un ove taillé. Le larmier eſt au deſſus avec une mouchette & un talon avec rais de cœur & ſon filet qui le couronne. La cymaiſe eſt en doucine & fort grande, avec un filet au deſſus. Le ſophite du larmier peut être diverſement enrichi ſuivant le genie de l'architrave.

Comme Vignole n'a rien donné de particulier pour l'impoſte & archivolte compoſite, je décrirai ici celle que Monſieur Daviler lui donne. Le pilaſtre finit par un congé ſous le filet qui eſt le premier membre de l'impoſte, & l'aſtragale le ſecond ; au deſſus eſt une eſpece de friſe avec un petit congé ſous un filet, une aſtragale & une doucine couronnée de ſon filet. Il y a enſuite un larmier couronné d'un cavet avec ſon filet. L'archivolte n'a que deux faces qui ſont ſeparées par un talon, & la grande eſt couronnée d'une cimaiſe entre deux filets avec tous les ornemens, dont ces ſortes de membres ſont capables.

8 Outre ces 5 ordres qui ſont cõme la baſe & le fondement de toutes les decorations d'architecture, & qui ſeuls meritent le nom d'ordre, on n'a pas laiſſé que de donner ce même nom a diverſes autres manieres de decorations qui s'éloignent du moins en partie des regles & des proportions des 5 ordres. Les principaux ſont l'ordre compoſé, l'attique, le ruſtique, & le gothique.

9. On appelle ordre compoſé celui qui eſt comme mélangé des cinq autres, ſelon le caprice de l'architecte. De ſorte que l'on donne ce nom à toute ſorte de compoſition arbitraire & differente de celles qui ſont reglées par les cinq ordres. Ainſi l'on peut reduire à l'ordre compoſé:

Premierement toutes ſortes de chapiteaux, ſoit antiques ou modernes, qui au lieu de volutes & de tigettes, ont des animaux, des cornes d'abondance ou de belier. Ainſi que Vignole rapporte deux chapiteaux antiques tres-beaux, qui peuvent être rapportez à cet ordre. Le premier qu'il croit avoir été deſtiné à un temple de Jupiter, a des aigles au lieu de volutes, & à la place des fleurons ou tigettes du vaſe ou tambour, il y a des foudres, & ſur le tailloir une tête de Jupiter. Le ſecond a deux griffons ſous chaque angle du tailloir, & une aigle au milieu du tambour qui tient un chien ſous ſes ſerres. Et une infinité d'autres chapiteaux ſemblables, qui approchent de l'ordre corinthien ou compoſite, dont ils gardent preſque les proportions, changeant ſeulement les ornemens du chapiteau.

Secondement, les ordres qu'on appelle perſique, caryatique, françois & tout autre ſemblable, pourveu qu'il ait les ſymboles ou hierogliphes, de la nation dont ils prennent le nom. L'ordre *Perſique* eſt celuy qui au lieu de colonnes a des figures d'eſclaves pour porter l'entablement. Le *Cariatique* dont Vitruve raconte l'hiſtoire au commencement de ſon premier Livre, a des ſtatuës de femmes, appellées cariatides à la place des colonnes. Le *François* qui au lieu de feüilles, a des panaches diſpoſez de la même maniere que

les feüilles d'acanthe & d'olivier, ſoûtenües par les cordons des ordres militaires de ſaint Michel, & du ſaint Eſprit, avec une couronne de Prince au deſſus de l'aſtragale, qui termine le fuſt de la colonne; des volutes ornées de plumes de coq, & une tête de cet oyſeau ou un ſoleil pour fleur ſur le tailloir du chapiteau qui ſont les ſimboles de la nation Françoiſe.

10. L'ordre Attique n'eſt compoſé que de pilaſtres fort courts avec une corniche architravée pour entablement: on appelle *corniche architravée* celle qui eſt poſée ſur l'architrave ſans friſe. On ſe ſert ſouvent de cet ordre au lieu de fronton pour couronner un ordre d'architecture.

11. L'ordre Ruſtique eſt celui qui eſt avec des refends ou boſſages. On lui a donné ce nom, parce que ordinairement on s'en ſert pour la decoration des maiſons de campagne.

12. L'ordre Gothique eſt celui qui s'éloigne de toutes les meſures des ordres antiques, pour garder une certaine confuſion de toutes ſortes d'ornemens, ſans gout & ſans grace, comme ſont la pluſpart des anciennes Egliſes de France où l'on voit des colonnes plus maſſives que des pilliers, ou d'autres qui ſont auſſi menües que des perches, avec des maſcarons, qui ſont des têtes ridicules faites à fantaiſie, des chimeres, harpies, guimberges & autres ſemblables ornemens des fruits, des fleurs, des feüilles, quantité d'entrelats, &c. Tout ce qu'il y a de plus beau dans le gothique, ce ſont les compartimens des voutes formées par des arcs doubleaux, liernes & tiercerons, qui prennent naiſſance de branchez & croiſées d'ogives, avec des ſaillies ou nervures, qui ſont détachées de la doüelle des pendentifs, & qui ne laiſſent pas de porter des culs de lampes, lanternes à jour, & autres caprices retenus par des boulons de fer avec un travail, & un artifice extraordinaire.

Les Planches ſuivantes expliqueront & repreſenteront ce que nous venons de décrire.

Explication de la Planche 44.

La premiere figure repreſente le piédeſtal, & la baſe de la colonne de l'ordre Toſcan. A le ſocle du piédeſtal. B le filet. C le cavet. D le tronc. E cavet de la corniche du piédeſtail. F ſon filet. G la platebande. H le plinthe de la baſe de la colonne. I le tore. L la ceinture. M le congé. N partie du fuſt de la colonne.

La ſeconde figure repreſente le piédeſtal, de l'ordre Dorique avec la baſe du fuſt de la colonne, qui eſt la baſe attique, que Vitruve donne à cet ordre. A eſt le ſocle. B un tore. C un filet. D un cavet. E le tronc du piédeſtal. F cavet de la corniche. G filet. H larmier. I filet ou reglet du larmier. L plinthe de la baſe attique. M gros tore ou inferieur. N ſcotie entre deux filets. O petit tore ou ſuperieur. P l'orle ou ceinture du fuſt de la colonne ſous le congé. Q canelure avive arreſte pour l'ordre Dorique.

La troiſiéme figure repreſente les divers membres du piédeſtal & de la baſe de la colonne de l'ordre Ionique avec les canelures de ſon fuſt. A le ſocle de la baſe du piédeſtal. B doucine avec ſon filet en bas. C cavet & ſon filet en bas. D le tronc du piédeſtal. E cavet avec ſon filet qui le couronne. F larmier. G talon & ſon filet qui le couronne. H plinthe de la baſe de la colonne. I ſcotie entre deux filets. L aſtragale double. M ſcotie ſuperieur entre deux filets. N tore. O ceinture ou orle du fuſt de la colonne. P congé ſur l'orle. Q Q 24 canelures à côtes dans le fuſt de la colonne.

La quatriéme figure repreſente le piédeſtal corinthie & la baſe de ſa colonne. A le ſocle. B tore. C gorge renverſée & un filet deſſous. D talon renverſé & un filet deſſous. E le dé. F un talon avec un filet. G doucine qui monte ſous le larmier. H qu'elle creuſe pour faire une mouchette. I le talon & ſon filet deſſus. L plinthe de la baſe de la colonne. M tore inferieur. N

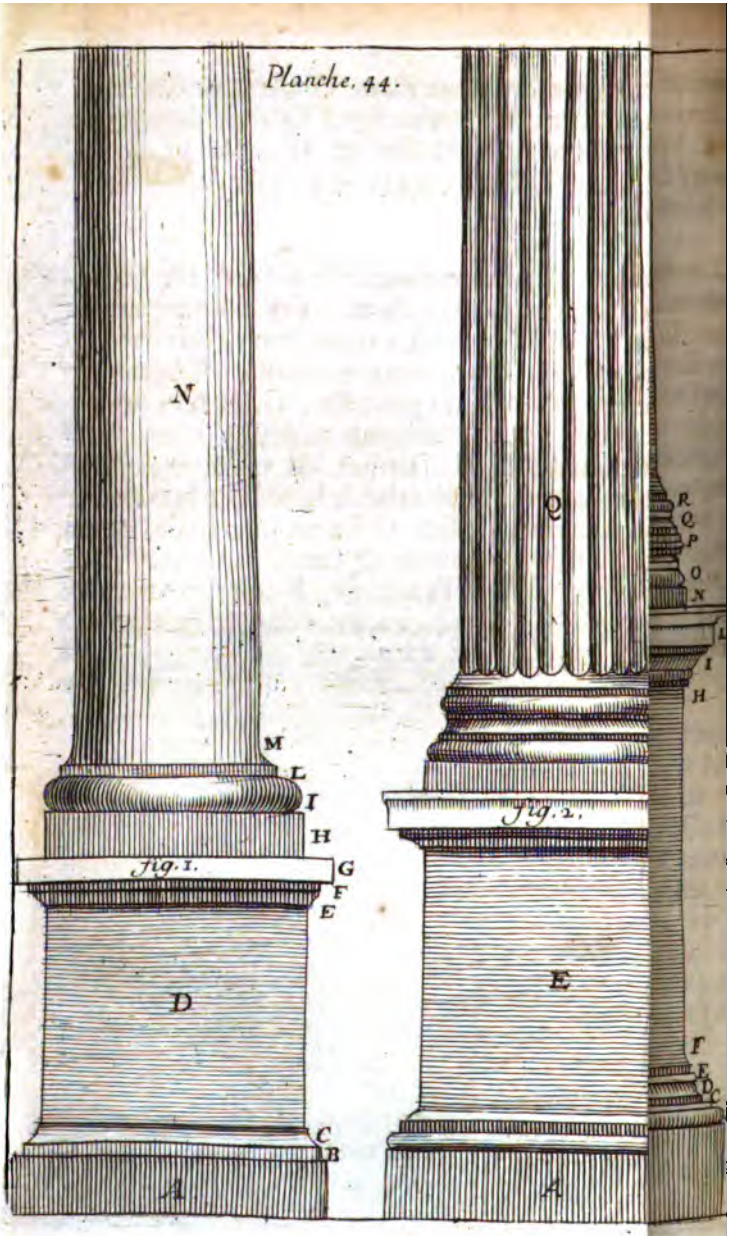


Planche. 44.
N
M
L
I
H
G
F
E
fig. 1.
D
C
B
A
Q
R
P
O
N
fig. 2.
E
A

inferieure entre deux filets. O aſtragale double. P ſuperieure entre deux filets. Q tore ſuperieur. R orle ou ceinture du fuſt de la colonne. S le ſur l'orle. T T 24 canelures à coſte dans le fuſt colonne.

cinquiéme figure comprend le piédeſtal & la baſe colonne compoſite. A eſt le ſocle. B tore infe- C aſtragale. D doucine ou gorge renverſée avec et au deſſous. E petit tore ou groſſe aſtragale. F ous le congé du dé du piédeſtal. G, H filet ſur le du tronc & une aſtragale au deſſus. I doucine on filet au deſſus. L larmier. M talon avec ſon ui le couronne. N plinthe de la baſe de la colon- un tore au deſſus. O ſcotie inferieure entre lets. P aſtragale double. Q ſcotie ſuperieure en- deux filets. R tore ſuperieur. S ceinture du fuſt congé. T V V 24 canelures dans le fuſt de la ne.

Explication de la Planche 45.

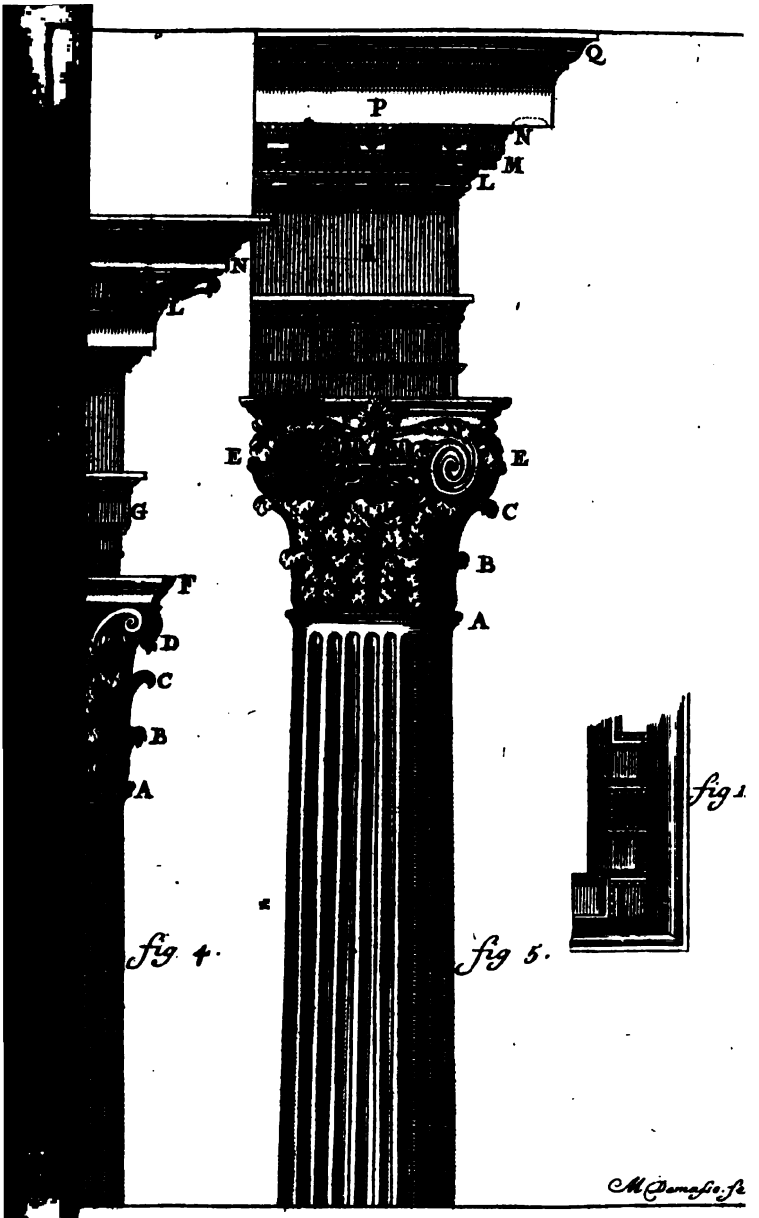
La premiere figure repreſente le chapiteau d
dre Toſcan & ſon entablement.

A l'aſtragale du fuſt de la colonne. B le c
avec un aſtragale au deſſus & un annelet. C l'o
echine. D le tailloir. E la face de l'architrave. F
glet. G la friſe. H talon couronné d'un filet. I la
L ove ou echine. Entre le larmier & l'echine, e
petite baguette & un filet au deſſous.

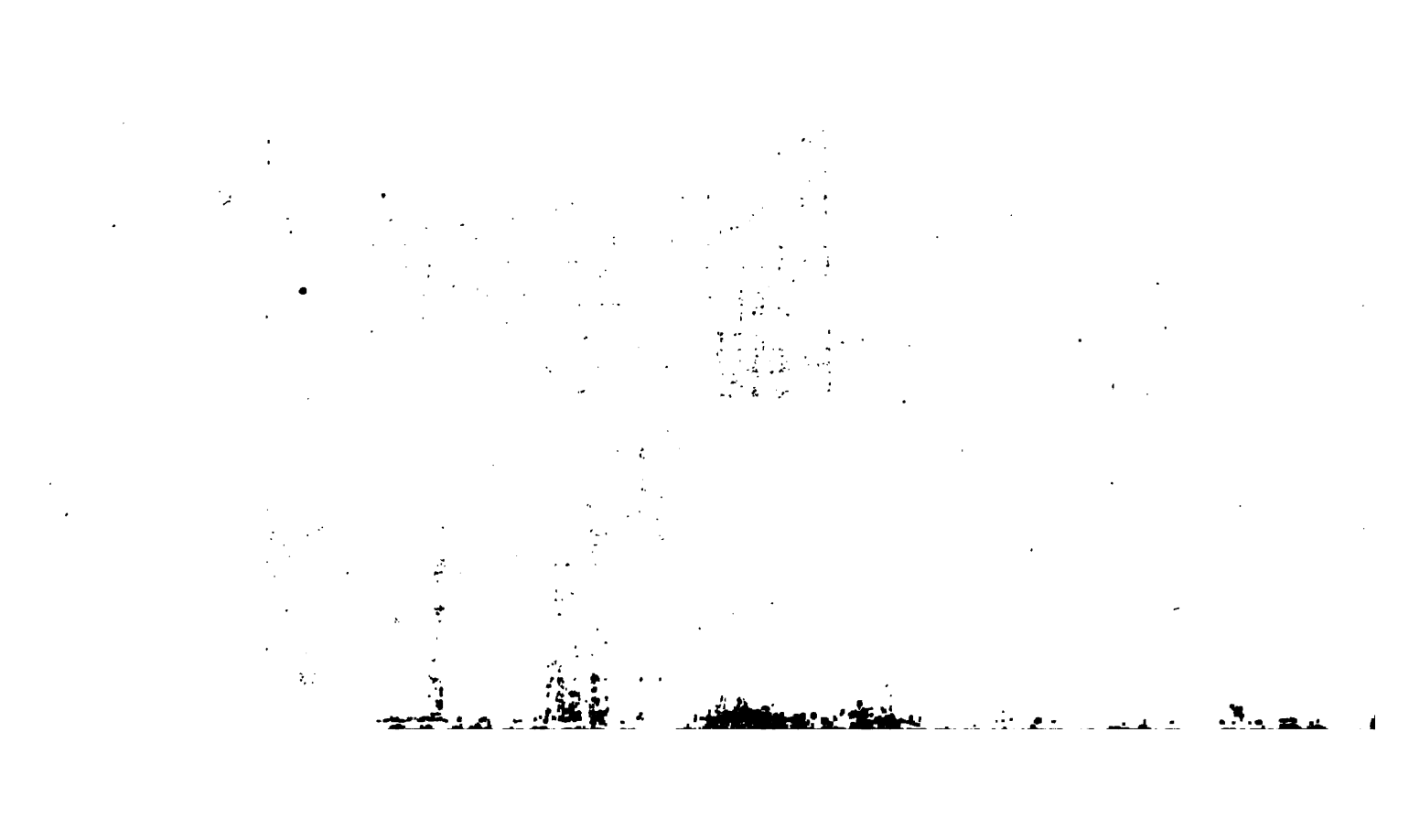
La ſeconde figure repreſente le chapiteau & l'
blement de l'ordre Dorique. A l'aſtragale & l'an
du fuſt de la colonne. B le colarin avec trois an
au deſſus. C l'ove du chapiteau. D le tailloir cou
d'un talon avec un filet. E eſt l'architrave, dans
ſe trouvẽt les goutes pendantes. FF ſous le triglip
qui eſt dans la friſe. H eſt une metope. I eſt la ban
te des chapiteaux des triglifes. L eſt un cavet.
platebande des mutules. N,O eſt le larmier. P un
couronné d'un filet. Q la cymaiſe & ſon filet.

La troiſiéme figure repreſente le chapiteau &
tablement Ioniques. A l'aſtragale & annelet du f
la colonne. B echines avec des gouſſes. C C, D D
lutes de part & d'autres. E le tailloir. F G H trois
de l'architrave couronnées d'un talon avec ſon
I la friſe. L talon ſous le denticule. M,N ove au de
duquel eſt un cordon avec ſon filet. O, le larmier
ronné d'un talon avec ſon filet. P cymaiſe & ſon

La quatriéme figure repreſente le chapiteau &
tablement de l'ordre corinthien. A l'aſtragale &
annelet. B C D triple rang de feüilles d'olivier re
dües 4 à chaque face du chapiteau. E E tigetes.
tailloir au milieu duquel eſt un fleuron à chaque
dans le concave du tailloir. G l'architrave, a 3 f
ſeparées par des moulures, dont la premiere eſt
cordon à patenotres, la ſeconde un talon avec rais
cœur, la derniere eſt couronnée d'un talon avec r
fles, & ſon filet, & au deſſus d'un chapellet. H eſt
friſe & un talon à rais de cœur avec ſon filet. I plat



UNIV. OF MICH.



bande. L echine avec oves & dards & au deſſus un cordon & ſon filet. M la platebande des modillons M, N le larmier couronné d'un talon & ſon filet. O la cymaiſe & ſon filet.

La cinquiéme figure repreſente le chapiteau, & l'entablement de l'ordre compoſite. A l'aſtragale & annelet du fuſt de la colonne. B C double rang de feüilles d'acanthe 4 à chaque face du chapiteau. D l'ove & un cordon au deſſous taillé de patenotres. E E les volutes. F le fleuron. G, H, les faces de l'architrave, la premiere eſt ſeparée de la ſeconde par un talon taillé de rais de cœur, la ſeconde eſt couronnée d'un ove avec un cordon à patenotres deſſous & au deſſus un cavet taillé de roſes & culots & au deſſus un filet. I eſt la friſe avec un congé & un cordon à patenotres avec ſon filet au deſſous. L eſt le talon ſous la platebande des modillons. Ce talon eſt taillé de trefles fleuronnez avec culots. M eſt la premiere face de la platebande des modillons. N eſt la ſeconde face. O ſont les modillons. Ces deux faces ſont ſeparées par un talon taillé de rais de cœur fleuronnez. P eſt le larmier. Q la cymaiſe avec ſon filet. Le larmier & la cymaiſe ſont ſeparez par un talon taillé de rais de cœur ſimples.

Les autres figures repreſentent les autres parties qui ſe voyent de bas en haut. La 6e repreſente les canelures de la colonne Dorique avec ſon tailloir. La 7e repreſente les canelures à côtes de l'ordre Ionique avec ſes couſſinets & ſon tailloir. La 8e repreſente du côté de A le tailloir corinthien, & du côté de B le tailloir compoſite. La 9e repreſente le plafond de la corniche Dorique avec ſes goutes & ſes caiſſes. C. La 10e repreſente le plafond corinthien. Et la 11e le plafond de la corniche compoſite.

CHAPITRE XIV.

Des differens termes de la Fortification.

1. FOrtifier eſt conſtruire pluſieurs ouvrages de terre, murs ou bois, pour la defenſe de quelque lieu dont l'ennemi voudroit s'emparer.

2. Fortification ſe prend ou pour l'Art de fortifier ou pour les ouvrages qui ſervent à la defenſe de quelque Place.

3. Forteresſe ou Fort Royal, grand Fort, eſt une Place conſiderable fortifiée ou environnée de fortifications. fig. A.

4. Fort de campagne ou Fortin, ſont des petites places détachées & fortifiées, pour la défenſe de quelque lieu important, comme d'un paſſage, d'un Palais ou d'un Camp. fig. B.

5. Citadelle, eſt un petit Fort revêtus de tous ſes dehors dans l'enceinte de la forteresſe. fig. C.

6. L'enceinte eſt la premiere élevation que l'on fait autour d'une Place pour la défendre, comme D E F G, dans la fig. A.

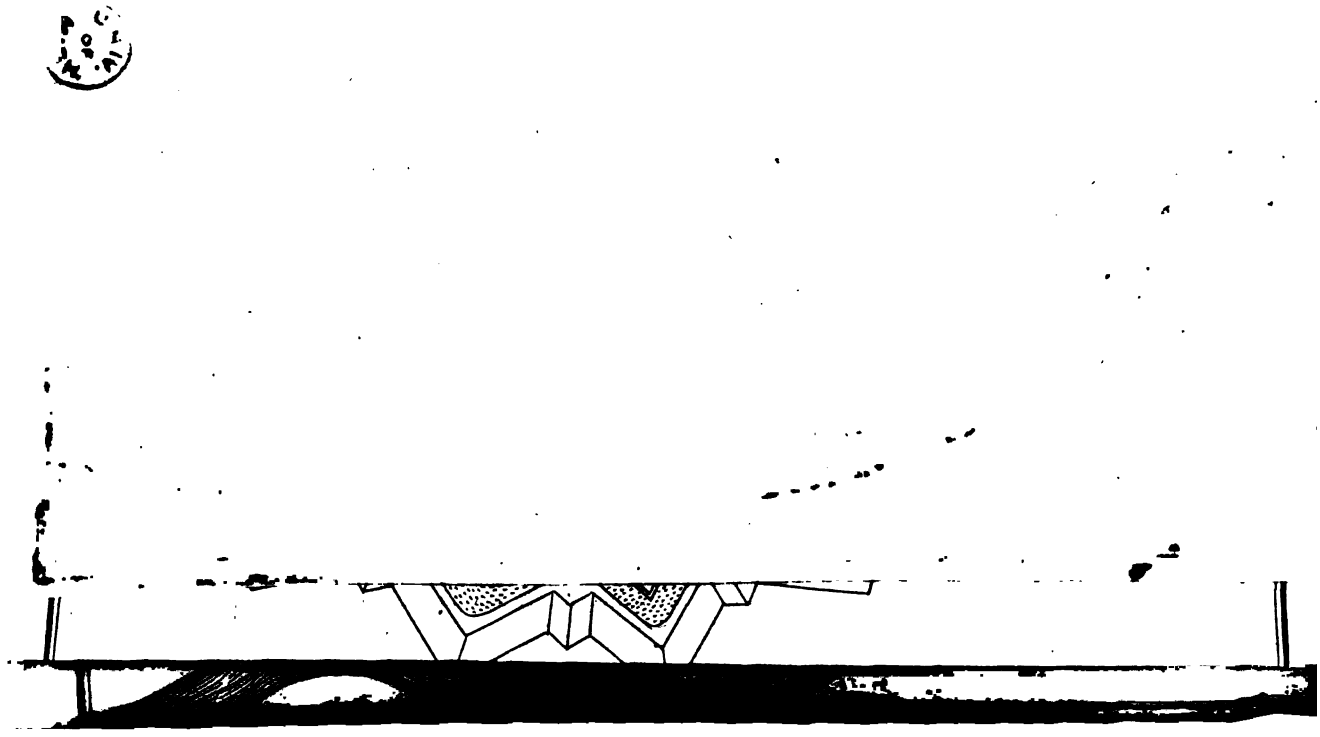
7. La Forteresſe comprend deux choſes: ſçavoir, la Place que l'on veut fortifier, & les ouvrages que l'on y veut conſtruire pour la défendre.

8. La Place peut être conſiderée comme vuide, ou comme remplie.

9. Dans la place comme vuide, l'on diſtingue l'eſpace & la figure.

10. L'eſpace eſt toute l'étenduë qui eſt bornée par l'enceinte. Il en faut bien ſavoir, la contenuë pour y ménager, les Places d'armes, maiſons, &c.

11. La figure, eſt celle que forme l'enceinte en bornant l'eſpace de la place. Elle prend ſon nom du nombre de ſes côtez. Ainſi l'on dit un quarré, un Pentagone, un Decagone, &c. & ſi cette figure eſt reguliere ou irreguliere, la forteresſe eſt appellée reguliere ou irreguliere.



12. Dans la figure il faut diſtinguer le Rayon, le
té du Poligone, l'Angle du centre, l'Angle du Poli
ne, la capitale, le Poligone interieur & le Poligone ex
rieur.

13. Le Rayon eſt la ligne tirée du centre de la pl
à l'Angle, que forment deux côtez de la figure, co
me A B : l'on conte tout autant de rayons qu'il y
côtez dans la figure.

14. Le côté du Poligone eſt une des lignes qui
forment, comme B C.

15. L'Angle du centre, eſt celui que forment de
Rayons au centre de la Place, comme B A C.

16. L'Angle du Poligone, eſt celui que forment de
côtez du Poligone dans leur rencontre, comme B C

17. La ligne capitale, eſt le prolongement du ray
au delà des Angles du Poligone, juſqu'à une certa
diſtance pour former la longueur d'un Baſtion, co
me B E ou C F.

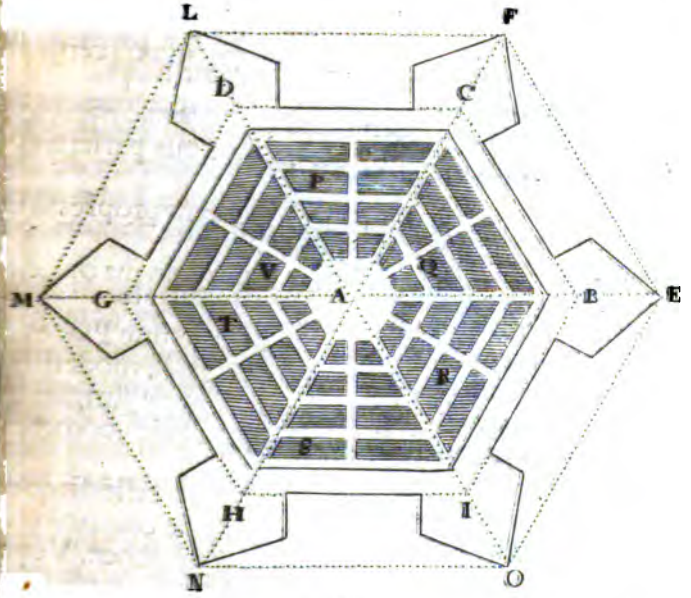
18. Le Poligone interieur eſt celui qui enviro
immediatement la place, comme B C D, G H I.

19. Le Poligone exterieur eſt celui qui eſt formé
la rencontre des lignes tirées aux extremitez des c
tales les plus éloignées du centre, comme E F L M

20. La place remplie comprend les places d'armes
les rües, les maiſons & cazernes, les Arcenaux, les ma
gazins & corps-de-garde.

21. Places d'armes, eſt un grand eſpace pour range
les ſoldats, & leur faire faire l'exercice, comme tou
l'eſpace autour de A.

Page 129 et Page 131



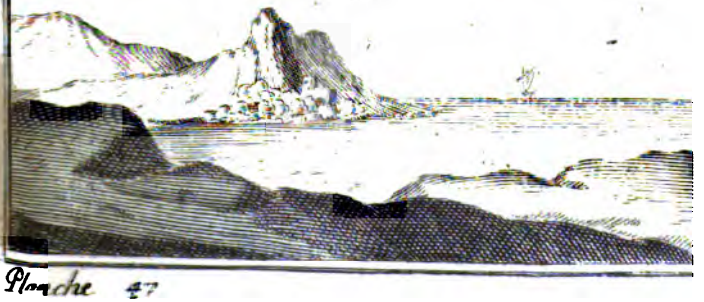


Planche 47

21. Les ruës ſont de longs eſpaces, & peu larges, qui ſervent à communiquer dans toutes les parties de la Place : comme AB, AC, AD, &c. Voyez la Planche cy-devant.

23. Les maiſons & caſernes, ſont les logemens deſtinez aux habitans & aux ſoldats ; ſous leſquels l'on comprend les Temples, les Hôpitaux & autres bâtimens publics & neceſſaires. On les bâtit dans les iſles que forment les ruës : comme P, Q, R, S, T, V, Planche cy-devant.

24. Les Arcenaux ſont des logemens couverts pour retirer l'Artillerie.

25. L'Artillerie comprend les canons, mortiers & autres inſtrumens ſemblables, dont nous parlerons cy-aprés.

26. Les Magazins ſont les logemens propres à conſerver les munitions de guerre.

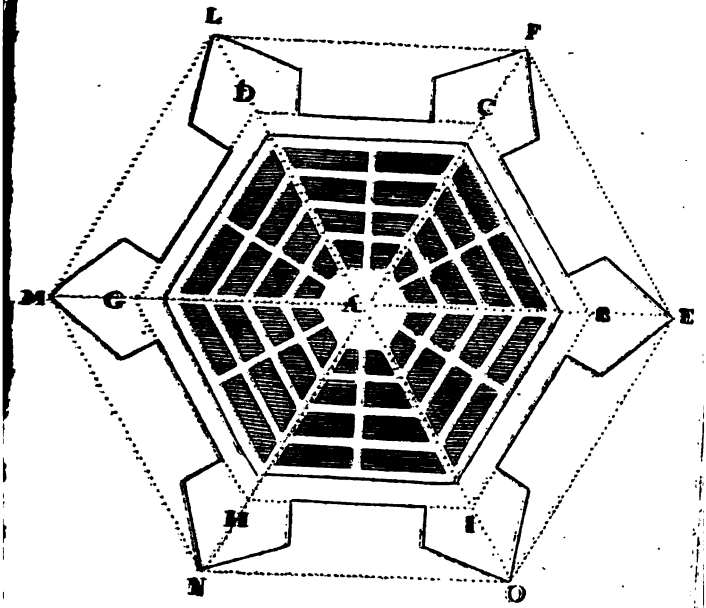
27. Corps-de-gardes, ſont les logemens où ſe retirent ceux qui ſont en garde.

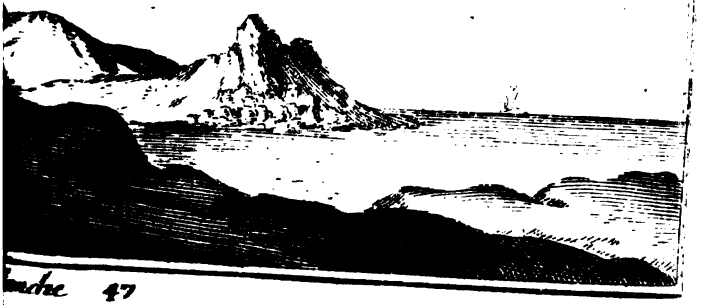
28. Les ouvrages dont on fortifie une Place, ſont ou de la Fortification ancienne ou de la moderne.

29. La Fortification ancienne, ſont de ſimples murs avec des tours, des foſſez & des palliſſades, comme l'on en voit encore.

30. La Fortification moderne, eſt celle dont on ſe ſert à preſent & qui eſt en uſage. Elle comprend l'enceinte & les dehors, ou ouvrages détachez. Voyez la grande Planche cy-devant.

31. L'enceinte ſe prend ici, non pas pour la premiere dont nous avons parlé cy-deſſus, mais pour tout ce qui environne la Place, comme le rempart, la chemiſe, la fauſſe braye, le foſſé, le chemin couvert, le glacis & le rideau.


L
F
D
C
M
G
A
B
E
H
I
N
O



32. Le Rempart eſt une terraſſe élevée dans la pre
miere enceinte de la place, & qui la couvre tout a
tour; il forme dans ſon circuit les baſtions & les cou
tines : comme A B C D E F G H, I, &c.

33. Le Baſtion eſt une portion du Rempart cont
nuë ſous quatre lignes qui s'avancent du côté de
campagne, & preſentent leurs Angles à l'ennemi: co
me A B C D E ; lorſqu'un Baſtion eſt trop petit, co
me F G H I L, il prend le nom de Moineau.

34. La Courtine eſt la longueur du Rempart co
priſe entre les Baſtions : comme E F.

35. Le Rempart dans ſa largeur comprend le Pa
pet avec ſa banquette & le terreplein. Voyez la fig.

36. Le Parapet eſt une élevation au deſſus du T
replein pour couvrir le ſoldat : comme A B. fig. 2.

37. Terreplein, eſt la ſurface ſuperieure du Re
part, ſur laquelle eſt poſé le Parapet : comme C D. fig

38. Banquette, eſt une eſpece de banc, qui re
tout le long du parapet pour élever le ſoldat, afin q
puiſſe tirer : comme E. fig. 2.

39. Dans le Parapet on diſtingue ſa Baſe inferie
comme F D, la ſuperieure, comme A B ; ſon Ta
interieur, comme A G ; & l'exterieur, comme B
Talud, eſt la pente que l'on donne à une élevati
Fig. 2.

40. Le Terreplein a auſſi ſa baſe inferieure H
ſuperieure C D : le Talud inferieur C H, le Talud
terieur D I. fig. 2.

pag. 133.

Demy exagone

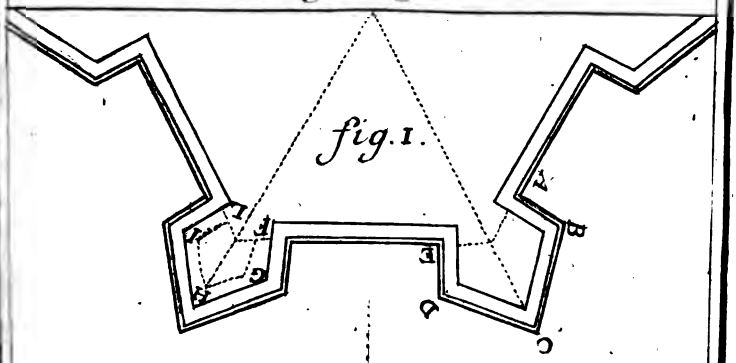


fig. 1.

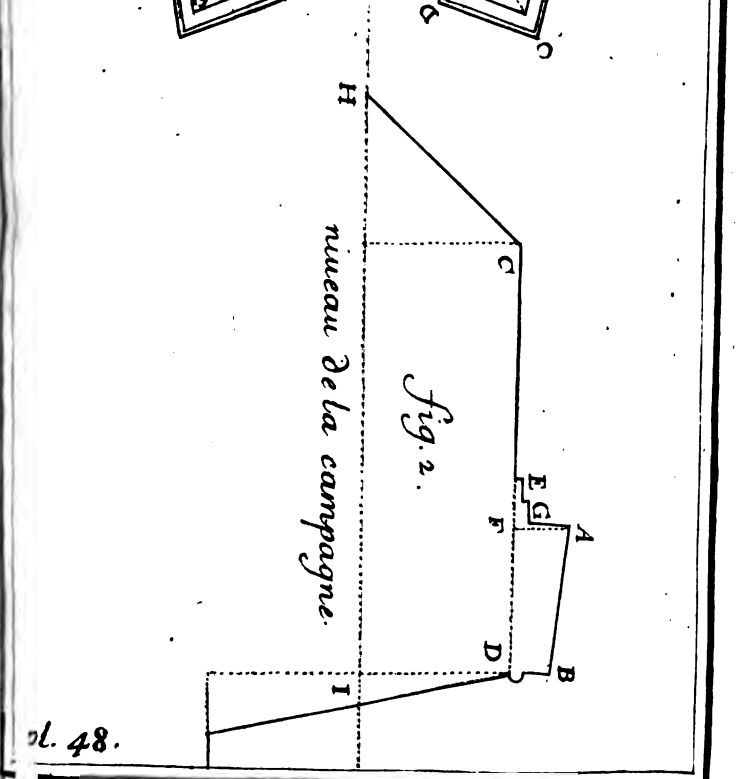


fig. 2.

nueau de la campagne.

ol. 48.

42. La Chemiſe eſt la muraille dont on revêt Rempart, & l'on y diſtingue ſa hauteur, ſon épaiſſeu ſon talud, l'eſcarpe, le cordon & la tablette. Et qu quefois ſur la tablette un parapet, & un chemin ent le parapet du rempart & celui de la muraille à qui l'o a donné le nom de chemin des rondes. Voy[illegible] A, fig

43. La hauteur ſe prend depuis ſes fond[illegible]ns ju qu'au deſſus du Parapet du Rempart A B. fig.

44. L'épaiſſeur eſt differente en bas & en haut, cauſe du Talud. Elle n'a cependant point de Talud i terieur. Voyez A B, perpendiculaire, & le Talu C Fig. 2.

45. Le Cordon eſt une ſaillie ronde qui environ toute la muraille, C I. fig.2.

46. La Tablette eſt ce qui paroît depuis le cord juſqu'au deſſus de la muraille, C E. fig. 2.

47. L'Eſcarpe eſt ce qui paroît depuis le bas de muraille juſqu'au cordon C D. fig.2.

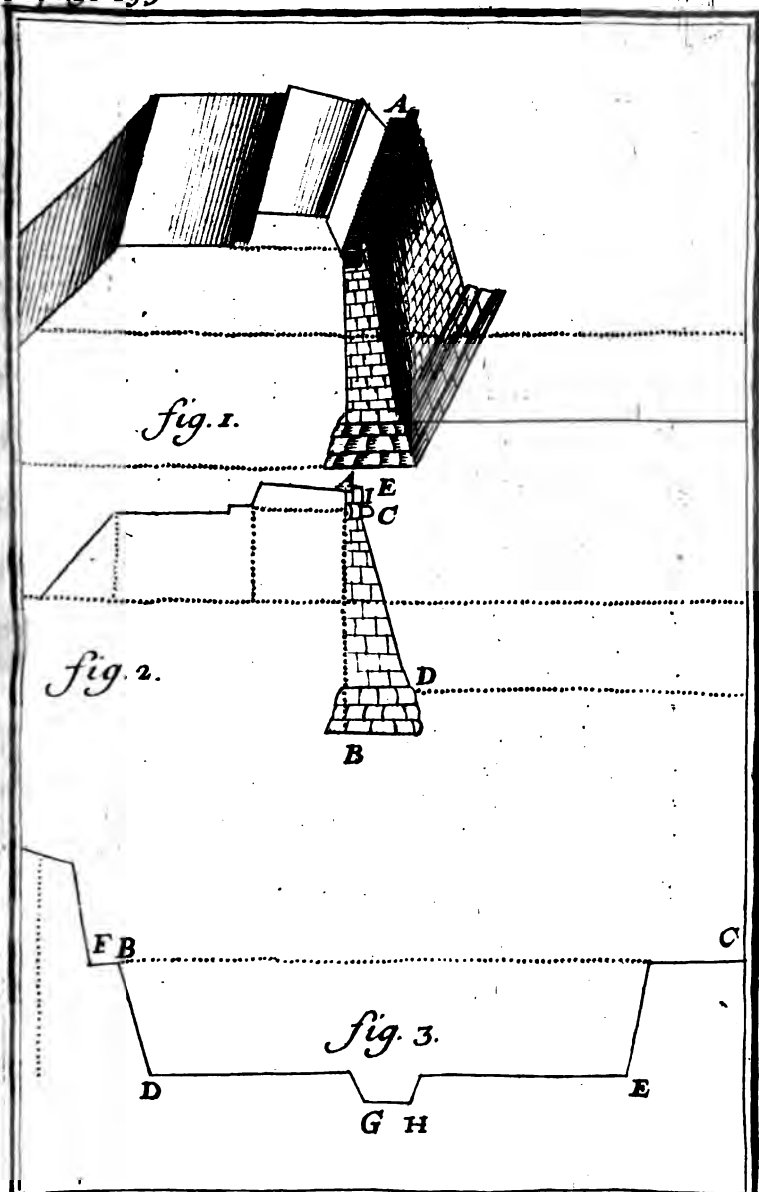
48. Le Foſſé eſt une profondeur qui fait la troiſié enceinte de la Place. Voyez B C, D E. fig.3.

49. Berme relais ou liſiere, & pas de ſouris, ſel quelqu'un, eſt une largeur du terrain que l'on lai entre le foſſé & la muraille: comme F B. fig. 3.

50. Le Foſſé a differente largeur en haut & en ba cauſe des taluds qu'on donne aux deux faces du foſ celle qui eſt oppoſée à l'eſcarpe, & qui s'avance le p dans la campagne eſt appellée contreſcarpe C E. fig

51. La Cuvette eſt un petit foſſé approfondi au m lieu du grand, comme G H, fig.3.

page 135



lan 49.

52. Fauſſe braye, eſt un parapet autour de l'eſcarpe comme A B C D. fig. 1.

53. Le chemin couvert, eſt un eſpace couvert d'un parapet qui regne tout autour du foſſé. Voyez E F, fig. 1, & A B C D. fig. 2.

54. Dans le chemin couvert l'on diſtingue ſa largeur, ſon parapet & ſa banquette, les places d'armes, les traverſes, les eſperons, les coudes & la palliſſade.

55. Eperons du chemin couvert, ſont des petites avances de ſon parapet au dedans du chemin couvert, pour couvrir l'entrée des places d'armes, & le coude eſt un reculement du même parapet pour donner un paſſage dans la place d'armes. E Places d'armes: F, Eperon: G, Coude. fig. 2.

56. Les Traverſes ſont des parapets placez dans le chemin couvert, pour couvrir les places d'armes H, I. fig. 2.

57. Le Glacis eſt la ſurface qui ſe perd depuis le parapet du chemin couvert juſqu'à la campagne ou rez de chauſſée. Voyez G H, fig. 1. L M N, fig. 2.

58. Le Rideau eſt l'eſcarpe un peu élevée d'un petit foſſé qui regne autour du glacis: comme P Q R. fig. 2.

59. Palliſſade, ſont de longs pieux fichez en terre: comme A B C. fig. 3.

60. Dans le Baſtion, outre ſon rempart & le parapet qui regne tout autour, on diſtingue les faces, les flancs, la gorge, les caſemates, l'angle flanqué, l'angle de l'épaule, l'angle du flanc, la capitale, & quelquefois un cavalier & une batterie en barbe; cette batterie a pris ce nom de ce qu'elle raſe par deſſus le parapet du rempart. Les cavaliers ſont des terraſſes élevées au deſſus des baſtions. Voyez la fig. 2. à la lettre O.

fig. 1.

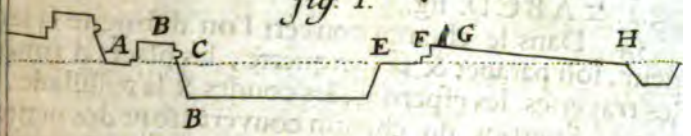
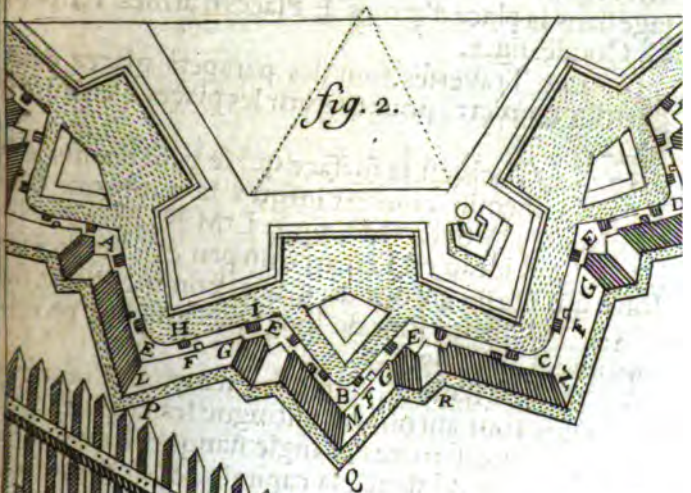


fig. 2.



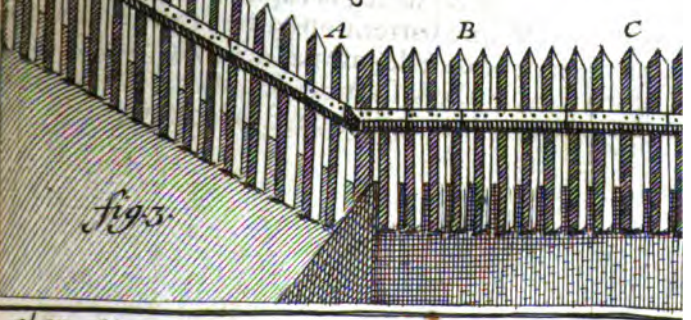


fig 3.

plan. 50.

61. Les faces du baſtion, ſont les deux côtez les plus avancez dans la campagne,& l'Angle qu'elles forment s'appelle l'Angle flanqué : A eſt l'Angle flanqué: A B, A C, ſont les deux faces.

62. Les flancs ſont les côtez qui tombent de la partie la moins avancée des faces ſur la courtine, comme B D, C E.

63. L'Angle de l'épaule, eſt celui que forment l'une des faces & l'un des flancs: comme B ou C.

64. L'Angle du flanc, eſt celui que forment le flanc & la courtine; comme D ou E. Flanquer eſt en terme de fortification la même choſe que défendre.

65. La gorge du baſtion, eſt l'ouverture compriſe, entre les deux Angles du flanc: comme D E.

66. La demi gorge, eſt l'eſpace compris entre le flanc & la capitale, par le prolongement de la courtine : comme D F ou F E ; la capitale eſt F A.

67. Il y a de trois ſortes de flancs, le droit, le retiré, & le ſecond flanc ; le droit eſt celui qui tombe de l'épaule ſur la courtine: comme B D, fig. 1. le flanc retiré eſt celui qui rentre dans la demi gorge,& qui eſt à couvert par la face du baſtion ; comme G H ou I L.

68. Epaule, eſt la portion du flanc droit qui couvre le flanc retiré, lorſqu'il eſt quarré; comme M N. fig. 1, s'il eſt rond on l'appelle orillon ; comme O. fig. 1. Le nom d'épaule ou épaulement ſe donne preſque à toute ſorte de défenſes, ſur tout à des parapets qui couvrent le chemin couvert.

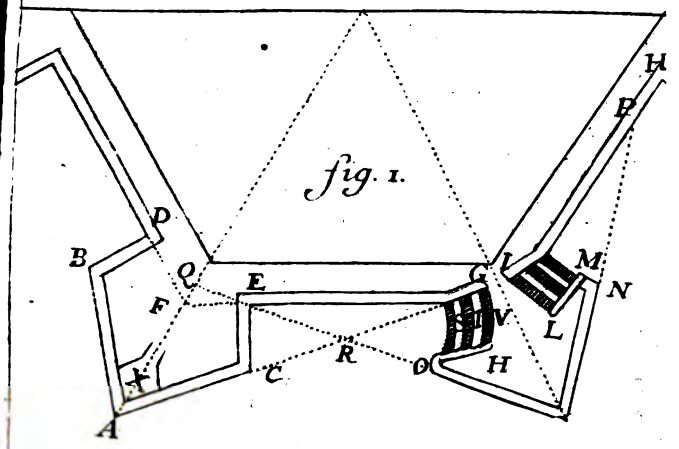


fig. 1.

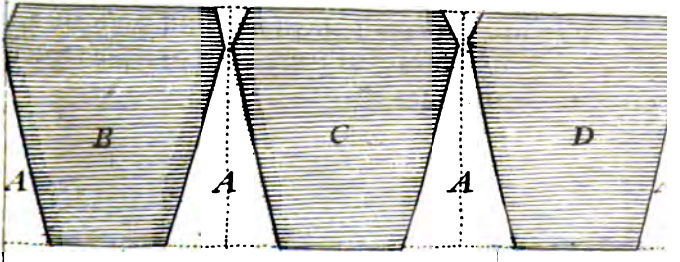


fig. 2.

69. Le ſecond flanc eſt une portion de la courtine, depuis l'Angle du flanc juſqu'au point où la face du baſtion oppoſé étant plongée, rencontre la courtine: comme H, P. fig. 1.

70. Il y a de deux ſortes de demi gorge, la droite & la briſée; la droite eſt priſe ſur le prolongement de la courtine, comme E F: la briſée eſt priſe ſur le prolongement de la face du baſtion opoſé: comme E Q. fig. 1.

71. Courte-ligne de défenſe ou fichante, eſt la ligne de la face prolongée juſqu'au ſecond flanc, c'eſt-à-dire, qui rentre dans la courtine: comme N P. fig. 1.

72. Grande ligne de défenſe ou razante, eſt celle qui eſt faite de la face prolongée juſqu'à l'Angle du flanc, comme O E. fig. 1. l'Angle flanquant ou de tenaille, eſt celui que forment les lignes de défenſe au point de leur rencontre, en prolongeant les faces, cõme O R C.

73. Caſematte, eſt une batterie dans le flanc retiré, comme S T. fig. 1. celle qui eſt ſur le rez de chauſſée, s'appelle place baſſe: comme S, les autres comme T V, s'appellent places hautes.

74. Batterie, eſt une plateforme d'une eſpace ſuffiſant à tenir pluſieurs canons pour tirer; la batterie a ſon parapet, ſes embraſures, & ſes merlons.

75. Embraſure, eſt l'ouverture dans le parapet de la batterie pour y paſſer le canon: comme A. fig. 2.

76. Les merlons ſont des eſpaces ſolides compris entre les embraſures: comm B C D. fig. 2.

77. Batterie en barbe, eſt celle qui eſt faite ſur le rempart du Baſtion à l'Angle flanqué, pour tirer en raſant le parapet: comme X fig. 1. L'on ſe ſert de Gabions, lorſque le terrain ne peut pas ſervir pour le parapet des bateries. Ce mot de Gabions ſera expliqué cy-aprez.

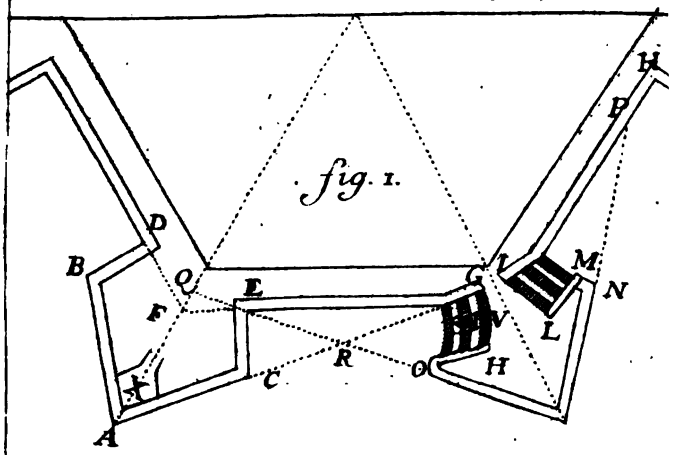


fig. 1.

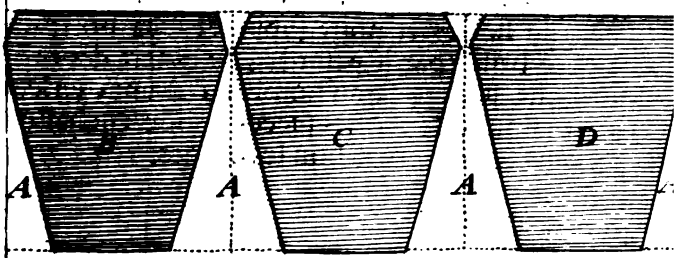


fig. 2.

78. Les dehors ſont des ouvrages détachez de la Place avec leurs Parapet & la plus grande part, leurs foſſez & leurs chemins couverts. Ils prennent leur nom ſuivant leur Figure & leur ſituation. Nous nous contenterons de les déſigner par des lettres: A & B, ſont appellez demi-lunes ou ravelins: C Contregarde ſimple: D contregarde coupée: E Tenaille ſimple: F Tenaille double: G Tenaille de Monſieur de Vauban, qu'il met à la place des fauſſe-brayes: H queuë d'Ironde ſimple: I queuë d'Ironde double: L Bonnet de Prêtre: M ouvrage à corne: N ouvrage couronné: O petites lunettes: P P P ſillons: remarquez que les ſillons prennent toute ſorte de Figures, & qu'ils ne ſont que des Parapets, qui ſont placez au dehors ou à l'entour d'une Place, pour occuper un grand terrain. On ne leur fait point de foſſez. Les Patez, Bonnettes, Redoutes, ſervent pour l'attaque: nous en parlerons bien-tôt.

79. L'on communique à tous ces Ouvrages par des portes, ponts, rempes ou pas de ſouris, par des ouvertures faites dans les Parapets, aux Places d'Armes, & par des portes ſecrettes qui deſcendent de la Place dans le foſſé Q Q ponts.

80. Herſe eſt une eſpece de porte faite avec de gros pieux entaſſez l'un dans l'autre, & ſuſpenduë. Voyez la fig. X. La herſe ſert pour ſuppléer à la porte quand elle a été briſée par le petard: elle differe des orgues, dont nous parlerons au nombre ſuivant, en ce que la herſe eſt faite de groſſes pieces de bois enchaſſées les unes dans les autres, & non les orgues.

81. Orgues, ſont de longues pieces de bois, ſuſpen duës au deſſus d'une porte que l'on laiſſe tomber pa des trous fait exprez dans la voute, lorſque la porte été briſée. Voyez la fig. 1.

82. Baſcule, eſt une porte qui s'ouvre & ſe ferme e trebuchet, par le moyen d'un contre-poids. Voyez l fig. 2.

83. Les Pont-levis ne different preſque point de l Baſcule, ſinon que le contrepoids de la Baſcule eſt e bas, & celui du pont-levis eſt en haut. Voyez la fig. 3.

84. Poterne, eſt une fauſſe porte qu'on fait aupre de l'orillon ou au bas de la courtine; elle ſert aux ſor ties ſecretes. Voyez la quatriéme figure H.

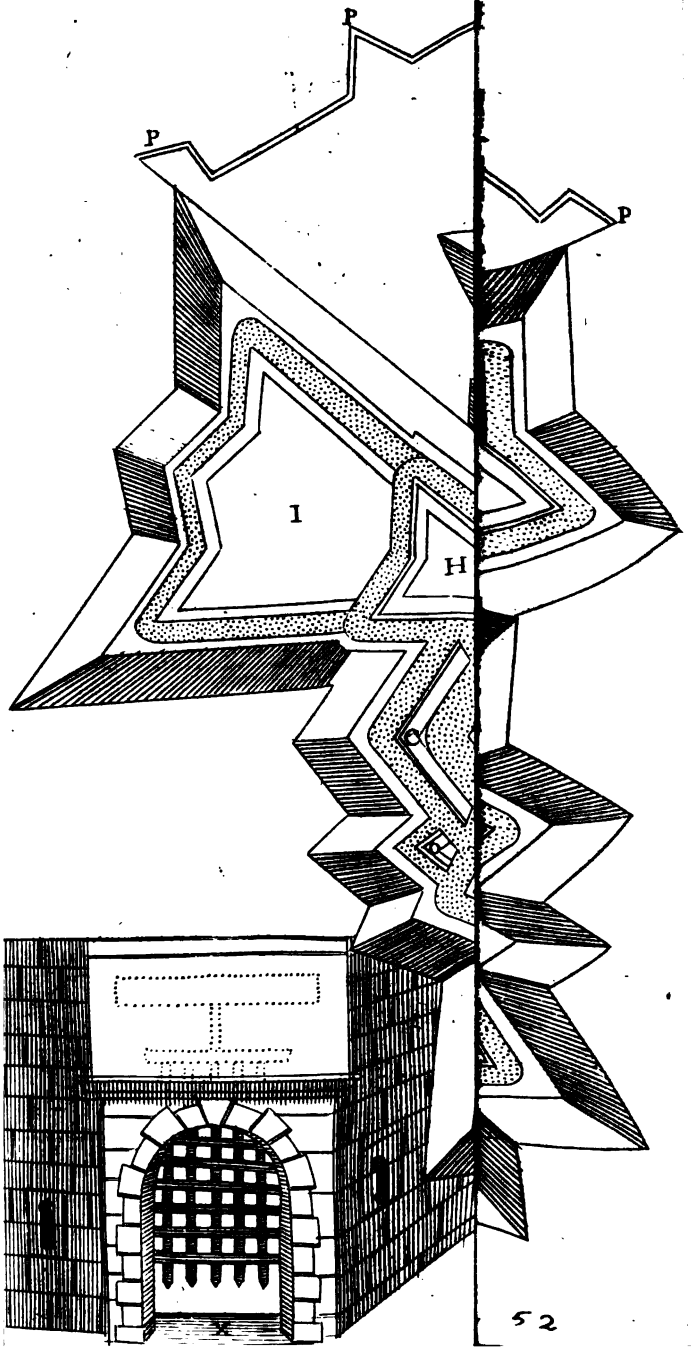
85. Moulinet, eſt une croix de bois qui tourne ſu un pieu, pour empêcher que toute autre choſe que le gens de pied n'y paſſent. Voyez la fig. 5.

86. Barriere, eſt une porte faite avec des planche ſeparées de quelques pouces l'une de l'autre. On le met aux ouvertures faites dans les Parapets & au gla cis: on les ouvre pour les hommes de cheval, & pou les chariots. Voyez la fig. 6.

87. Guerite ou échauguette, eſt un petit logemen en forme de cabinet, poſé ſur l'Angle de quelque ou vrage pour retirer la Sentinelle: l'on en met à tous le Angles. Voyez la fig. 7.

88. Fraiſes, ſont les Palliſſades poſées horiſontale ment, comme le repreſente la fig. 8. On n'en met ord nairement qu'aux Places qui ſont revêtuës de gaſon au même lieu où l'on met le cordon, quand les travau ſont de pierre: on les poſe perpendiculairement a Talud, & on leslaiſſe ſortir de ſix pieds.

89. Co


P
P
P
I
H
G
E
X

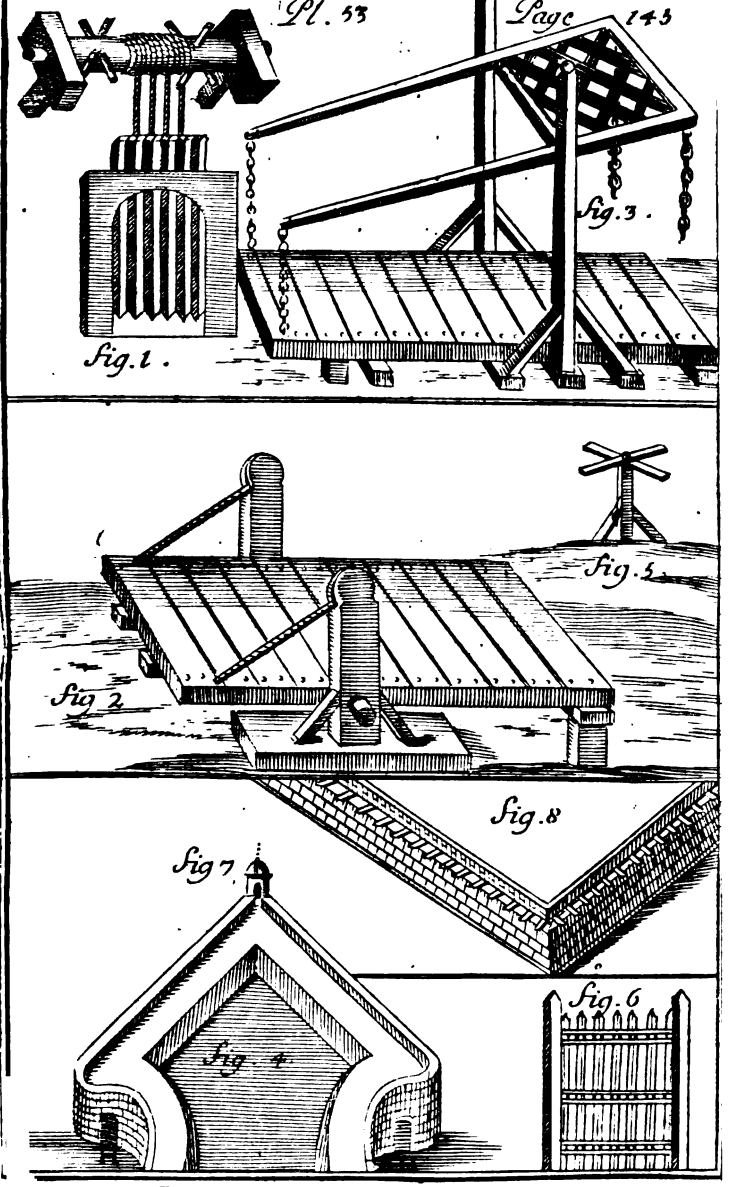


Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig 2
Fig. 8
Fig 7
Fig. 4
Fig. 6

89. Commandement ou lieu qui commande, eſt toute ſorte d'ouvrage plus élevé qu'un autre, comme peut être la Colline A, à l'égard du Baſtion B.

90. Donjeon, eſt un réduit dans le plus fort d'une Place, comme Tour, Château, &c. Voyez A fig. 2.

91. Eſplanade, eſt une terraſſe rehauſſée dans la campagne, on la confond ſouvent avec le glacis du chemin couvert.

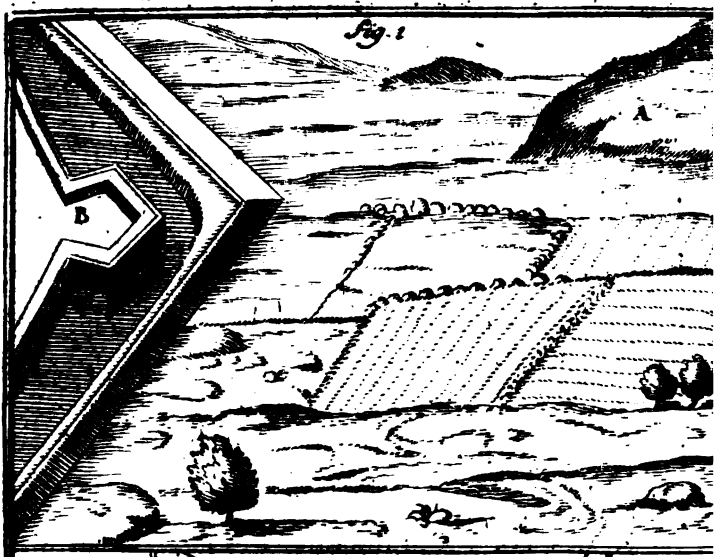
92. Retranchement, eſt une ſeconde fortification au dedans de la premiere pour ſe défendre de nouveau contre l'ennemi qui auroit déja gagné du terrain, voyez B, fig. 2.

93. Poſtes, ſont des lieux avantageux, que l'on deſtine à être gardez par un certain nombre de Cavaliers, ou de Fantaſſins au premier avertiſſement qu'en donne le Commandant.

94. Profil en terme de fortification, eſt un Plan Ortographique qui marque les hauteurs & les largeurs d'une place : nous avons expliqué cy-devant ce que c'étoit qu'un Plan Ortographique au chapitre de la Perſpective.

95. Camp eſt une fortification faite par une Armée en campagne pour s'y arrêter, & pour ſe défendre des ſurpriſes.

96. Blocus eſt l'enceinte d'une forteresſe par l'armée ennemie qui en occupe toutes les avenües pour empêcher toute ſorte de commerce des gens de dehors avec ceux de la Place, que l'on veut contraindre de ſe rendre faute de vivres. Le blocus ſert principalement pour réduire les Places imprenables, ou celles dont on ne veut point ruiner les edifices, mais épargner même les ennemis qui l'occupent.



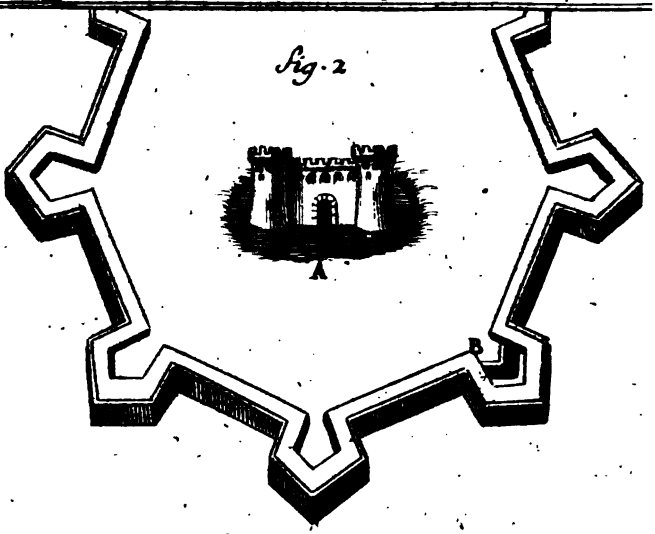


Planche 54. Page 147

97. Siege eſt le campement d'une armée autour des dehors d'une Place, pour l'emporter de force. Il faut diſtinguer dans un Siege les Lignes, les Forts, les Quartiers ou Parcs, les Logemens, les Communications, Tranchées, Boyaux, Crochets, Bateries, Redoutes, Mines, & divers inſtrumens dont on ſe ſert pour former un Siege.

98. Ligne de circonvallation, eſt un foſſé continüé tout autour de la ville ou du camp, & au delà du feu des aſſiegez, pour tenir les aſſiegeans à couvert des ſorties des aſſiegez, ou d'une Armée ennemie qui viendroit les attaquer. Lorſque cette ligne eſt double, la plus éloignée qui renferme le camp & la Ville, s'apelle ſimplement ligne de circonvallation: & celle qui approche de plus prez la Ville, eſt apellée ligne de circontrevallation. AAAA ligne de circonvallation dans la planche ſuivante. BBBB ligne de contrevallation.

99. Les Forts ſont des ouvrages de terre faits dans les lignes, capables de contenir une garniſon de cinq à ſix cens hommes. Ordinairement ces Forts ſont des quarrez fortifiez de quatre Baſtions ou demi-Baſtions, ou Angles ſaillans ou redens. Voyez les figures CCCC. L'on y met encore des Redoutes ou demi-redoutes, des tenailles, des étoiles, des ouvrages à cornes & couronnez, la planche ſuivante, qui eſt en grand volume, repreſentera toutes ces ſortes d'ouvrages.

100. Les Redoutes ſont des quarrez fortifiez d'un bon Parapet, & d'un foſſé autour. Voyez D D.

101. Demi-Redoutes ſont des ouvrages qui preſentent ſeulement un Angle au dehors, & qui repreſentent la moitié d'une Redoute. Voyez E E E. Elles ſervent principalement aux Angles des lignes de circonvallation & contrevallation.

102. Lignes de communication ſont des foſſez qui communiquent à tous les ouvrages du Camp.

103. Parcs, ſont des endroits bien fortifiez où l'on retire l'Artillerie & les vivres. Celui où l'on retire l'Artillerie, eſt apellé le Parc d'Artillerie, celui où l'on retire les vivres Parc, ou quartier des vivres.

104. Quartiers ſimplement, ſont des lieux fortifiez pour tenir les Troupes & leurs logemens: ſavoir, les Officiers dans leurs tentes, & les Soldats dans leurs huttes ou baraques.

105. Tranchée, eſt une ouverture de terre qui ſe fait depuis le Camp des aſſiegeans, juſqu'au Glacis de la Place aſſiegée. La tête eſt proche de la place, & la queuë du côté des aſſiegeans. La Tranchée eſt auſſi un foſſé fortifié d'un parapet. Voyez F F F.

106. Boyaux de la Tranchée, ſont les differentes lignes qui ſont dans la tranchée, formans divers Angles que l'on fortifie de bonnes Redoutes. Voyez dans la planche G G G G.

107. Les Coudes de la Tranchée, ſont les retours des Boyaux.

108. Crochets, ſont des retraites faites dans la Tranchée de vingt à trente toiſes, pour faciliter la retraitte des Soldats. Voyez H.

109. Les Batteries de la Tranchée, ſont des plattes formes qui communiquent à la Tranchée par leurs foſſez, ſur leſquels l'on place le canon qui doit ruiner la place. Ces Batteries ont leurs embraſures & leurs merlons. A un des côtez ou derriere la batterie on fait un magaſin pour les poudres & autres munitions. Ce magaſin eſt creuſé en terre, & bien couvert de bonnes planches chargées de terre, particulierement l'endroit où l'on met les poudres. Voyez dans la planche I I I.

Il y a des Batteries enterrées & creuſées en terre à la profondeur de trois pieds, dont les embraſures ſont auſſi creuſées dans la terre ferme ; auquel cas l'on met tout autour & ſur les merlons des gabions ou parapets à l'épreuve, afin que ceux de la place ne puiſſent découvrir dedans. Ces Batteries ſont appellées Batteries baſſes.

Les Mortiers ont auſſi leurs batteries qui doivent être placées proche de la place, afin que les bombes ne paſſent que le moins qu'on pourra par deſſus les travaux, de peur que ſi quelqu'une venoit à crever en l'air ou tomber, elle n'incommode ceux qui ſe trouveroient logez dans les travaux. L'on ne met aucune embraſure au parapet des batteries à mortier : parce que le mortier tire ordinairement ou à 45 degrez d'élevation, ou au deſſus.

Il y a encore des platteformes qui prennent differens noms, comme de patez, de fers à cheval, de bonnettes & autres ayant un parapet à l'épreuve. Ces platteformes doivent être defendües de la place, & ne ſervent qu'aux aſſiegez.

110. Les Ponts de communication ſont faits avec des bâteaux liez enſemble avec des fortes poutres, & bien arrêtez contre le courant de l'eau. Ces ponts doivent être bien fortifiez, lorſqu'on en a beſoin pour communiquer dans les ouvrages. Pour empêcher que l'ennemi ne vienne rompre ces ponts de communication, ou les brûler par le moyen des feux d'artifices qu'ils pourroient faire deſcendre dans des bâteaux deſtinez à cet uſage, on met un peu au deſſus du pont une groſſe chaîne tenduë d'un bord de la riviere à l'autre, & ſoûtenuë à fleur d'eau par pluſieurs groſſes poutres auſquelles elle ſera attachée.

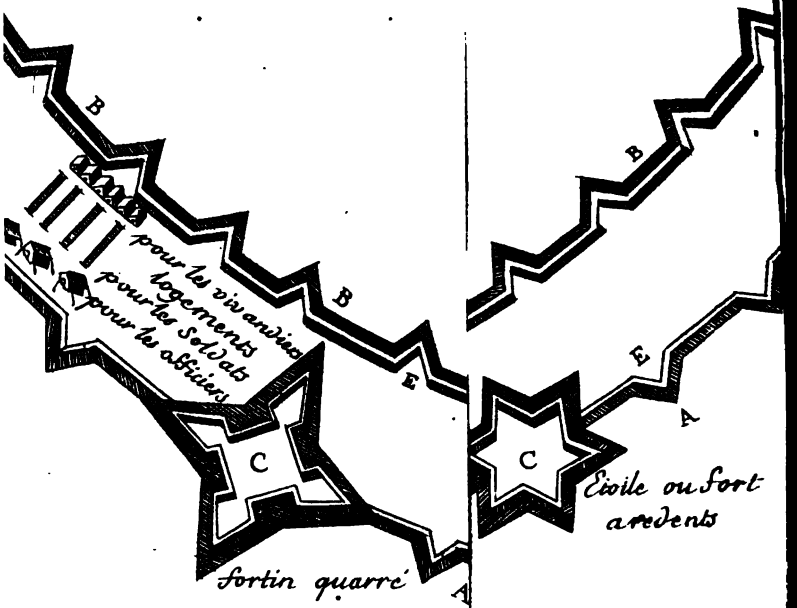
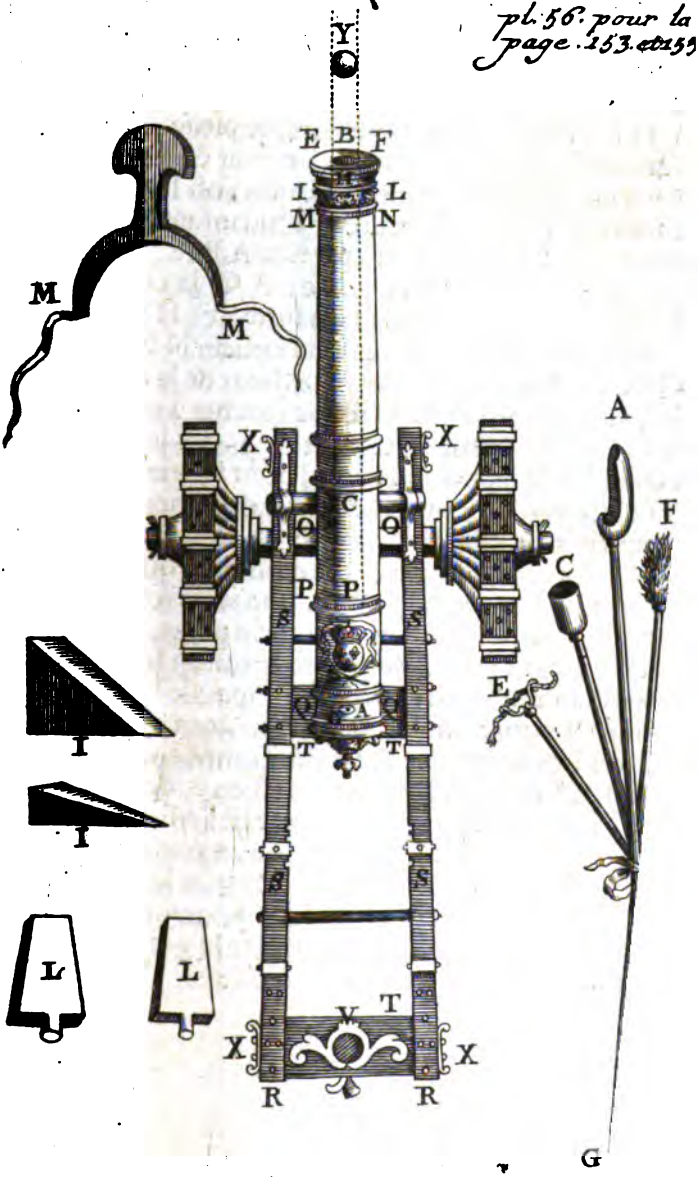


Planche 55. Page 151

111. Les Inſtrumens dont on ſe ſert dans l'Art Militaire ſont, premierement les armes à feu, les feux d'artifices, & pluſieurs autres dont nous donnerons les definitions.

112. Le Canon eſt une longue piece de fonte creuſée par le dedans, qui ſert à ruiner & demolir toutes ſortes d'ouvrages, contre leſquels l'on le tire. Tout le monde ſçait aſſez ſa figure; cependant nous la mettons ici, & en deſignerons les parties, A B le noyau ou l'ame du Canon: C B la volée: A C la culaſſe: E F la bouche & ſon diametre: G la lumiere: H le bourlet: I L le collet: M M l'aſtragale du collet: N N le renfort: O O les Tourillons: P P l'épaiſſeur de la culaſſe: Q Q la plattebande, & la place de l'archet à couvrir la lumiere: R R l'affût du Canon: S S, S S les flaſques de l'affût: T T T les entretoiſes, dont la premiere qui eſt à l'extremité ſert à tirer le canon, en y mettant l'avant-train au jour, V la ſeconde qui eſt au milieu ſert à ſupporter les coins de mire: & la troiſiéme qui eſt à l'autre extremité, empêche que le canon ne ſe renverſe entierement en bas. Elles ont un ſecond uſage, qui eſt de lier les flaſques. Outre les entre-toiſes, l'on lie les flaſques de trois branches de fer, que l'on appelle boulons, & de pluſieurs bandes de fer couchées tout au long & en travers, pour aſſurer l'affût & l'empêcher de ſe rompre. L'affût eſt ſoûtenu d'un eſſieu & de deux roües, dont la figure eſt ici: l'extremité de l'eſſieu s'appelle le muſeau. X X X X, les crochets de retraitte. Les roües ſont garnies de la maniere que la figure le repreſente: Y marque le boulet, comme il ſort du canon. Le boulet ne doit pas être juſte de calibre avec la gorge du canon, pour être plus facile à être mis dedans.

pl. 56. pour la page. 153. etc.



113. Les utencils du Canon, ſont A B la lanterne ou chargeoir : C D le fouloir ; E le boutefeu : F G l'écouvillon : L L les coins de mire : M M les fronteaux de mire.

114. Les Canons ordinaires portent des boulets depuis 36. livres juſqu'à 24.

115. La Coulevrine eſt la ſeconde piece dont on ſe ſert ; ſa difference d'avec le Canon eſt, qu'elle porte moins peſant de bale : cependant elle eſt plus longue, ſes parties ſont les mêmes qu'au Canon.

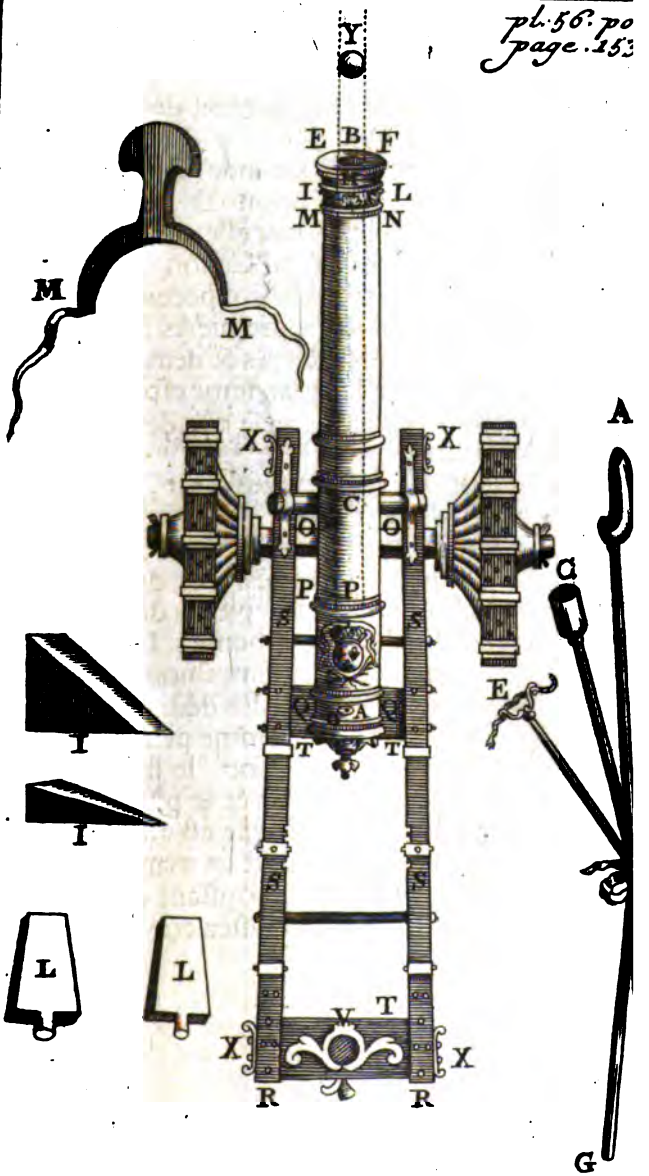
116. La batarde eſt la troiſiéme eſpece ; elle eſt beaucoup plus petite que les deux premieres, ſon boulet peſe environ ſix livres ou ſix livres & demie.

117. La moyenne eſt la quatriéme eſpece, encore plus petite, dont le boulet ne peſe que deux livres ou deux livres & demie.

117. Le Faucon eſt encore plus petit, ſa bale peſe approchant une livre.

119. Le Fauconneau eſt un diminutif du faucon ; ſa bale eſt de treize à quatorze onces. Ces dernieres pieces ſont ordinairement appellées pieces de campagne, parce qu'elles ſont faciles à être menées. Leurs parties & leurs utenſils prennent les mêmes noms que celles du Canon que nous avons cy-deſſus déduites.

120. Les Armes à feu qu'un homme peut facilement porter, ſont les arquebuſes à croc, le mouſquet, le fuſil, la carabine, le mouſqueton & le piſtolet. L'Arquebuſe à croc eſt la plus groſſe, elle eſt ainſi appellée, à cauſe d'un morceau de fer qui eſt en maniere de croc pour l'arrêter, crainte qu'en repouſſant elle ne bleſſe celui qui la tire, les autres ſont aſſez connus par leur figure.


Y
E
B
F
I
L
M
N
M
M
X
X
C
O
O
P
P
S
S
A
T
T
I
I
L
L
T
V
X
X
R
R
A
G
E

121. Le Mortier, outre les pieces que nous venons de dire, eſt un des plus en uſage pour tout ruiner & briſer, ſa figure & ſes parties le diſtingueront mieux qu'aucune definition. Il y en a que l'on met ſur des affuts plus courts que ceux dont nous avons fait la deſcription ; la figure eſt un peu differente. Voyez la 1. figure de la planche ſuivante, les autres ſe placent ſur une plaque, fig. 2. Ses parties ſont A B la longueur : A C l'ame ou noyau : C D profondeur de la gorge : E F largeur ou diametre de la gorge : D I G H la chambre : Y X diametre du premier renfort appellé ventre : O V diametre du ſecond renfort : I Z la lumiere : P R la longueur de la plaque : P Q ſon épaiſſeur : R S la hauteur de la piece en dehors : L M la bombe dans le mortier : N T ſa fuſée.

122. La Bombe eſt comme la bale du Mortier, elle eſt de fer, toute ronde & creuſe en dedans ; elle a deux anſes pour la porter : on la charge de poudre & de feux d'artifices, & l'on met ſur la lumiere une fuſée ; elle a pour le moins un pied de diametre. Voyez la fig. 3. A B eſt ſon diametre : E I H E ſon goulet : C D ſa plus grande épaiſſeur : E F ſa moindre : C L la fuſée avec ſon canal.

123. Le Perrier a preſque la même figure du Mortier, il eſt un peu plus long, & ſon uſage eſt de vomir continuellement des pierres & cailloux ; ſa portée eſt beaucoup moindre que celle du mortier, ſon plus grand uſage eſt pour les aſſiegez contre les aſſiegeans. On le fait plûtôt de fer que de fonte, & le diametre du calibre eſt tantôt plus grand, & tantôt plus petit : il ſe tire facilement de haut en bas. On y met auſſi des globes de pierre de la groſſeur du calibre, mais moins frequemment.

Pl. 57

Page 157 et 159

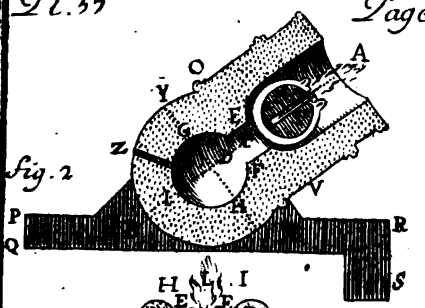


Fig. 2

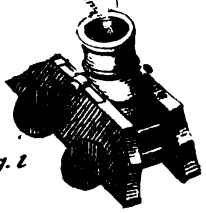


Fig. 1

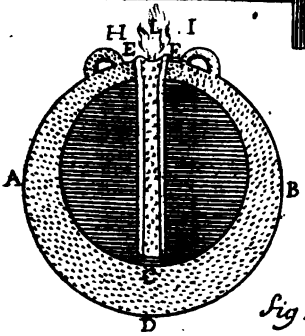


Fig. 3

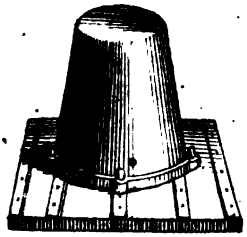


Fig. 4

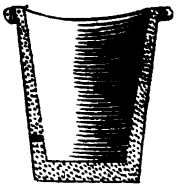


Fig. 5

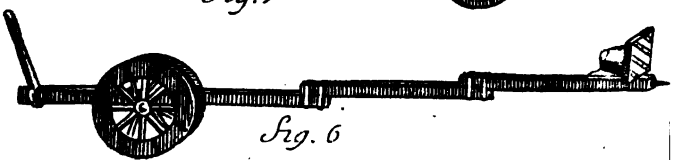


Fig. 6

124. Le Petard eſt une autre piéce d'Artillerie faite en forme de pain de ſucre pour enfoncer toutes ſortes de portes, pont-levis, barricades, &c. Voyez les figures dans la planche precedente 4. 5 6.

125. Le Boulet eſt une maſſe de fonte, de fer, toute ronde, dont on ſe ſert pour les ſix eſpeces de pieces d'Artilleries, dont nous avons parlé cy-deſſus. Chaque boulet doit être proportionné à la piéce. L'on en diſtingue de pluſieurs ſortes, qui ſont les ſuivantes.

126. Les Boulets longs & creux, à l'extremité deſquels l'on met une méche pour mettre le feu dans la chambre du boulet, qui étant enterré fait beaucoup plus d'effet venant à crever.

127. Les Boulets à branche qui ſont joints par une petite barre de fer, longue de 5 à 6 pouces.

128. Les Boulets à deux têtes ou Ange, ſont des moitiez jointes enſemble par une chaine.

129. Le Boulet rouge que l'on fait rougir au feu avant que de le mettre au canon pour le tirer.

130. La bale ramée eſt compoſée de deux bales jointes par un fil darchal.

131. Les Cartouches qui ſont des rouleaux de carton ou de papier à contenir une charge de poudre, & au bout une bale de mouſquet ou de piſtolet : mais les cartouches à canons, ſont des boëtes de fer blanc, hautes de demi-pied, & proportionnées au calibre du canon, toutes chargées de bales, pour être tirées ſur une multitude de ſoldats. Nous ne donnerons ici aucune figure, parce qu'il eſt facile de concevoir tout ce que nous venons de dire, pour peu d'attention que l'on y apporte. Remarquez qu'en terme de Marine, la cartouche s'appelle gargouche.

Pl. 57 Page 157 et 159

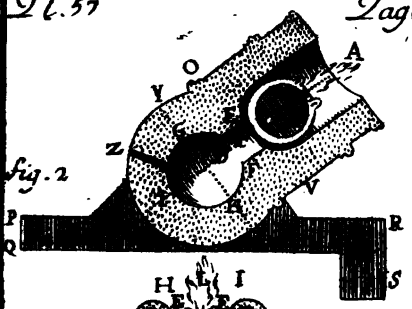


Fig. 2

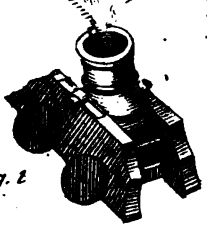


Fig. 1

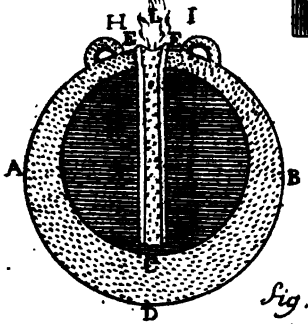
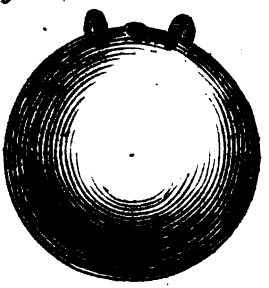


Fig. 3



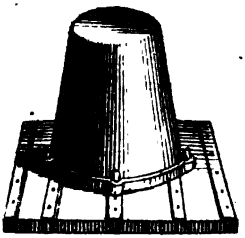
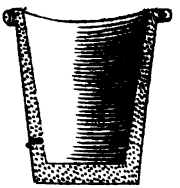


Fig. 4



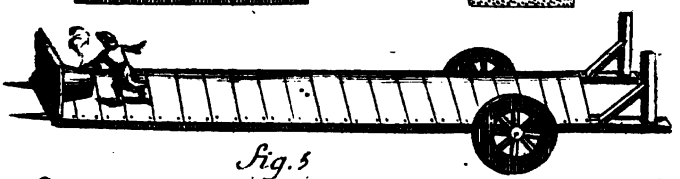


Fig. 5

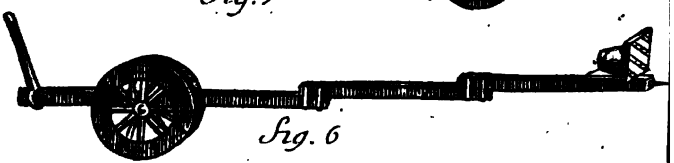


Fig. 6

132. La Bombe ſert au Mortier, comme nous avons déja dit cy-deſſus: mais la Grenade ſe jette à la main. Les Grenades ſont faites de matiere fragile, le plus ſouvent de fonte, de fer ou de fer blanc ou de verre ou de carton; elles gardent la figure ronde, & elles ſont creuſes, pour être chargées d'une compoſition exprés de poudre, &c. & on y met le feu par une petite fuſée. La planche ſuivante vous en repreſente de pluſieurs ſortes.

133. La Carcaſſe a deux cercles de fer qui ſe croiſent en maniere d'ovale, au milieu deſquelles l'on met une bombe, & autour un ſac de toile godronné, rempli d'étoupes huilées, & godronnées de grenades, de canons de piſtolet, chargez de feu d'artifices: elle ſe jette comme la bombe.

134. Il y a encore une infinité de ſemblables boules d'artifices, comme les bales, le pot à feu, les dards & flambeaux, barils à feu, cercles, fagots ardans & generalement de toutes ſortes de figures. La planche ſuivante en repreſentera de beaucoup de manieres, & leurs noms en même temps, ce qui ſera plus facile à connoître par la figure que par des definitions; il faut ſeulement remarquer que toutes ces ſortes d'inſtrumens ont leur mixtion particuliere, dont nous ne parlons point de peur de ſortir du deſſein que nous nous ſommes propoſé.

135. La fougade ou fougaſſe, eſt de grande utilité pour nuire beaucoup, c'eſt un petit fourneau que l'on diſpoſe à faire ſon effet lorſque l'ennemi eſt deſſus. Ce fourneau ſe remplit de poudre & autres mixtions ſemblables. Le caiſſon des bombes eſt preſque ſemblable à la fougade: c'eſt un petit coffre rempli de poudre ou de bombes, propre à être enterré en peu de temps. On y met le feu par le moyen d'une ſauciſſe dont nous parlerons cy-aprez.

UNIV. OF MICH.

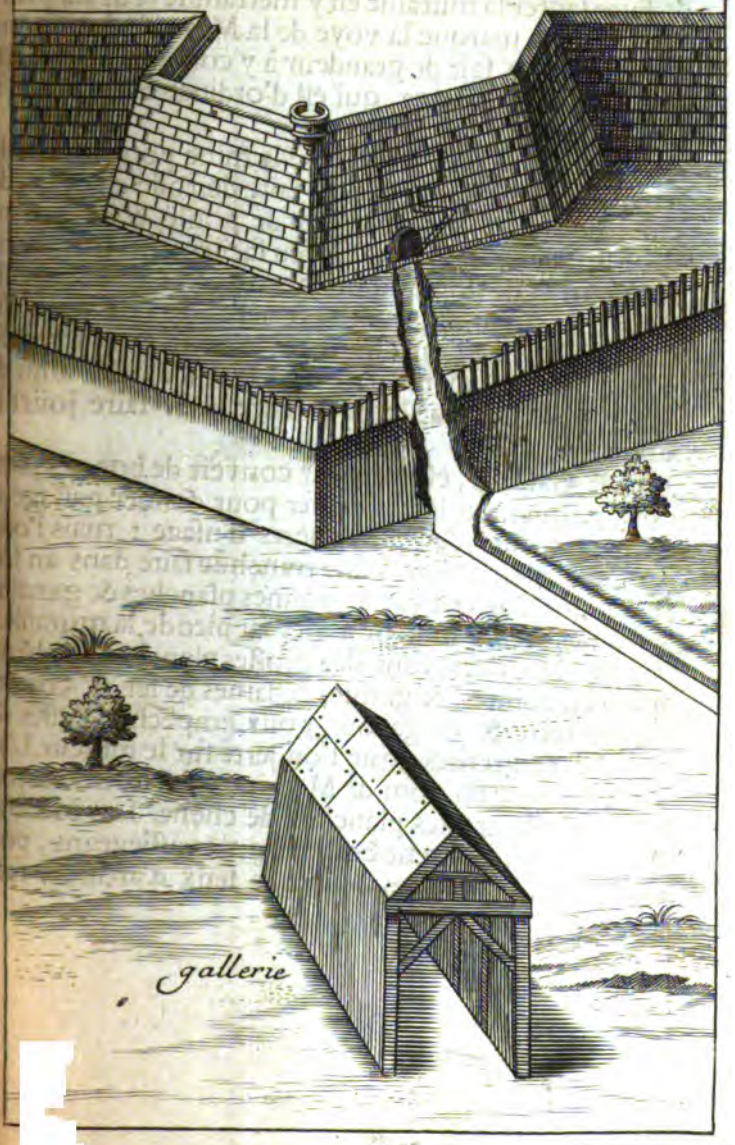
136. La Mine est une ouverture faite dans la f d'un Bastion ou ailleurs, pour y mettre de la poudre & faire sauter la muraille en y mettant le feu. La plan che suivante marque la voye de la Mine, & les cham bres que l'on fait de grandeur à y contenir la poudre que l'on veut mettre, qui est d'ordinaire de 1 [illegible] 2000. livres de poudre.

137. Saucisse, est la fusée de la mine pour mettre l feu dans les poudres ; elle est faite de toile cirée ou d cuir, de la grosseur d'un œuf de poule, & de la gran deur suffisante à y mettre le feu facilement. Ce cuir e tout rempli de poudre; l'on met un bout de la Saucis dans les barils de poudre, & à l'autre l'on y attach une mêche, que l'on allume par le bout, & qui venan à être brûlée, met le feu dans la saucisse, & ainsi d suitte dans les barils de poudre pour faire joüer l mine.

138. Gallerie, est un pont couvert de bonnes plan ches garnies de lames de fer pour donner passage a Mineur ; elle n'est plus gueres d'usage : mais l'on donné le même nom à une tranchée faite dans un fos sé sec, que l'on couvre de bonnes planches & gazons pour faciliter le mineur à aller au pied de la muraille.

139. Madriers, sont des grosses planches de chêne mises en pointes, & garnies de lames de fer, & couver tes de terre & de gazon, pour empêcher l'effet d bombes & grenades, que l'on jette sur le mineur. L' apelle encore du nom de Madriers generalement to tes sortes de grosses planches de chêne. Les Madri de cette sorte servent beaucoup aux assiegeans, po resister aux grenades & autres feux d'artifices se blables.

planche. 59. page. 163



140. Les Mantelets ſont des Parapets de groſſes planches de chêne, poſées ſur des rouës, pour garantir ceux qui travaillent à la tranchée. Voyez la figure cy-aprés.

141. Gabions ſont des pieux poſés en terre en forme de tonneau : on les remplit de terre pour défendre les batteries, & ils forment par leurs ſituations les embraſures neceſſaires aux canons. Voyez la fig. 2.

142. Faſcines ſont des petits fagots que l'on lie, & que l'on garnit de terre, pour former des parapets ou pour faciliter des paſſages. Voyez la figure 3.

143. Le cheval de friſe, eſt une poutre garnie de pointe de fer ou de pieux ferrez, pour empêcher l'abord de l'ennemi. Voyez la Fig. 4.

144. Chauſſetrapes ſont des fers à 4. pointes, placées de telle ſorte, qu'en tout ſens il y en a une en haut. Voyez la fig. 5.

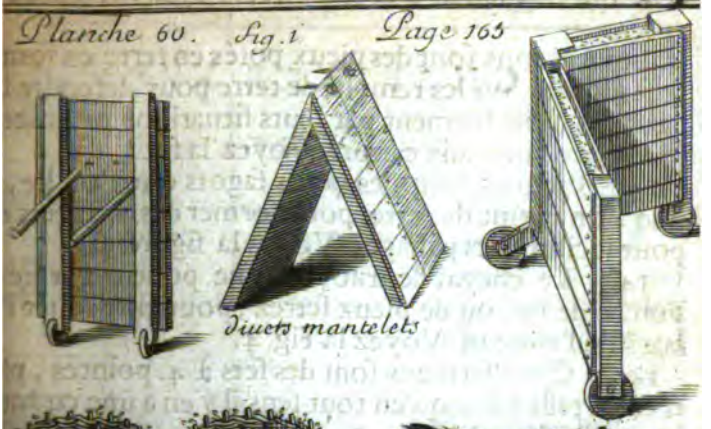
145. Caſcanes, ſont des puits faits pour eventer la mine.

146. Blinde, eſt un eſpece de brancart fait de quatre pieces de bois, que l'on remplit de planches, faſcines, terre, &c. pour couvrir les tranchées.

147. Chandelier, eſt une machine faite de pieux propres à ſoûtenir des faſcines. Voyez la fig. 6.

Voila au ſujet des Fortifications tout ce que j'ai crû neceſſaire pour en donner l'idée, qu'un jeune Gentilhomme doit en avoir avant que de ſavoir les meſures & la maniere de les conſtruire : ce que nous reſervons cy-aprez, lorſque nous donnerons un traitté entier de l'Art de fortifier, ſuivant la methode des plus recens qui en ont écrit.

Planche 60. Fig. 1 Page 163



Diuers mantelets

Fig. 2 Gabions

Fig 3 fascines

Fig. 5

Fig. 4 Cheual de Frize

Fig. 6

chandelier

CHAPITRE XV.

Des Mecaniques.

1. LEs Mecaniques ſont les Sciences qui conſideren les principes des Arts pour en tirer quelque avan tage pour leurs avancemens. Elles conſiderent princi palement les poids & machines qui ſervent à élever o mouvoir des fardeaux extraordinaires. Voici les défi nitions que nous avons jugé neceſſaires, pour avoi quelque idée de ces Sciences.

2. Peſanteur ou poids, eſt une force ou puiſſance qu pouſſe de haut en bas. Ce mot de puiſſance a été défi ni ci-deſſus ; de ſorte que ſuivant cette définition, l cauſe qui fait mouvoir A de haut en bas vers B, s'ap pelle poids ou peſanteur. Voyez la fig. 1.

3. Deux poids ſont en équilibre, dont les forces ſont égales pour deſcendre. Ainſi le baſſin A, eſt en équili bre avec le baſſin B, puiſque A & B ont égales force pour deſcendre. Voyez la fig. 2.

4. Le centre de peſanteur eſt un point, autour duque toutes les parties d'un corps ſont en équilibre : c'eſ pourquoi le point A du même poids A, eſt le centr de ſa peſanteur, parce que s'il eſt ſuſpendu par le poin A, toutes les parties comme B & C, deſcendront éga lement, & ſe tiendront en équilibre. Voyez la fig. 3.

5. Le point de ſuſpenſion, eſt celui par lequel un poid eſt empêché de deſcendre, comme A du Cilindre B C ſuſpendu par le filet A D. Voyez la fig. 4.

6. Ligne de direction, eſt celle que décrit le centr de peſanteur en tombant perpendiculairement. Voye A B, fig. 1.

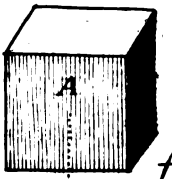


fig 1

B

fig. 2.

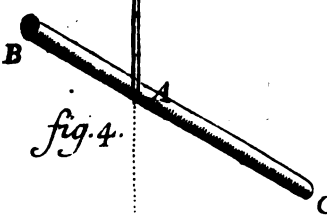


fig. 4.

fig. 3.

tan. 61.

7. Poids inégaux, ſont ceux dont les forces ſont inégales pour deſcendre ; ainſi le poid A eſt plus peſant que le poids B, parce que A a plus de force pour deſcendre que B n'en a pas. Voyez la fig. 1.

8. Pluſieurs poids attachez ou unis, agiſſent comme ſi c'étoit un ſeul poids. Ainſi pluſieurs poids mis dans la balance A, doivent l'emporter ſur la balance B fig. 2.

9. Les corps durs & ſolides, ſont ici appellez ceux dont toutes les parties ſont unies & en repos : de ſorte que ſi un corps étant ſuſpendu par le centre de ſon poids, ſes parties demeurent en repos & en équilibre, autour de leur centre, ce corps ſera appellé dur & ſolide : au contraire les liquides ſeront ceux dont les parties ſe détacheront, & ſe ſepareront en cas de ſuſpenſion. A, fig. 3. marque un corps ſolide, & B un corps liquide.

10. Verge ou levier, eſt une ligne que l'on conçoit parfaitement ſolide & inflexible, quelque force que l'on lui aplique pour la deſunir ou la fléchir. Par exemple la ligne A B, ſi l'on conçoit que ce mouvant de B en C, pour peſant que ſoit le corps D, qui reſiſte au mouvement de A, elle ne ſe plie point du tout, fig. 4.

11. Le point d'arrêt, eſt celui dans une verge, auquel l'on conçoit être la reſiſtance des poids, comme A dans la verge B C. A l'égard des poids X & Z, qui reſiſtent dans leur mouvement. Voyez la fig. 5. car la verge B C étant inflexible, & le point A poſé ſur le coin D, la verge eſt totalement arrêtée par le point A, quelque effort que faſſent les poids X & Z, pour faire deſcendre la verge B C. Quoiqu'il n'y ait point de corps inflexible à l'égard d'un plus fort, ou d'un poids extraordinaire, l'on ſuppoſe ici que le levier ſoit veritablement inflexible, parce que dans la pratique l'on n'en employe pas d'autre à l'égard des forces qu'on leur applique.

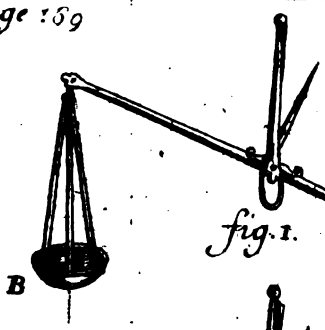


fig. 1.

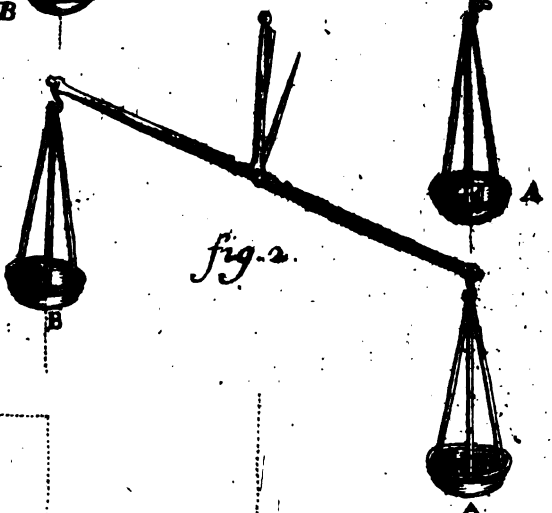


fig. 2.

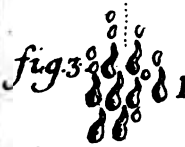


fig. 3.

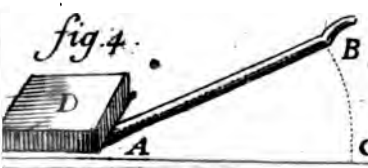


fig. 4.

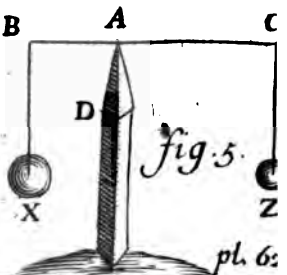
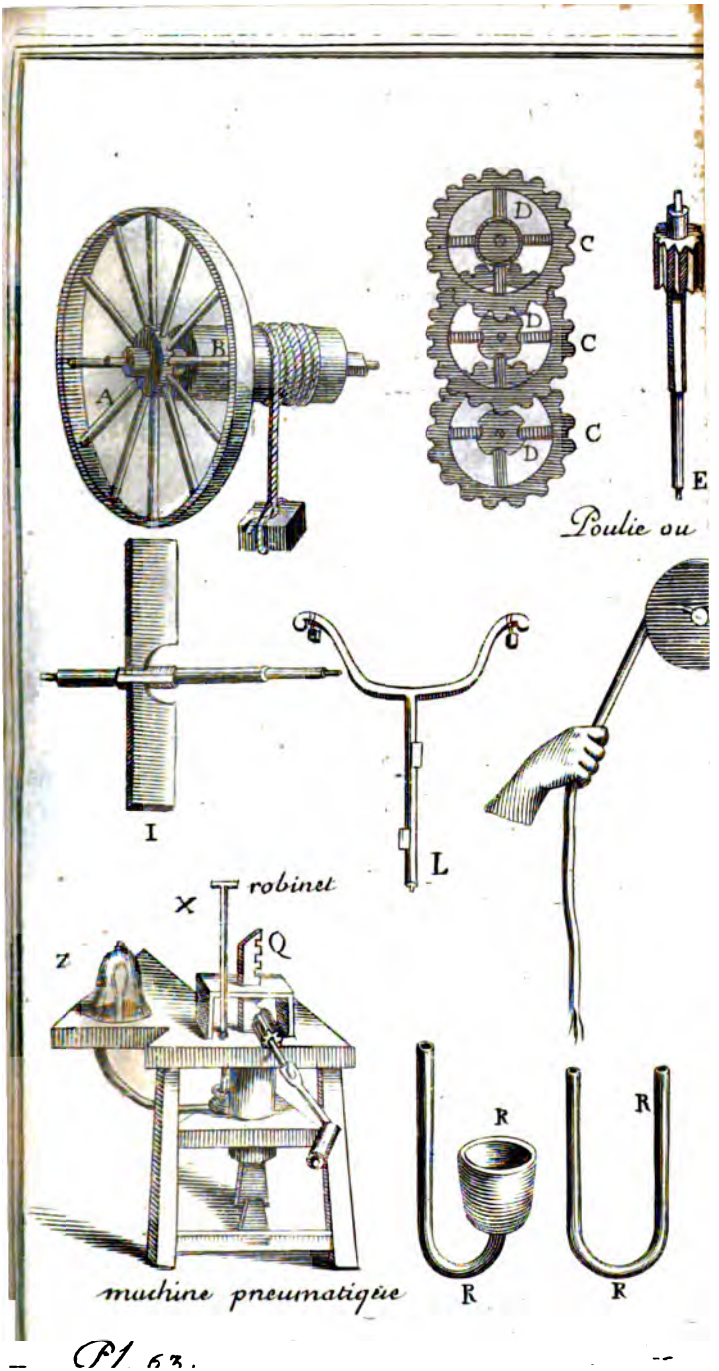


fig. 5.

pl. 6

12. Les poids & les distances du point d'arrêt sont reciproques lorsque le plus grand poids est au plus petit, ce que la plus grande distance est à la plus petite. Par exemple, si le poids X est au poids Z, le double, & que la distance de C A soit le double de la distance de B A, les poids X & Z, & les distance C A, D A, du point d'arrêt A, sont reciproques. Voyez le fig. 5. cy-devant.

13. Les noms que l'on donne aux differens instrumens dont on se sert pour faciliter les mouvemens, seront ici désignez par lettres alphabetiques, & par leurs figures dans la planche suivante. A, Roüe ou tour: B fusée, autour de laquelle la corde se vuide: C C C, Tympans ou roües à dents: D, D, leurs pignons: E E sont des Pignons representez, attachez à leurs arbres: F, F, G G, sont appellez lanternes: X X des étoilles: H Manivelle ou torniquet: I Volet: L Balancier: H Pendule: I Poulie ou Monfle: L Gruë ou Guindax: M Coin: N Viz: O son écroüe: P Viz sans fin: Q Cris: R R R R differentes sortes de Siphons: S Tube simple: T Syringue: V Pompe: X Robinet: Z machine pneumatique. Par le moyen de ces instrumens multipliez & bien combinez par ordre les uns avec les autres, il n'y a mouvement & mesure de temps dont on ne vienne facilement à bout. Nous en parlerons amplement lorsque nous découvrirons les principes de ces sortes de Sciences.


A
B
D
C
D
C
D
C
E
Poulie ou
I
L
robinet
X
Z
Q
R
R
R
R
machine pneumatique

Pl 63.

CHAPITRE XVI.

De la Cosmographie en general.

1. LA Cosmographie est la Science qui considere la situation, la grandeur, les mouvemens & les differentes proportions de tout l'Univers.

2. Celle qui represente la differente situation des parties de l'Univers, peut être appellée simplement Cosmographie. Et celle qui en considere les mouvemens, leur grandeur & leur mesure, si elle ne comprend que les Cieux & les Astres, on la nomme astronomie; mais celle qui s'occupe seulement à considerer les differentes situations & parties de la terre, se nomme Geographie.

3. La Cosmographie simplement est ou naturelle ou artificielle: la naturelle considere les parties de l'Univers telles qu'elles sont veritablement dans leur ordre & leur situation naturelle; l'artificielle au contraire imagine plusieurs points, cercles & lignes, afin de rendre plus facilement raison des effets que l'on remarque dans la nature, par raport aux Mathematiques; parce que les autres considerations appartiennent aux Physiciens.

4. La Cosmographie naturelle ne peut être que d'une sorte: mais les Savans ne s'accordent pas dans la situation des parties du Monde. Nous expliquerons les differentes suppositions ou systemes des plus habiles, afin de mieux distinguer ce que nous en dirons ailleurs. L'artificielle se nomme ordinairement la Science de la Sphere, nous traiterons de l'une & de l'autre dans des Chapitres differens. Nous traiterons ensuite de l'Astronomie, de la Geographie, & en dernier lieu de la Gnomonique, & parce que dans l'Astronomie, l'on considere deux choses differentes, qui sont le mouvement & le temps, nous diviserons en-

core ce traité en deux, ſçavoir l'Aſtronomie par rapport aux mouvemens & meſures: & par rapport aux Temps que l'on appelle du nom de Cronographie.

CHAPITRE XVII.

De la Coſmographie naturelle.

1. SYſteme eſt une maniere de ranger ou de marquer la ſituation de toutes les parties de l'Univers.

2. Les parties de l'Univers ſont, la terre & l'eau, qui enſemble ne ſont qu'un même globe (ce que nous démontrerons ailleurs,) l'Air, la Sphere du feu, les ſept Planetes, le Firmament & les Etoiles fixes, & quelques Cieux au deſſus.

3. L'Air ſe partage en trois Regions, la baſſe, la moyenne & la ſuprême. La baſſe Region eſt renfermée entre la Terre & les Nuës; la moyenne dans tout l'eſpace que contiennent les nuës; & la ſupreme depuis les nuës juſqu'à ſa derniere ſuperficie.

4. Les ſept Planettes ſont, la lune, Mercure, Venus, le Soleil, Mars, Jupiter & Saturne. On les déſigne par les caracteres ſuivans, la Lune ☾ Mercure ☿, Venus ♀ le Soleil ☀ Mars ♂ Jupiter ♃ Saturne ♄.

5. Les Etoiles ſont innombrables, ſi l'on veut conter toutes celles que les inſtrumens nous découvrent; mais de celles que la vûë ſimple nous fait remarquer, l'on en conte 1022.

6. Ce nombre d'étoiles ſe partage en pluſieurs conſtellations ou aſteriſmes, ſavoir 21. Septentrionales, 27. Meridionales, & douze dans le Zodiaque. (Ce terme ſera expliqué cy-aprez.)

Les Septentrionales ſont 1. la petite Ourſe ou Cynoſure, qui contient ſept étoiles en ſa figure, & une au dehors. 2. La grande Ourſe ou Helicé, autrement le chariot du Roy David, qui contient vingt-ſept étoiles en ſa figure, & huit au dehors. 3. Le Dragon ou gardien des Heſperides, qui a 31. étoiles. 4. Cephée, qui contient onze étoiles & deux au dehors. 5. Bootes ou le bouvier, ou le gardien de l'ourſe qui a vingt-deux étoiles dans ſa figure, & une audehors. 6. La couronne boreale autrement d'Ariadne de Vulcan, qui a huit étoiles. 7. Hercules ou Prometée qui a vingt-huit étoiles outre celle qui eſt au bout de ſon pied droit, laquelle il a commune avec Bootes, & encore une hors de ſa figure vers le bras droit. 8. Le Vautour tombant ſous la Lyre d'Orphée qui ne contient que huit étoiles. 9. Le Cygne ou la Poule qui en a dix-ſept, & deux en dehors. 10. Caſſiopée ou le Thrône Royal qui a treize étoiles. 11. Perſée, ou le Porteur du chef de Meduſe, qui en a vingt-ſix, & trois au dehors. 12. Le Chartier ou Erichton qui en a quatorze. 13. Le Serpentaire ou Eſculape, qui en a vingt-quatre & cinq en dehors. 14. Le Serpent qui en a dix-huit.. 15. La Flêche ou le Addedard appellé Demon meridien qui en a cinq. 16. L'Aigle raviſſeur de ganimede, ou le Vautour volant, qui en a neuf en ſa figure, & ſix au dehors. 17. Le Dauphin porteur d'Arion qui en a dix. 18. Le Chevalet, ou poulain my-party qui en a quatre. 19. Pegaſe ou le cheval ailé de Bellerophon qui en contient vingt. 20. Andromede ou la Femme enchantée,

qui en contient vingt-trois. 21. Le Triangle ou Deltoton, qui n'en contient que quatre.

Les Conſtellations Meridionales ſont, les anciennes. 1. La Baleine ou le monſtre marin qui en a vingt-deux. 2. Orion ou le furieux, qui en contient trente-huit. 3. L'Eridan, ou le fleuve d'Orion qui en a trente-quatre. 4. Le Liévre qui en a douze. 5. Le grand chien qui en a dix-huit, & douze aux environs. 6. Le petit chien, ou la canicule qui en a deux. 7. Le Navire d'Argos ou de Jaſon, ou le Chariot de mer qui en contient quarante-cinq. 8. L'Hydre ou la coleuvre qui en a vingt-cinq, & deux en dehors. 9. La taſſe ou la cruche, qui en a ſept. 10. Le courbeau ou l'oyſeau de Phebus, qui en a ſept auſſi. 11. Le Centaure ou Minotaure qui en a trente-ſept. 12. Le Loup ou la Panthere qui en a dix-neuf. 13. L'Autel ou l'Encenſoir, qui en a ſept. 14. La Couronne meridionale ou la roüe d'Ixion qui en a treize. 15. Le Poiſſon auſtrale qui en a douze & ſix en dehors.

Les douze Auſtrales obſervées par les modernes ont 561. étoiles, leurs noms ſont 1. le Paon, 2. le Toucan, 3. la Gruë, 4. le Phenix, 5. la Dorade, 6. le Poiſſon volant, 7. l'Hydre, 8. le Cameleon, 9. l'Abeille, 10. la Mouche indienne, 11. le Triangle auſtrale, 12. le Triangle indien,

Toutes ces Conſtellations ſont repreſentées par des figures ſur le globe celeſte, auquel je renvoye le Lecteur, pour n'être pas obligé de le peindre ici. Et d'autant plus que la diſpoſition des étoiles de chaque conſtellation n'a aucune vrai-ſemblance avec les animaux, dont elles portent le nom.

Les Anciens qui méloient leurs ſciences avec la fable, ont donné ces differens noms à leurs Conſtellations, ſoit que ces premiers Auteurs de ces ſciences vouluſſent les rendre plus obſcures pour ne les pas rendre communes, ou que par une vaine ſuperſtition, ils cruſſent que toutes ces Conſtellations influoient icy bas des qualitez ſemblables à celles des animaux dont ils donnoient le nom aux Aſtres qu'ils conſideroient au Firmament. Il eſt plus vrai-ſemblable que ce n'étoit que pour cacher les myſteres de leurs ſciences, afin de ſe rendre plus recommandables parmi ceux qui n'en avoient aucune teinture.

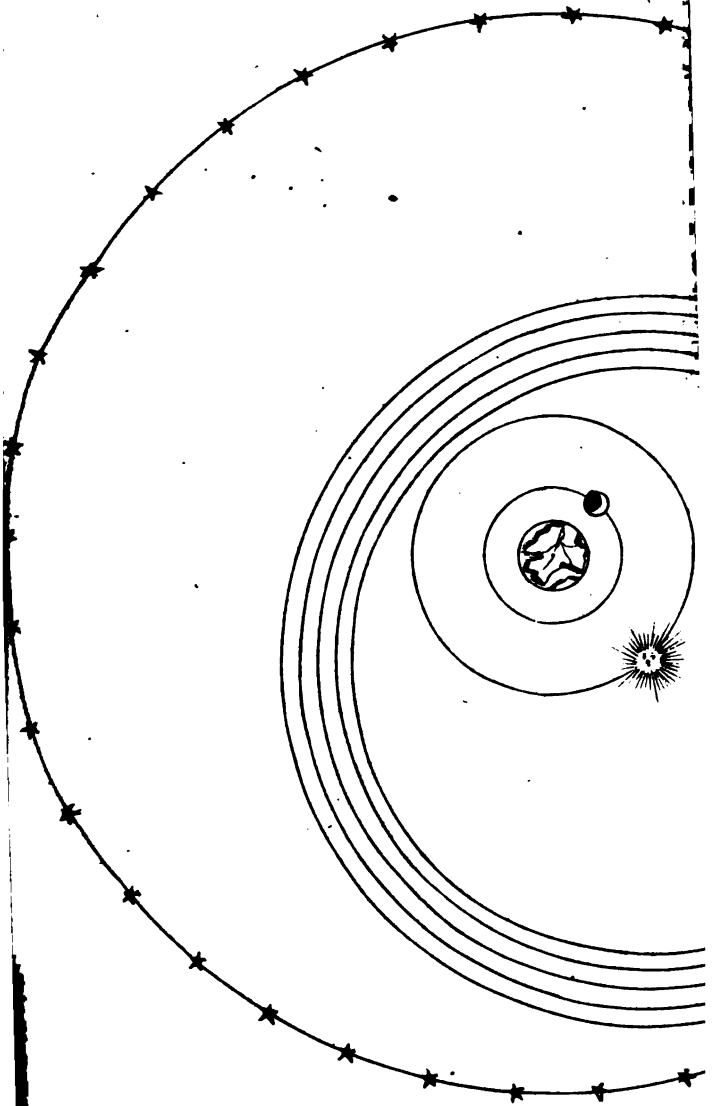
Les douze Conſtellations du Zodiaque ſont, le Belier ♈ le Toureau ♉ les Gemeaux ♊ l'Ecreviſſe ♋ le Lion ♌ la Vierge ♍ la Balance ♎ le Scorpion ♏ l'Archer ou Chiron ♐ le Capricorne ♑ le Verſeau ♒ & les Poiſſons ♓.

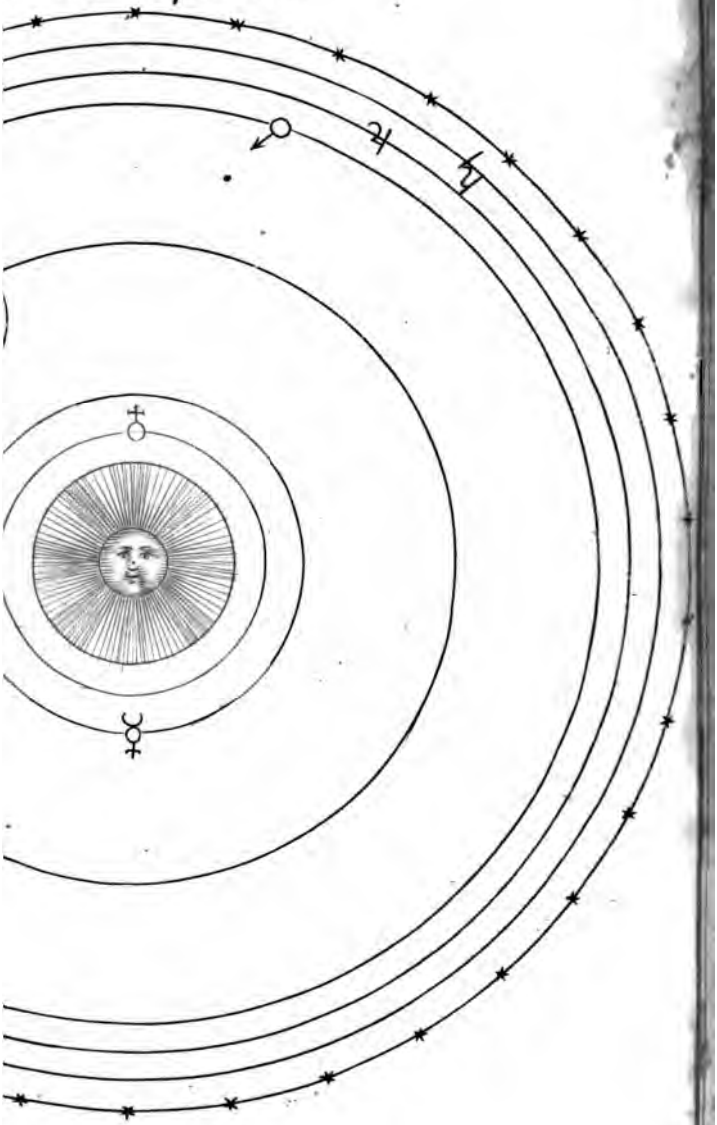
7. Le premier Syſteme ou arrangement des parties du Monde, eſt celui de Ptolomée. Il a placé la terre & l'eau comme un globe au centre du Monde, l'air autour, le feu en ſuite. Et les ſept Cieux des ſept Planetes: ſavoir, le premier celui de la Lune; le ſecond celui de Mercure; le troiſiéme celui de Venus; le quatriéme celui du Soleil; le cinquiéme celui de Mars; le ſixiéme celui de Jupiter; le ſeptiéme celui de Saturne. Immediatement au deſſus de Saturne le Ciel du Firmament, & le dernier le premier mobile: Outre les differens Cieux il admet pluſieurs orbes & pluſieurs épicycles, dont nous parlerons ci-aprez au traité de la Sphere. La planche ſuivante repreſente cette ſituation.

8. Le ſecond Syſteme, eſt celui de Copernic; cet Auteur place le Soleil au centre du Monde, autour duquel il place les deux Planetes de Venus & de Mercure, & au delà de ces deux Planetes il fait mouvoir la Terre de même maniere autour du Soleil. Les autres Planetes, Mars, Jupiter & Saturne tournent auſſi autour du Soleil. Il n'y a que la Lune qu'il place dans un Orbe, qui environne la terre, les eaux & l'air. Le Firmament a pour centre le Soleil, & il ne reconnoît aucun premier mobile. Il ne ſuppoſe pas ſeulement que la Terre tourne dans un an autour du Soleil; il veut encore qu'elle tourne en vingt-quatre heures autour de ſon propre Axe. Ce n'eſt pas ici le lieu d'examiner les raiſons de chaque Auteur pour prouver ſon Syſteme, nous en parlerons ailleurs. Voyez la fig. 1. de la planche ſuivante.

Le Syſteme de Tycho eſt le troiſiéme: ce Syſteme ſemble participer des deux premiers. Il place comme Ptolomée la Terre au centre de l'Univers; & le Ciel du Firmament concentrique à la Terre: pour toutes les Planetes il les fait mouvoir autour du Soleil, comme étant le pere de la lumiere que le Soleil leur communique, en quoi il convient avec Copernic. Il ne reconnoît point non plus que Copernic aucun premier mobile, parce qu'il fait mouvoir les Planetes dans un autre ſens. Cét Auteur ne veut pas les Cieux ſolides comme Ptolomée, en quoi il ſuit Copernic; mais il veut que les Planetes ſe meuvent au deſſous du Firmament dans tout l'eſpace qui contient les Planetes comme les poiſſons dans l'eau, ainſi toute la matiere du Ciel des Planetes, il la ſuppoſe extrêmement fluide, pour faciliter le mouvement des Planetes. Voyez la figure 2.

Systeme de Tich





10. Le quatriéme Syſteme s'appelle le commun, parce qu'il a plus de ſectateurs que les trois autres. Ce Syſteme place la Terre immobile au centre de l'Univers ; ne faiſant qu'un même globe avec la maſſe generale de toutes les eaux : l'air enſuite diviſé en trois regions, comme nous l'avons déja dit, & la Sphere du feu autour. La Lune fait le premier Ciel, ayant ſon mouvemẽt autour de la Terre. Le Soleil ſuit, beaucoup éloigné cependant, parce que les Planetes de Mercure & de Venus ſe meuvent autour de lui concentriquemẽt. Mars a ſon mouvement concentrique à la terre, & les deux autres Planetes de Jupiter & de Saturne. Le Firmament environne toutes les Planetes, & contient dans ſon ciel les étoiles fixes ; au deſſus de lui eſt le ſecond criſtallin qui donne un branle à toute la machine inferieure du Septentrion au Midy & du Midy au Septentrion, & aprés lui le premier criſtallin qui balance tous les Cieux inferieurs d'Orient en Occident, & d'Occident en Orient. Le premier Mobile les environne tous, & les fait mouvoir d'Orient à l'Occident, c'eſt de là que ce ciel a pris le nom de premier Mobile. Enfin les Chrétiens qui croyent un lieu particulier deſtiné pour la demeure des Bien-heureux aprés cette vie, ont encore placé un ciel autour du premier Mobile, à qui l'on donne le nom de Ciel empirée. Celui-là eſt, à ce que l'on croit, plûtôt de figure quarrée que ronde, pour marquer le repos qui ſemble plûtôt convenir à cette figure qu'à la ronde. La planche ſuivante marque toutes les parties de ce Syſteme.

CHAPITRE XVIII.

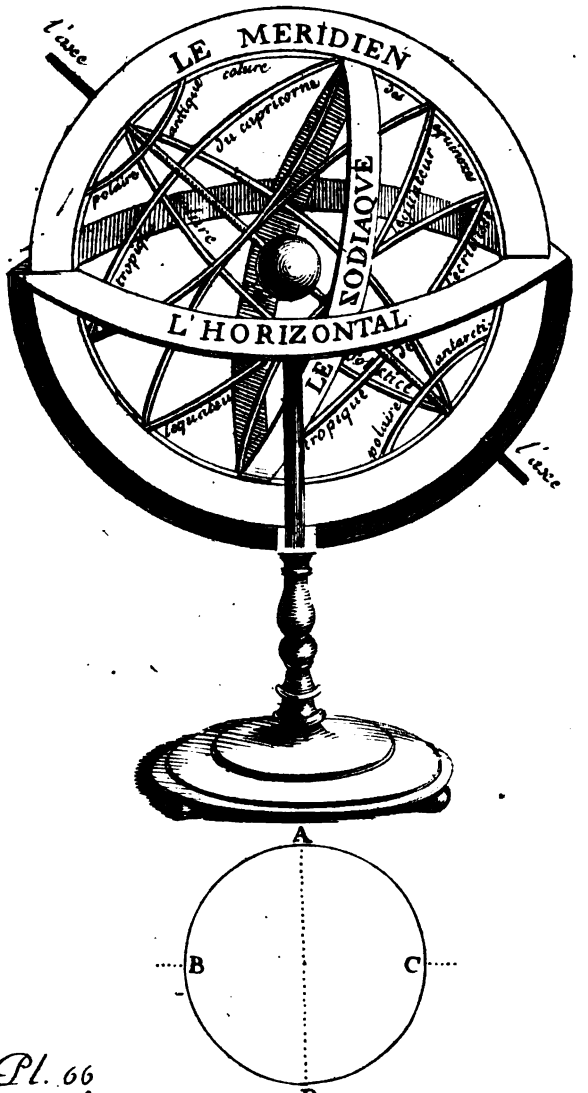
De la Sphere.

1. LA Science de la Sphere considere, comme nous l'avons déja dit, plusieurs points, lignes & cercles que les Astronomes ont imaginez dans les cieux, pour mieux remarquer les differens mouvemens & situations des Astres. Ils ont donné le nom de Sphere naturelle à toutes ces choses appliquées dans les cieux: & pour une plus grande facilité, ils en composent une de carton ou de métal, qui representent tous ces cercles & ces points, à qui ils ont donné le nom de Sphere artificielle. Voyez la 1. figure qui vous represente cette Sphere sur son appuy.

2. Pour bien concevoir tous ces points, lignes & cercles de la Sphere naturelle, nous supposerons avec la plupart des Astronomes, que le premier mobile se meut en 24. heures, & que par la rapidité de son mouvement il entraîne tous les cieux inferieurs, & leur communiquant son mouvement, il leur fait faire la même revolution en 24. heures.

3. Le côté par où commence le mouvement de tous les cieux par la rapidité du premier mobile, s'appelle l'Orient ou le Levant, parce que c'est de ce côté que l'on voit tous les Astres se lever: & le côté qui lui est opposé diametralement, s'appelle l'Occident ou le Couchant, parce que c'est de ce côté que l'on voit les mêmes Astres disparoître & se coucher. Ainsi le point A de la fig. 2. sera l'Orient, parce que nous concevrons que tout le globe B A C, se mouvra du point A vers D: & par consequent D, sera le point d'Occident ou du Couchant: & toute la partie ou face B A C, sera appellée partie Orientale: au contraire B D C, sera partie Occidentale.

Page 179.



Pl. 66

4. En même temps que l'on conçoit que le globe ſe meut d'Orient en Occident, chaques parties de la Superficie exterieure décrivent des cercles paralleles entre eux, & deux points ſe tournent en eux-mêmes ſans décrire aucun cercle. Ces deux points ont été appellez les Poles du Monde, & les cercles que décrivent chaques parties de la Superficie ſuperieure dans leur revolution qui ſe fait en 24. heures; ces cercles ont été apellez cercles diurnes. A B ſont les Poles du monde, & les cercles C D, E F, G H, I L, M N, O P, Q R, ſont des cercles diurnes. fig. 1.

5. Nous avons déja quatre points que les Aſtronomes ont appellez points Cardinaux, qui ſont les deux Poles, & l'Orient & l'Occident nous les définirons dans les nombres ſuivans.

6. Pole arctique, eſt l'un des points fixes, autour deſquels la Machine du Monde ſe meut, qui eſt vûë prés des deux Ourſes dont il a pris le nom d'arctique, on l'appelle Septentrional, Boreal & Nord. C'eſt encore celui que nous voyons dans ces païs. Voyez la figure 2.

7. Pole antarctique eſt le point fixe oppoſé à l'arctique. On l'appelle encore Meridional, ou Auſtral ou Sud, celui-là nous ne le voyons point dans ces païs. Voyez la fig. 2.

8. Le Point d'Orient, eſt celui par où commencent les Aſtres à paroître dans leur lever, comme A, fig. 3. Il eſt encore appellé l'Eſt.

9. Le Point du Couchant eſt celui par où les Aſtres commencent à diſparoître dans leur coucher. Il eſt encore appellé Oueſt, comme l'oppoſé à l'Eſt. Voyez la fig. 3.

10. Les Poles ſont des points fixes à l'égard de tout l'Univers : mais les deux points d'Orient & de Couchant changent ſuivant les diverſes contrées; parce que la terre étant ſuppoſée ronde, le Soleil par exemple ſe leve dans de certains païs lorſqu'il ſe couche en d'autres, ainſi chaque païs a ſon Orient & ſon Couchant particulier.

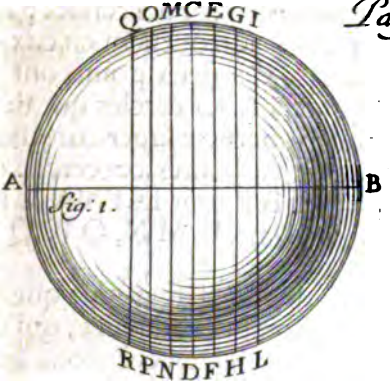


Fig. 1.

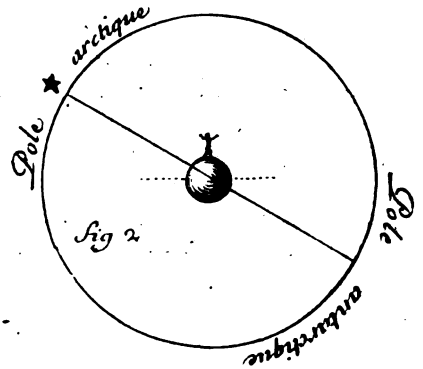


Fig 2

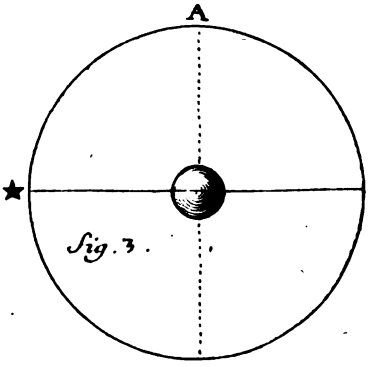


Fig. 3.

Pl. 67

11. La ligne que l'on conçoit paſſer par le centre du Monde d'un Pole à l'autre, a été nommée l'Axe du Monde. Voyez la ligne A B, fig. 1.

12. Tous les Cercles Diurnes ſont inégaux, il n'y a que ceux qui ſont également éloignez des Poles qui ſoient égaux, & celui qui partage le globe en deux parties égales du côté des Poles, & qui eſt neceſſairement plus grand qu'aucun des cercles diurnes prend le nom d'Equateur, parce qu'il partage le Monde en deux portions égales ; dont celle qui eſt du côté du Pole arctique s'apelle la partie Septentrionale: & celle qui eſt du côté du Pole antarctique, s'appelle partie Meridionale ou Auſtrale. Voyez la fig. 2.

13. Comme les Mathematiciens ſe ſont determinez à partager le cercle en 360. parties, & chaque partie de la maniere qu'il a été dit ci-deſſus ; ſi l'on conçoit le cercle équateur ainſi diviſé, & que par chaque partie de l'équateur l'on conçoive des cercles qui paſſent d'un Pole à l'autre, ces cercles ſeront appellez les cercles de déclinaiſon, parce qu'un Aſtre ſe trouvant en quelque point de l'un de ces cercles, la diſtance qu'il y aura de cét Aſtre à l'équateur, eſt appellée declinaiſon des Aſtres. C'eſt pourquoi tous les cercles qui ſont marquez en la troiſiéme figure, ſont des cercles de déclinaiſon, & la diſtance de l'étoile A juſqu'à l'équateur ſur l'arc B C, marque la déclinaiſon de cét Aſtre.

14. Nous remarquons que la moitié des cieux nous paroît, & que l'autre moitié nous eſt cachée, c'eſt pour cela que le cercle qui ſepare la portion des cieux vûë de celle qui ne l'eſt pas, s'appelle Horiſon. Voyez la fig. 4.

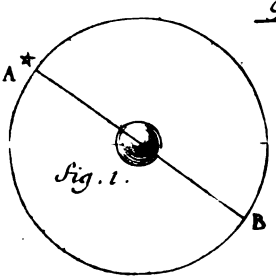


Fig. 1.

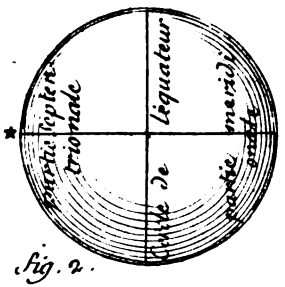


Fig. 2.

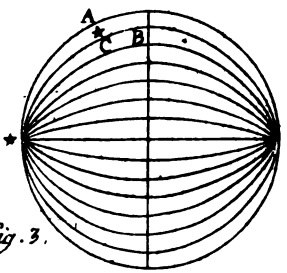


Fig. 3.

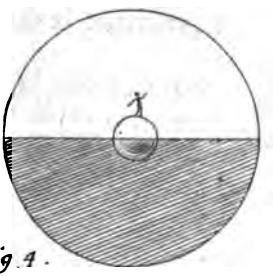


Fig. 4.

Pl. 68

15. Les deux portions du Monde partagées par l'horiſon s'appellent Hemiſpheres, dont celui qui eſt vû, eſt appellé Hemiſphere ſuperieur, & celui qui ne l'eſt pas a le nom d'inferieur : A B C, fig. 1. eſt l'Hemiſphere ſuperieur. A D C, l'Hemiſphere inferieur.

16. Toutes les contrées de la terre ne voyent pas la même portion du Ciel : par exemple, l'homme A, découvre B C D; mais l'homme E, découvre un autre Hemiſphere F C D G. Et par conſequent l'homme A, a un autre horiſon, ſavoir B C, que l'homme E qui a F G. Voyez la fig. 2.

17. Ceux qui ont le Pole un peu élevé ſur leur horiſon, ont la Sphere oblique, comme la fig. 3. le repreſente : & ceux qui ont le Pole directement ſur leur tête ont la Sphere droite, comme le repreſente la figure 4. & ceux-là ont la Sphere parallele qui ont les deux Poles dans leur horiſon : comme ceux de la figure 5.

18. L'on imagine des Poles au cercle de l'horiſon, à qui l'on a donné les noms de Zenith & de Nadir. Le Zenith eſt le point que l'on conçoit au deſſus des Cieux directement ſur ſa tête, & le Nadir qui lui eſt diametralement opoſé, eſt directement ſous les pieds. Voyez la fig. 6.

19. Les Cercles que l'on conçoit paſſer par les Poles de l'horiſon, & par toutes les parties de l'horiſon, ſont appellez Verticaux ou Azimuths. Ils ſervent à marquer l'élevation des Aſtres par deſſus l'horiſon. Voyez la fig. 7.

20. Il y a deux ſortes d'horiſon, le rationnel qui paſſe par le centre de la terre, comme A B C, fig. 8. & le ſenſible qui paſſe par deſſus la Superficie de la terre, comme D E F, même fig. 8.

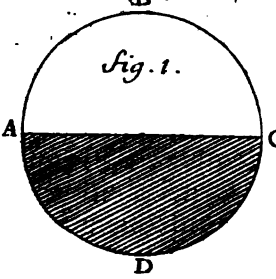


Fig. 1.

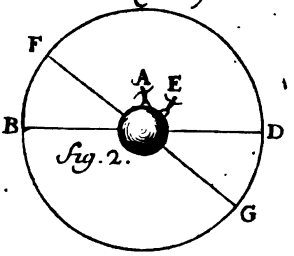


Fig. 2.

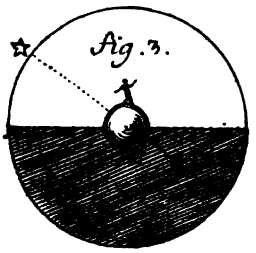


Fig. 3.

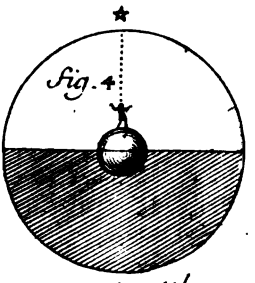


Fig. 4

Zenith

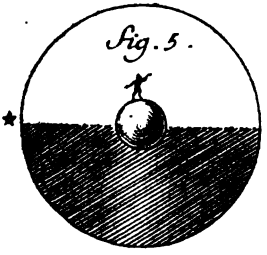


Fig. 5.

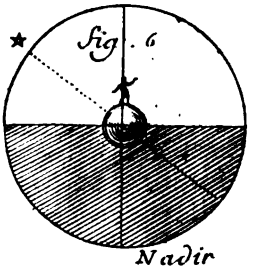
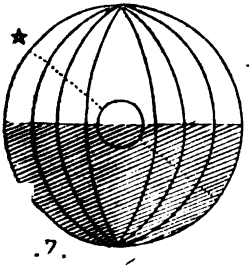


Fig. 6

Nadir


.7.

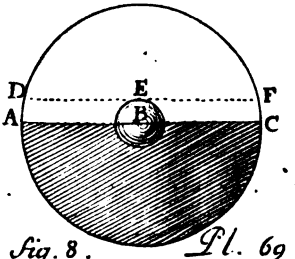


Fig. 8.

Pl. 69

21. L'élevation du Pole, eſt l'Arc dans un Azimuth compris entre le Pole & l'Horiſon, comme A B fig. 1. L'on déſigne cette élevation par le nombre des degrez compris dans l'Arc, ainſi par exemple, ſi AB eſt de 45. degrez, l'on dira que l'élevation du Pole eſt de 45. degrez.

22. L'Ecliptique eſt un cercle qui coupe la Sphere en deux, & qui décline de l'Equateur de 23. degrez 30. minutes. Par exemple, ſoit A B l'Equateur, & que le cercle C D E decline de l'Equateur de 23. degrez 30'. C D E, ſera appellé l'Ecliptique. Ce cercle reçoit ce nom, parce que les Eclipſes de Soleil & de la Lune, n'arrivent que lorſque ces Aſtres ſont dans ce cercle. Voyez la fig. 2.

23. L'on conçoit dans le Syſteme commun que les Planetes ſe meuvent à peu prez ſous l'écliptique d'un mouvement contraire au premier mobile, ſavoir d'Occident en Orient: & pour renfermer ſous un même cercle le mouvement de toutes les Planetes, l'on a feint une bande large de 12. degrez, ſix de part & d'autre de l'écliptique; & à cette bande l'on a donné le nom de Zodiaque. Ce Cercle eſt ainſi appellé, parce que l'on y marque les douze Conſtellations des mois de l'année, le Belier, le Toureau, &c. Voyez la fig. 3. A B C repreſente l'écliptique, & la bande DAE, FCG, le Zodiaque avec les ſignes.

24. Les deux points où l'Ecliptique & l'Equateur ſe coupent, ſont apellez les Points Equinoxiaux, parce que les jours ſont égaux aux nuits, lorſque le Soleil ſe trouve dans ces points.

25. Les deux points de l'Ecliptique les plus éloignez de l'Equateur, ſont appellez points ſolſtitiaux: AB ſont les Solſtitiaux: C marque les Equinoxiaux fig. 4. Les Solſtitiaux ont pris ce nom de ce que le Soleil ne s'écarte pas davantage lorſqu'il eſt dans ces points.

page 187

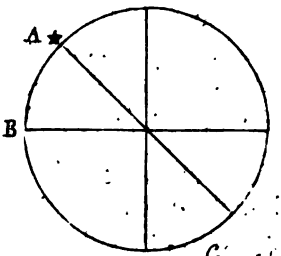


Fig. 1

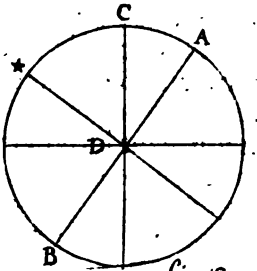


Fig. 2

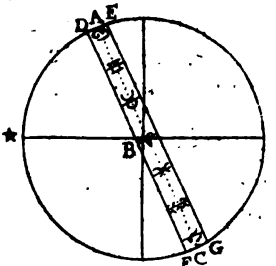


Fig. 3

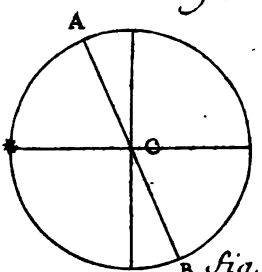


Fig. 4

plan. 70.

26. L'Ecliptique a ſes Poles comme tous les cercles: ces Poles ſont conçûs de part & d'autre à 23. degrez, 30'. des Poles du Monde. A B ſont les Poles du Monde. C D l'Equateur. E F l'Ecliptique. G H ſont des Poles de l'Ecliptique, fig. 1.

27. Le Meridien eſt un cercle qui partage le Monde en deux parties, ſavoir l'Orientale & l'Occidentale; ce cercle paſſe par les Poles du Monde, de l'Ecliptique & de l'Horiſon. Soient A & B les Poles du Monde. E F les Poles de l'Ecliptique, C D les Poles de l'Horiſon: le cercle A C F B D E, eſt le Meridien, fig. 2.

28. Les Cercles diurnes que décrivent les points ſolſtitiaux, ſont appellez Tropiques. A B, C D. fig. 3.

29. Les Cercles diurnes que décrivent les Poles de l'Ecliptique ſont appellez cercles polaires. A B, C D, Fig. 4.

30. Les Colures ſont les cercles de declinaiſon qui paſſent par les Poles du Monde, & par les points ſolſtitiaux & équinoxiaux. Celuy qui paſſe par les points ſolſtitiaux eſt appellé le Colure des Solſtices, celui qui paſſe par les points équinoxiaux, eſt appellé Colure des Equinoxes. A B C D le Colure des Solſtices. A F C le Colure des Equinoxes, fig. 5.

31. Nous conterons de tout ce que nous avons dit onze points principaux, qui ſont les deux Poles du Monde, l'Arctique & l'Antarctique; les deux Poles de l'Ecliptique, le Septentrional & Meridional; les deux Poles de l'Horiſon, le Zenith & Nadir; les deux points équinoxiaux, l'Oriental & l'Occidental; les deux points ſolſtitiaux, le Solſtice d'Eſté & le Solſtice d'Hyver, & enfin le centre du monde.

32. Nous conterons auſſi trois Axes, celui du Monde, qui paſſe par les Poles du Monde; celui du Zodiaque par les Poles de l'Ecliptique; & celui de l'Horiſon par le Zenith & Nadir.

page 189

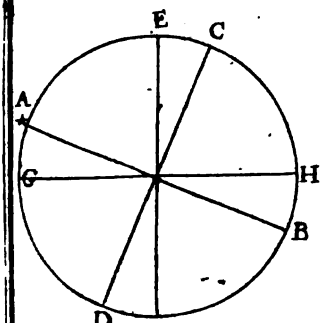


Fig. 1

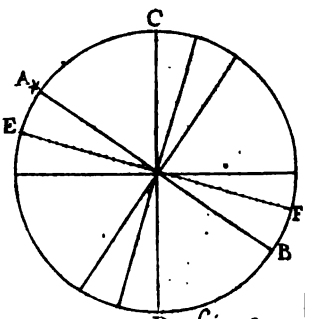


Fig. 2

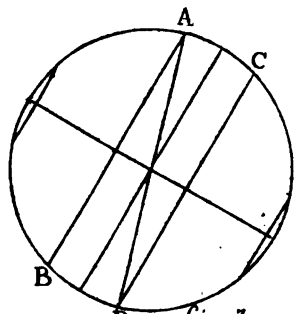


Fig. 3

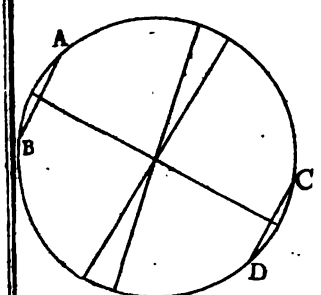


Fig. 4

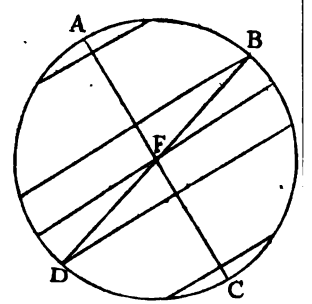


Fig. 5

plan. 71.

33. Nous conterons auſſi parmi les Cercles huit ſortes de grands : ſavoir l'Equateur qui eſt unique & fixe, l'Ecliptique pareillement fixe ; les deux Colures auſſi fixes, les Meridionaux, les Declinans, les Verticaux & les Horizontaux rationels. Et parmi les petits Cercles nous conterons les Diurnes, dont les deux Tropiques & les deux Polaires doivent être principalement remarquez.

34. La Sphere artificielle ne comprend que dix cercles : ſix grands, qui ſont l'Equateur, le Meridien, le Zodiaque, l'Horiſon, les deux Colures, ſavoir le Colure des Solſtices, & celui des Equinoxes ; & enfin quatre petits, le Tropique d'Eſté ou de l'écreviſſe, le Tropique d'Hyver ou du Capricorne, le Polaire arctique, & le Polaire antarctique : & au milieu de toute cette machine, l'on met un petit globe pour repreſenter la terre. Nous parlerons ailleurs de l'uſage de ces points lignes & cercles.

CHAPITRE XIX.

De la Geographie.

1. LA Geographie eſt la deſcription de tout ce qui eſt ſur le globe de la terre & des eaux. Il y a de deux ſortes de Geographie, l'une Hiſtorique, & l'autre Geometrique ou plûtôt Aſtronomique.

2. La Geographie hiſtorique décrit les differens païs qui rempliſſent ce globe, elle en raporte les beautez & curioſitez ; elle dépeint les mœurs de chaque nation, & raconte generalement tout ce que l'on peut remarquer dans chaque region.

3. La Geographie geometrique & aſtronomique repreſente pluſieurs points, lignes & cercles pour marquer les differentes ſituations de chaque region ; elle en marque les meſures, & donne les moyens de les repreſenter ou ſur des globes, ou ſur des planiſpheres.

4. Nous ne nous arrêterons point ici à décrire en Hiſtoriens les differentes Regions du monde, ce n'eſt pas le but que nous nous ſommes propoſé dans cét Ouvrage, nous nous contenterons ſeulement de ce qui regarde le Mathematicien ; & par conſequent nous traiterons de la ſeule Geographie aſtronomique. Aprés cependant que nous aurons défini quelques mots dont on ſe ſert dans la Geographie hiſtorique, leſquels j'ai crû à propos d'expliquer ici.

5. L'on appelle Continent ou Terre-ferme la plus groſſe portion de la terre.

6. Iſle eſt une petite portion de terre toute environnée d'eau.

7. Preſqu'iſle eſt une portion de terre preſque toute environnée d'eau, c'eſt-à-dire, qu'elle n'eſt unie au Continent que par un ſeul côté tres-petit & fort étroit.

8. Iſthme eſt une langue de terre, ſerrée entre deux mers, par où la preſqu'iſle eſt attachée au Continent.

9. Promontoire ou Cap, eſt une pointe de terre qui s'avance beaucoup dans la mer.

10. Montagne, eſt une éminence de terre pardeſſus la ſurface commune de la terre. Les petites montagnes ou éminences de terre, ſont appellées Collines.

11. Ocean eſt la plus grande portion des eaux.

12. Mer eſt une portion de l'Ocean. Les mers prennent le plus ſouvent leur nom du païs qu'elles cottoyent.

13. Golfe eſt une langue de mer qui s'avance beaucoup en terre. On leur donne le nom de ſein ou baye, lorſque la mer s'avance peu.

14. Côte ou Rivage, eſt la terre qui borne la mer.

15. Rade, eſt le lieu où les grands vaiſſeaux demeurent quand ils ne veulent pas prendre port. On apelle encore du nom de Rade l'abry pour les vaiſſeaux contre les mauvais vents, au défaut d'un port.

16. Havre ou Port, eſt un lieu où les vaiſſeaux ſe retirent en aſſurance quand ils abordent en terre.

17. Détroit eſt une langue de mer ſerrée entre deux terres ; on l'apelle encore Manche, Pas & Euripe, ſuivant les differens païs.

18. Greve eſt le lieu que la mer couvre & découvre dans ſon flux & reflux.

19. Gouffre eſt un abîme où les eaux ſe perdent en terre en tournoyant, & où les vaiſſeaux font naufrage.

20. Bancs de ſable, baſſes ou ſirtes, ſont des ſables amoncelez, qui n'étans pas aſſez profonds dans l'eau font perir les vaiſſeaux ſi la tempête les y jette.

21. Digue eſt un Rempart élevé contre la furie des eaux.

22. Lac eſt un grand amas d'eau ſans courant, toute environnée de terre.

23. Marais eſt un lieu ſujet à un amas d'eau qui ſe déſeiche pendant les chaleurs, ou la diſette des pluïes.

24. Riviere eſt un coulant d'eau en grande abondance. On l'appelle fleuve lorſque les eaux aprés avoir reçûës pluſieurs rivieres, ſe déchargent dans la mer. Et on lui donne le nom de torrent lorſque ſes eaux ſont extrêmement rapides.

25. Etangs, ſont des reſervoirs d'eaux propres à vuider quand on le veut.

Voila les mots principaux dont on ſe ſert dans les diſcours que l'on fait des differentes regions qui ſe trouvent ſur la ſurface du Globe. Voici les définitions mathematiques de la Geographie geometrique, ou aſtronomique.

26. La Geographie se fait ou sur des globes ou sur des plans : on appelle les premiers Globes terrestres, & les seconds s'appellent Mappemondes.

27. Le Globe terrestre, outre les Provinces, Villes, Rivieres & autres choses que l'on y represente, a encore tous les cercles de la Sphere dont nous avons cy-devant parlé ; Savoir l'Horisontal, dans lequel est enchassé le globe avec son meridien : l'Equateur qui le partage également du côté des deux Poles : le Zodiaque, qui comme une bande, coupe l'Equateur aux points équinoxiaux du Belier & de la Balance, & décline du côté du Septentrion & du midi de 23. degrez 30. minutes. Et aux points solstitiaux de la plus grande declinaison de ce cercle, sont décrits les deux Tropiques paralleles à l'Equateur ; Savoir le Tropique d'Eté dans la partie Septentrionale, autrement le Tropique de l'Ecreviſſe, & dans la partie meridionale le Tropique d'Hyver ou du Capricorne: Ces deux derniers cercles declinent comme les points solstitiaux de 23. degrez 30. minutes : Les deux Polaires enfin sont décrits de même maniere paralleles à l'Equateur, & declinans de 23. degrez 30. minutes des Poles du globe terrestre.

28. L'on y peut encore décrire les deux Colures, faisant passer le premier par les Poles du globe & par les points équinoxiaux pour avoir le Colure des équinoxes ; & l'autre par les points solstitiaux pour avoir le Colure des Solstices. Voyez la planche suivante qui represente le Globe sur son pied.

29. L'on peut aussi distinguer les quatre points principaux : du Septentrion ou Pole arctique : du Midi ou Pole antarctique : de l'Orient à la gauche du Globe : & d'Occident à la droite, en situant le Pole arctique

dans la partie ſuperieure, & l'antarctique dans ſa partie inferieure.

30. De même l'on diſtinguera la partie Septentrionale en prenant le demi globe depuis l'Equateur au Pole arctique ; & la Meridionale depuis l'Equateur au Pole antarctique ; & le Meridien ſeul diſtinguera la partie Orientale du globe, de l'Occidentale.

31. Outre ces cercles, points & parties differentes, l'on repreſente encore ſur le globe d'autres cercles que l'on a appellé Meridiens ou Cercles de latitude, & les Paralleles ou cercles de longitude.

32. Les Meridiens ou Cercles de latitude, ſont des cercles qui paſſent par les Poles du globe & toutes les parties de l'Equateur : Et pour ne point cauſer de confuſion, on ſe contente de les marquer de dix en dix degrez, comme la figure le repreſente dans la planche ſuivante. L'on a donné ce nom à ces cercles, parce que la largeur de la terre eſt entre ſes Poles.

33. La latitude d'un lieu eſt l'Arc d'un Meridien, compris entre l'Equateur & le point de ſa ſituation ; ainſi l'Arc B A, depuis l'Equateur juſques à A, marque la latitude du point A ſur le Globe : On appelle auſſi latitude l'élevation du Pole pardeſſus l'Horiſon, parce que cette élevation eſt la même que la diſtance renfermée entre l'Equateur & le lieu duquel on cherche la latitude, fig. 1.

34. Les Paralleles ont été apellez de ce nom, parce qu'ils ſont décrits paralleles à l'Equateur de dix en dix degrez ; de ſorte que les Tropiques & les Polaires ſont en ce ſens des Paralleles ; mais pour les mieux deſigner on marque les Tropiques & Polaires d'une double ligne. Voyez la fig. 2. Ces Cercles ſont auſſi appellez de longitude, parce que la longueur de la terre ſe prend tout le long de l'Equateur.

35. Pour déſigner la longitude d'un lieu, l'on conte les degrez compris dans l'Arc, qu'il y a depuis le premier Meridien juſqu'au lieu de qui l'on cherche la longitude, en comptant d'Occident en Orient; comme l'Arc C D. fig. 2.

36. Le premier Meridien peut être placé indifferemment en quelque partie du Globe que ce ſoit; neanmoins pour plus grande conformité les Geographes en France le placent dans l'Iſle de Fer, parce que le Roi de France l'a ainſi determiné par un Arrêt du Conſeil, donné l'an 1634. & c'eſt depuis ce premier Meridien, que l'on conte les degrez de longitude, comptant de l'Occident à l'Orient.

37. L'on a donné le nom de Zone aux eſpaces du Globe renfermez entre les Tropiques, chaque Polaire & l'un des Tropiques, & depuis chaque Pole juſqu'aux Cercles Polaires; de ſorte que l'on conte cinq Zones: Savoir la Torride ou Brulante, compriſe dans tout l'eſpace que renferment les Tropiques, la Temperée Septentrionale, qui eſt entre le Tropique d'Eté & le Polaire arctique, la Temperée Meridionale entre le Tropique d'Hyver & le Polaire antarctique, la Glaciale Septentrionale entre le Pole arctique & le Cercle Polaire arctique, & la glaciale Meridionale entre le Polaire antarctique & le Pole antarctique. Voyez la figure 2.

38. Les Climats ſont auſſi du nombre des paralleles, ce ſont des eſpaces renfermez entre deux paralleles, autant éloignez qu'il eſt neceſſaire pour faire la difference de demie heure dans le plus grand jour de l'année entre le plus éloigné & le plus proche parallele de l'Equateur; l'on en conte 24. Voyez la fig. 3. Nous donnerons ailleurs une table des degrez que chaque climat renferme.

39. Depuis le dernier Climat d'heures juſques aux

Poles, l'on conte des Climats de jours ; ces Climats de jours ſont renfermez entre deux paralleles, dont la difference du plus grand jour à l'autre eſt de 30. fois 24. heures, parce que au delà des Climats d'heures les jours ne croiſſent plus par heures, mais par journées entieres ; & la difference de 30. jours fait un Climat de jour, ainſi l'on en conte ſix juſqu'au Pole, où il y a ſix mois de jour & autant de nuit.

40. Les differentes manieres des Ombres ont fait donner differens noms aux differens Peuples qui habitent les Contrées où l'Ombre à Midi ſe trouve differente ; ainſi l'on a donné le nom d'Amphiciens à ceux qui pendant le cours de l'année voyent leur Ombre ſe jetter de part & d'autre du côté des Poles. Ces Peuples ſont ceux qui habitent la Zone Torride : Et lorſque le Soleil deux fois l'année paſſe par le Zenith de ceux qui habitent immediatement ſous l'Equateur, on les appelle Aſciens, c'eſt à dire ſans ombre.

41. Ceux qui habitent les Zones temperées, ſont les Heteroſciens, dont les Ombres de Midi ne ſe jettent jamais que d'un côté : Par exemple, à ceux qui habitent la Septentrionale du côté du Pole arctique, & ceux qui ſont dans la Meridionale du côté du Pole antarctique.

42. Les Periſciens ſont ceux qui voyent tourner leur ombre autour d'eux entierement pendant tout le tems qu'il eſt ſur leur horiſon. Ces Peuples ſont ceux qui habitent les Zones froides au delà des Cercles Polaires, ſoit dans la partie Septentrionale, ſoit dans la partie Meridionale, car le Soleil dans ce tems tourne autour de leur horiſon, & ne le quittent point que pour leur laiſſer des nuits continuelles. Voyez la figure 4.

43. Les Peuples comparez enſemble dans leur differente ſituation, s'apellent encore de differens noms,

pag. 197

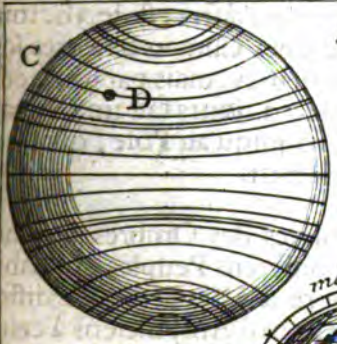


fig. 2.

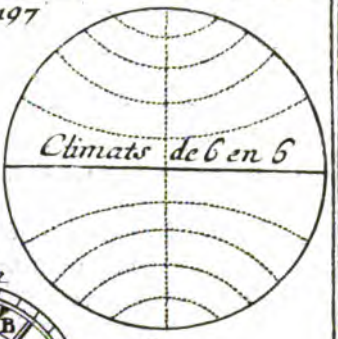


fig. 3.

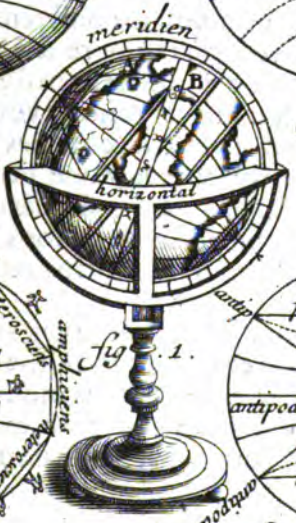


fig. 1.

fig. 4.

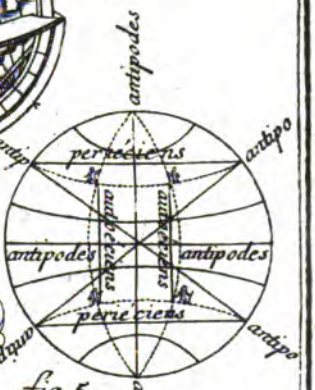


fig. 5.

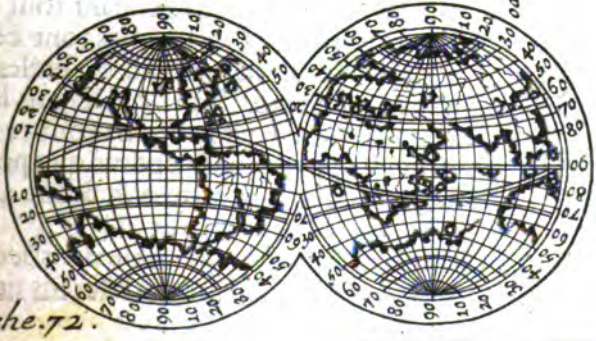


planche. 72.

44. Les Perieciens ſont ceux qui ſont ſituez ſur un même Parallele, & oppoſez dans leur Meridien. Voiez la fig. 5.

45. Les Autoëciens ſont ceux qui habitent ſur un même Meridien, & ſont oppoſez dans leur Parallele. Voyez la fig. 5.

46. Les Antipodes ſont ceux qui ſont oppoſez dans leurs Parallels & leur Meridien. Voyez la même fig. 5.

47. L'on repreſente ſur des Plans toutes les mêmes choſes que nous venons de décrire ſur le Globe; mais pour le faire plus facilement on repreſente le Globe coupé en deux Hemiſpheres, avec la projection de toutes leurs parties ſur un Plan. C'eſt à cette ſorte de Geographie que l'on a donné le nom de Mappemonde, comme qui diroit le Monde repreſenté ſur une Nappe. Voyez la fig. 6. ci-devant, où vous diſtinguerez generalement tout ce que nous avons appliqué au Globe.

48. Dans les Mappemondes le haut de la Carte repreſente toûjours le Septentrion: le bas de la Carte repreſente le Midi: le côté gauche repreſente la partie Orientale: & le côté droit la partie Occidentale dans chaque Hemiſphere. L'Hemiſphere gauche contient les trois parties du Monde les plus habitées, qui ſont l'Europe, l'Aſie & l'Affrique; & l'Hemiſphere droit repreſente l'Amerique, que l'on appelle le nouveau Monde.

49. Dans les Cartes Chorographiques, c'eſt-à-dire, celles qui ne repreſentent qu'une Région particuliere, l'on obſerve la même ſituation du Septentrion au haut de la Carte; & pour déſigner la ſituation de cette Région à l'égard du Globe, l'on marque le nombre des Meridiens de cette Contrée par le nombre des degrez de longitude, déſignez dans le haut & le bas de la Carte, & le nombre des Paralleles par les nombres des latitudes, marquez à droite & à gauche; de ſorte que ces Cartes ſemblent avoir été coupées ou retranchées du Globe même.

50. Les Mers ſont marquées ſur les Cartes par des petites ombrés d'hachures,& les rivieres par des longs traits tournoyans ; les Lacs ſont entierement ombrés: les Terres ſont ſimplement marquées par la poſition des Villes,Places, &c. Voilà ce que les Mathematiciens conſiderent au ſujet du Globe terreſtre: Nous en donnerons la pratique, & la maniere de faire toutes ſortes de Cartes Geographiques dans la ſuite de cet Ouvrage.

CHAPITRE XX.

De l'Aſtronomie, & Theorie des Planetes.

1. NOus ne donnerons dans ce Traité de la Theorie des Planetes, qu'une legere idée de cette belle Science : nous reſervant de dire ce qu'il y a de plus difficile dans les Traitez que nous donnerons ciaprés.

2. L'Aſtronomie conſidere, comme nous l'avons déja dit cy-devant, les mouvemens & les grandeurs de chaque partie du monde, & parce que la plus grande partie eſt du mouvement des Aſtres, on lui a donné le nom d'Aſtronomie

3. Dans cette Scienee il y a deux ſortes de meſures à conſiderer; ſavoir celle de la grandeur des differentes choſes que l'Aſtronomie conſidere, leurs diſtances & leurs raports ; la ſeconde conſidere la meſure du tems. Nous donnerons à la premiere le nom d'Aſtronomie ſimple, ou de Theorie des Planetes ; à l'autre nous lui donnerons le nom de Chronologie ou Chronographie, comme qui diroit la Science qui explique les diferentes meſures & raports du tems. Nous ferons un Chapitre de cette derniere,& nous continuerons d'expliquer la Theorie des Planetes dans celui-ci ; ne donnant, comme nous avons déja dit, que les definitions qui ſont neceſſaires pour en avoir les premieres idées.

4. Pour garder quelque ordre dans ce Traité, nous commencerons à définir quelques cercles, points, lignes, &c. qui ſont neceſſaires pour comprendre les mouvemens. Nous parlerons enſuite des mouvemens, & nous finirons par les apparitions, diſtances & combinaiſons que peuvent avoir les Aſtres, ou les Cieux comparez enſemble.

5. Cercle concentrique eſt celui qui a un même centre avec la terre, (Nous ſuppoſons ici la terre au centre du monde.) Voyez le cercle A B C, à l'égard de la terre D, fig. 1.

6. Cercle excentrique eſt celui qui n'a pas un même centre que la terre. Voyez E F G H, fig. 1.

7. Epicycle eſt un petit cercle dont le centre eſt porté en la circonference d'un concentrique ou excentrique. Voyez le cercle A B C, dans la circonference concentrique D E F, fig. 2.

8. Orbe eſt un eſpace renfermé entre deux ſuperficies, l'une concave, l'autre convexe. Comme le repreſente la figure 3.

9. Il y a de trois ſortes d'Orbes; ſavoir des Orbes excentriques, des Orbes concentriques, & des Orbes mélangez, que l'on appelle excentriques en partie. Les excentriques ſont, ou déferens, ou excentriques des excentriques. Les lettres alphabetiques les deſigneront dans la fig. 4. & 5. A. eſt le centre de la terre. B., eſt le centre de l'excentrique. H G, eſt un Orbe excentrique déferent, dont les 2. ſuperficies ſont excentriques à la terre. E & D, ſont des Orbes excentriques en partie, parce que l'une de leurs ſuperficies eſt excentrique, & l'autre concentrique. P & Q, ſont des excentriques des excentriques; parce que leur centre eſt encore hors du déferent. Le déferent eſt ainſi appellé, parce qu'il porte la Planete ou ſon Epicycle. Voyez C & I, fig. 4. & 5.

page 201.

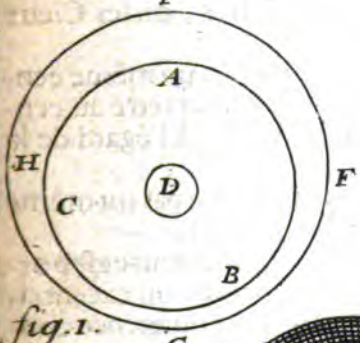


fig. 1.

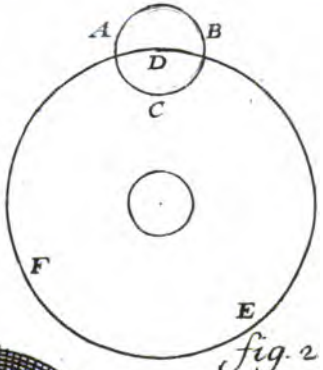


fig. 2

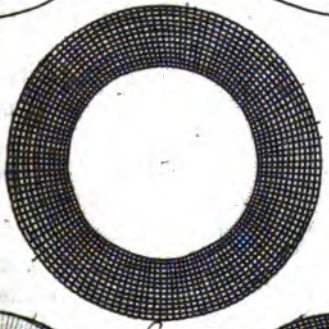


fig. 3.

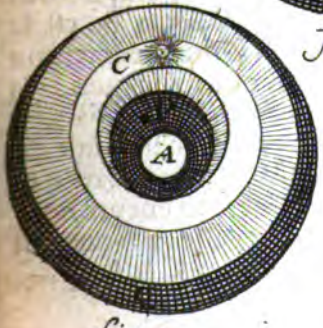


fig. 4.

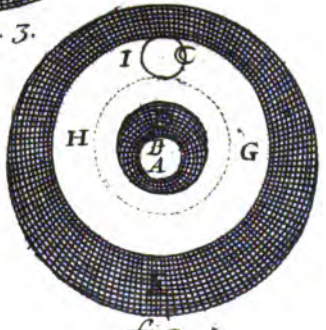


fig. 5.

plan. 73.

20. Le centre d'un excentrique eſt le point hors du centre du Monde, duquel eſt décrit l'excentrique, comme A, qui eſt hors du centre du Monde. B, eſt le centre de l'excentrique C D E, fig. 1.

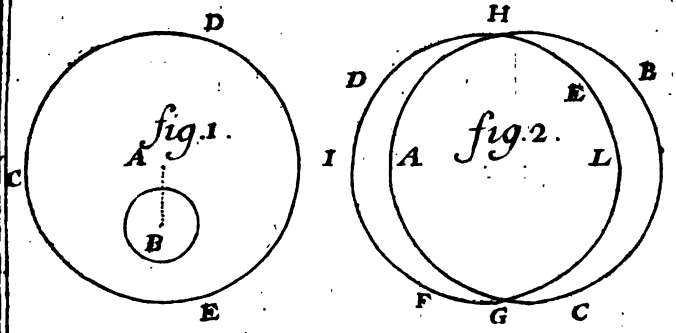
11. La ligne de l'excentricité eſt la ligne droite comprise entre le centre de la terre & le centre de l'excentrique, comme A B, fig. 1.

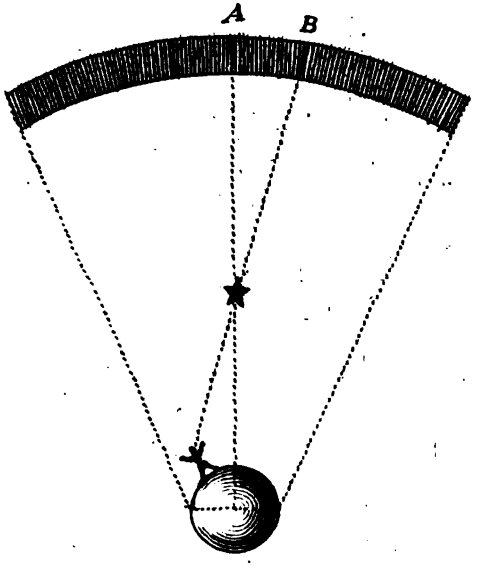
12. La tête du Dragon ou le Nœud aſcendant, eſt l'interſection du déferent d'une Planete avec l'Ecliptique dans la partie Occidentale; & le Nœud deſcendant ou la queuë du Dragon, eſt le point d'interſection du déferent de la Planete, & de l'Ecliptique dans la partie Orientale. Par exemple, ſoit A B C, l'Ecliptique, D E F, le déferent d'une Planete, qui decline de l'Equateur plus que le cercle de l'Ecliptique, le point G, leur ſection dans la partie Occidentale, eſt la tête du Dragon, & le point H, dans la partie Orientale queuë du Dragon. Voyez la fig. 2. La tête du Dragon eſt appellée Nœud aſcendant, parce que la Planete dans ſon mouvement paroît monter par ce point du Midi au Septentrion: Au contraire à la queuë du Dragon la Planete ſemble deſcendre du Septentrion au Midi. Et c'eſt pour cela que ce point s'apelle le Nœud deſcendant.

13. Les limites ou ventres du Dragon, ſont les deux points du déferent dans la partie Septentrionale & Meridionale, qui declinent le plus de l'Equateur, comme I L, dans la fig. 2.

14. Le vrai lieu d'un Aſtre, eſt le point dans le Firmament, où ſe termine la ligne tirée du centre de la terre, paſſant par le centre de l'Aſtre juſqu'au Firmament. Comme A, fig. 3. Et le lieu apparent du même Aſtre eſt le point dans le Firmament où ſe va terminer la ligne tirée de l'œil, paſſant par le centre de l'Aſtre juſqu'au Firmament, comme B, fig. 3.

page. 203.





plan. 74.

15. La Parallaxe eſt l'Arc compris entre le vrai lieu & l'apparent d'un Aſtre, comme A B, fig. 3. à la page ci-devant.

16. Dans l'Hypoteſe du Syſteme commun l'on diſtingue de deux ſortes de mouvemens, l'un propre à chaque Aſtre ou Ciel, & l'autre commun: ce dernier eſt encore de deux ſortes; ſavoir le diurne & le mouvement de libration qui ſe fait en deux manieres.

17. Le mouvement propre eſt celui que fait un Aſtre ou ſon Ciel ſur les Poles du Zodiaque, depuis l'Occident au Levant.

18. Le mouvement commun eſt celui qu'un Ciel ſuperieur fait faire à tous les Cieux inferieurs, & à tout ce qu'ils contiennent.

19. Le mouvement diurne, eſt celui que fait faire le premier mobile à tous les Cieux inferieurs chaque jour ſur les Poles du Monde.

20. Les mouvemens de libration ſont ceux que chaque cryſtallin fait faire aux Cieux inferieurs: ſavoir du Septentrion au Midi, & reciproquement du Midi au Septentrion; puis du Couchant au Levant, & reciproquement du Levant au Couchant.

21. Le mouvement regulier, égal, moyen ou mediocre, eſt celui qui en tems égaux parcourt des eſpaces égaux: le mouvement irregulier eſt celui qui en tems égaux ne parcourt pas des eſpaces égaux.

22. Le mouvement vrai ou apparent, eſt l'Arc de l'Ecliptique, qui paroît être parcouru par la Planete ou Aſtre: Par exemple, ſoit l'Ecliptique ABC, & que l'Aſtre A depuis le point A, ait parcouru en certain tems tout l'Arc A B. Cét Arc A B, eſt le mouvement vrai ou apparent de l'Aſtre, on l'appelle vrai ou apparent, parce qu'il peut arriver qu'un Aſtre ne parcoure pas l'Ecliptique; mais qu'il ſemble le parcourir comme dans le Syſteme de Copernic. Voyez la figure 1. ci-aprés.

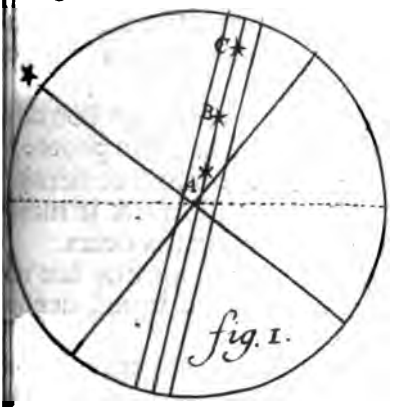


fig. 1.

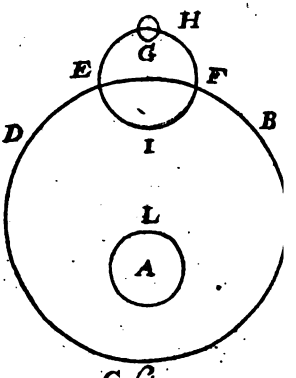


fig. 2.

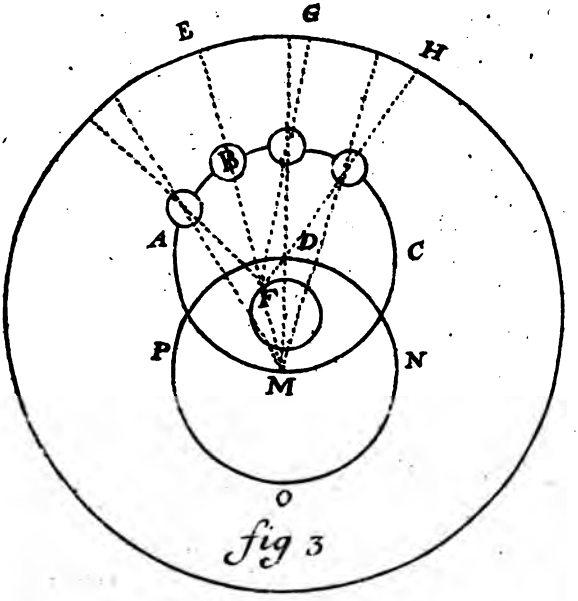


fig 3

Pl. 75.

23. Le cercle équant eſt un cercle excentrique au déferent d'un Epicycle, décrit du point où le mouvement du Déferent paroît regulier. Par exemple ſoit le Déferent A B C, de l'Epicycle B, dont le centre ſoit D, & que le lieu apparent de l'Epicycle B au point du Firmament E, l'œil conſtitué en E, à que mouvement de l'Epicycle trouvera de l'irregularité dans les lieux apparens; comme G H I L, dont arcs ſont inégaux: Et ſi au point M, le mouvement de l'Epicycle paroît regulier dans tous ſes lieux apparens, le cercle décrit de ce point comme centre, & l'intervalle du Déferent, eſt le cercle équant: comme N O P, fig. 3.

24. Proſtapheresſe ou Equation, eſt la difference des mouvemens, moyen & vrai.

25. L'Anomalie eſt le mouvement regulier, par moyen duquel on trouve l'Equation ou Proſtapheresſe. Nous donnerons ailleurs une plus ample explication de ces noms, qui ſont difficiles à concevoir à ceux qui n'ont encore que les premieres idées des Elemens de Mathematique.

26. Une Planete ſe dit directe quand elle avance ſelon la ſuite des ſignes; retrograde quand elle paroît aller contre; ſtationnaire quand elle paroît demeurer en un même endroit: Par exemple, ſoit la Terre A, B C D le Déferent de la Planete, E F ſon Epicycle, G la Planete. Le mouvement ſe faiſant de E en F, la Planete tournant autour de ſon Epicycle paroîtra directe, avançant au point H, puis au point F: Et lorſque elle ſera au point I, elle ſera ſtationnaire; mais retournant au point E, elle paroîtra retrograde à l'œil conſtitué en L.

27. Les Planetes ſe nomment rapides quand leur vrai mouvement excede ſelon la ſuite des ſignes, le moyen mouvement: & on les appelle lentes lorſque le mouvement vray eſt plus lent.

page 205 & 207

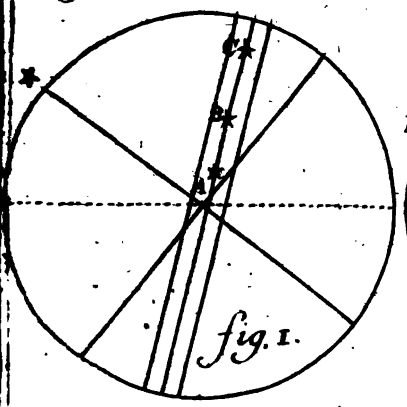
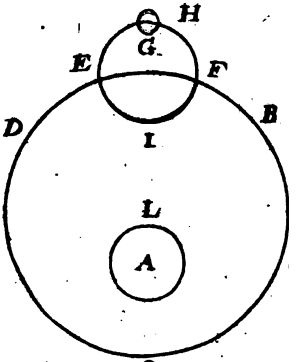


fig. 1.



C fig. 2.

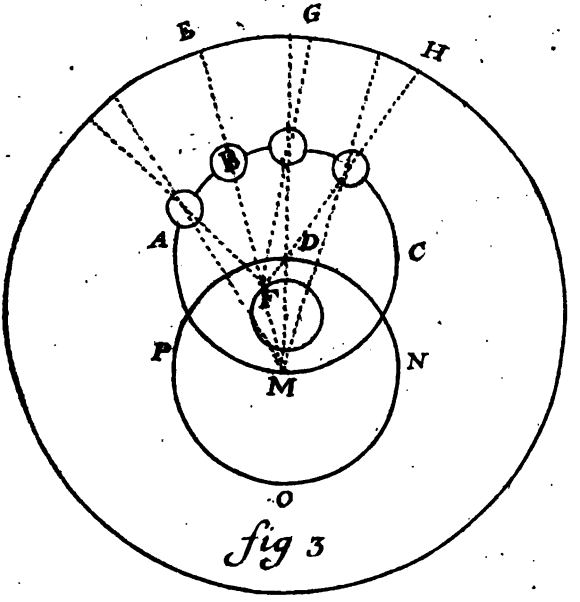


fig 3

Pl. 75.

28. Il y a de deux ſortes de lever & de coucher d
Aſtres, l'un Aſtronomique, & l'autre Poëtique.

29. Le lever aſtronomique ou aſcenſion, eſt l'arc
l'Equateur qui ſe leve avec un Aſtre pardeſſus l'Ho
ſon juſqu'au Meridien : Par exemple l'Arc A B,
l'Aſtre B juſqu'au Meridien D, pardeſſus l'Horiſon E
Fig. 1.

30. Le coucher aſtronomique ou deſcente, eſt l'a
de l'Equateur, qui avec un Aſtre s'abaiſſe du Merid
à l'Horiſon, comme D G, fig. 1.

31. Le lever des Aſtres poëtique eſt l'apparition d'u
Aſtre ſur l'Hemiſphere ſuperieur; & lorſque cét Aſt
ſe leve en même tems que le Soleil, on l'appelle le l
ver coſmique : s'il ſe leve en même tems que le Sole
ſe couche, on l'appelle Lever acronique. Et ſi un Aſt
qui eſt ſur l'Horiſon paroît incontinent aprés que
grande lumiere du Soleil ne l'en empêche plus, ce lev
s'apelle Heliaque. De même le coucher coſmique
fait au coucher du Soleil, le coucher acronique ſe f
au lever du Soleil, & le coucher heliaque ſe fait à
preſence du Soleil, qui par ſa trop grande lumie
empêche d'autres Aſtres d'être vû. La ſeconde figu
repreſente le lever coſmique de la Planete A, & le co
cher acronique, de la Planete B. La troiſiéme figu
repreſente le lever acronique de l'Aſtre C, & le co
cher coſmique de l'Aſtre D. La quatriéme figure r
preſente le lever heliaque des étoiles E & F : & la ci
quiéme, leur coucher heliaque par la preſence du S
leil.

32. Les Planetes ſont appellées orientales ou m
rinales, quand elles ſe levent le matin devant le Sole
ou qu'elles ſont ſur l'horiſon quand le Soleil ſe leve:
on les appelle occidentales ou veſpertines, quand
ſoir elles ſe couchent aprés le coucher du Soleil, o
qu'elles ſont ſur l'horiſon quand le Soleil ſe couche

33. Apog

Page 209

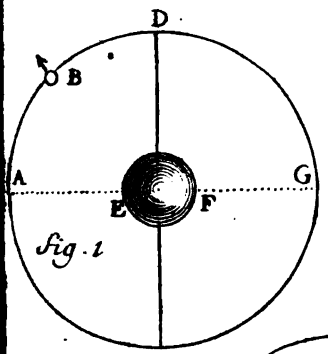


Fig. 1

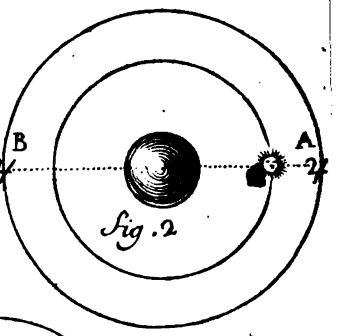


Fig. 2

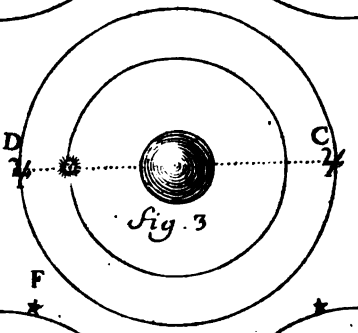


Fig. 3

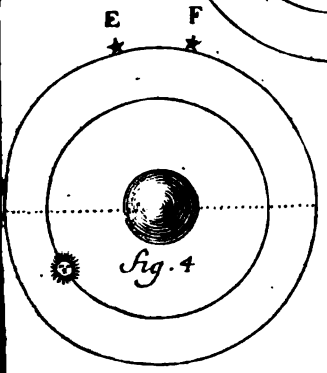


Fig. 4

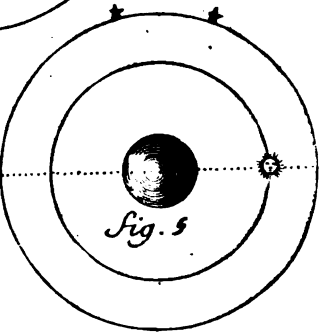


Fig. 5

Pl. 76.

33. Apogée ou Auge d'un Aſtre eſt le point de ſon excentrique le plus éloigné du centre de la terre: comme dans la premiere figure le point A de l'excentrique A B C D.

34. Le Perigée eſt le point de l'excentrique le plus proche du centre de la terre, comme C, fig. 1.

35. L'Apogée de l'Epicycle eſt le point dans ſa ſuperficie le plus éloigné de la terre, & le point le plus proche eſt ſon Perigée, A, eſt l'Apogée, figure 2. & ſon Perigée.

36. La ligne de l'Apogée eſt celle qui eſt tirée du centre de la terre, par le centre de l'excentrique juſqu'au Zodiaque, comme E A, fig. 1.

37. La moitié de l'excentrique compris entre l'Apogée & le Perigée, s'appelle Deſcendante; & celle du Perigée à l'Apogée, s'appelle Aſcendante: A C, fig. eſt la moitié Deſcendante: C A, eſt la moitié Aſcendante.

38. La ligne de l'excentricité eſt la ligne compriſe entre le centre de la terre & le centre de l'excentrique comme E F, fig. 1.

39. La declinaiſon d'un Aſtre eſt l'Arc compris entre l'Aſtre & l'Equateur: Nous en avons déja parlé.

40. La longitude d'un Aſtre eſt l'Arc compris entre l'Aſtre & le point équinoxial Occidental, comme l'Arc A B, fig. 3.

41. La latitude d'un Aſtre en l'Arc compris depuis l'Aſtre declinant du côté du Pole juſqu'à l'Ecliptique comme C D, fig. 3.

42. Les differentes ſituations des Aſtres l'un à l'autre, ſont, le Trine, le Quarré, le Sextil, l'Oppoſition & la Conjonction. Le Trine de deux Aſtres eſt leur éloignement d'un Arc de 120. degrez: comme A B C, fig. Le Quarré eſt l'Arc de diſtance de 90. degrez, A D. Le Sextil eſt l'Arc de diſtance de 60. degrez A G B E C. L'Oppoſition eſt diſtante de 180. degrez. La Conjonction eſt la ſituation de deux Aſtres l'un ſur l'autre dans un même degré, comme A I. Le Trine ſe marque ainſi △ le Quarré □ le Sextil *. L'Oppoſition & la Conjonction ☍ ☌

page 211

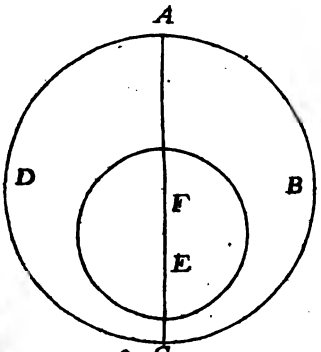


fig. 1.

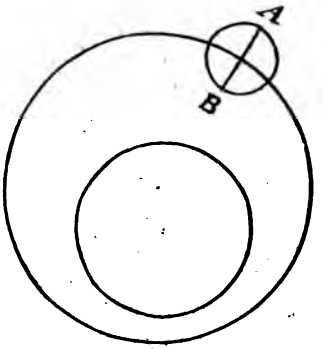


fig. 2.

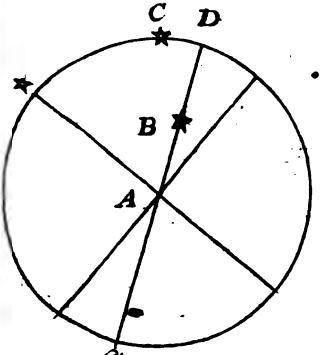


fig. 3.

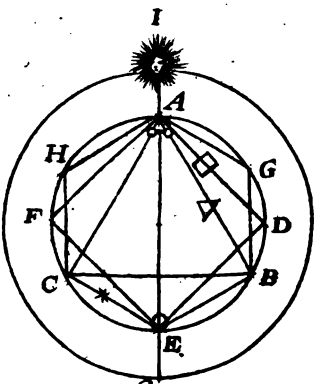


fig. 4.

plan. 77.

CHAPITRE XXI.

De la Chronographie ou Chronologie.

1. LA Science des temps, s'apelle du nom de Chr
nographie ou Chronologie, comme qui dir
la Deſcription des temps: l'on en compte de trois ſo
tes; ſavoir l'Aſtronomique, l'Hiſtoriq, & la Phyſiq
La Chronologie Aſtronomique conſidere ſeuleme
la meſure des temps; l'Hiſtoire raconte les divers é
nemens arrivez en certains temps, & la Phyſique co
ſidere la nature, & les proprietez du temps: nous
devons ici traiter que de l'Aſtronomique.

2. Le jour eſt la plus commune & la plus reçûë
toutes les meſures du temps; & c'eſt la durée du te
qui s'écoule pendant la revolution entiere du So
autour de la terre: L'on en diſtingue de deux ſor
qui ſont le jour naturel, & l'artificiel.

3. Le jour naturel, que l'on appelle entier, eſt la
volution du Soleil autour de la terre, juſqu'à ce q
arrive au même point d'où il étoit parti. Le jour ar
ficiel eſt le temps que le Soleil demeure ſur l'horiſo
le jour naturel eſt par tout égal; l'artificiel change ſi
vant les divers Climats & les diverſes Saiſons de l'a
née: Il n'y a que les jours des Equinoxes auſquels l
jours artificiels ſont égaux dans tous les endroits
Globe, excepté aux Poles, où dans ces deux jours
Soleil éclaire l'un & l'autre Pole entierement, & pe
dant 24. heures.

4. Les Nations ne ſe ſont pas accordées pour le co
mencemẽt du jour: Les Italiens, la Boëme, & la Sile
le commencent au lever du Soleil, comme le faiſoi
les Atheniens & les Juifs: Les Perſes au contraire,
les Babyloniens le commençoient au coucher du
leil. Mais les Mathematiciens ſe ſont accordez d
commencer ou à minuit ou à midi, c'eſt-à-dire, dep
que le Soleil eſt au Meridien juſqu'à ce qu'il y reto
ne: Et l'Egliſe commence ſon jour d'une minuit à l'a

te, depuis que Jesus-Christ nôtre Sauveur vint au monde à minuit.

5. L'on partage le jour en 24. portions de temps gales, à qui l'on a donné le nom d'heures. L'on parge l'heure en 60. parties, que l'on nomme minutes, haque minute en 60. secondes, & ainsi de 60. en 60. tant qu'il est necessaire, & qu'on le peut pour avoir derniere exactitude; donnant à la troisiéme division nom de troisiéme; à la quatriéme le nom de quarou quatriéme, & ainsi de suite.

6. Les Nations ne se sont pas accordées, non plus au commencement du jour, pour la division & le mbre de ses parties. Generalement parlant, presque us s'accordent presentement pour la division en 24. ures: Mais les Juifs autrefois, & les Païs Orientaux isoient le jour artificiel en 4. portions, & chaque tion en 3. heures, qui faisoient 12. heures pour t le jour, & d'autant que les jours, pendant le urs de l'année étoient inégaux, leurs heures l'étoiét roportion: Ils divisoient pareillement la nuit en 4. lles, chaque veille en 3. heures, qui augmentoient ili ou diminuoient à proportion des jours.

7. La semaine est une revolution de sept jours, qui mmencent immediatement par où ils finissent: l'Esse nomme le premier jour de la semaine Dimanche le jour du Seigneur, en memoire des Mysteres arriz ce jour là; les autres six jours sont nommez Fes: Et le civil a retenu les noms des Payens, qui avoiét sacrez chaque jour de la semaine à quelqu'une de urs Divinitez, ou au nombre des sept Planetes: Le mier s'appelle le jour du Soleil; le second Lundi, le jour de la Lune; le troisiéme Mardi ou le jour de rs; le quatriéme Mecredi ou jour de Mercure; le quiéme Jeudi ou le jour dedié à Jupiter; le sixiéme ndredi ou le jour dedié à Venus; & le septiéme Sadi ou le jour de Saturne. Ce nom de Samedi est ve des Juifs, qui en faisoient leur jour de repos, ainsi Dieu leur avoit commandé.

8. Le mois eſt la revolution d'environ 27. à 3
jours ſuivant les differens mois, car on en conte
pluſieurs ſortes; ſavoir le mois Solaire & le mois L
naire, & chaque eſpece en a encore d'autres.

9. Le mois Solaire eſt une revolution du Soleil, ſo
le Zodiaque, de 30. degrez en parcourant chaque ſi
ne du Zodiaque: on le diviſe en Periodique & Uſuel

10. Le mois Periodique du Soleil eſt préciſement
tems que le Soleil met à parcourir les trente degr
de chaque ſigne. Ces mois ne ſont pas égaux, car
Soleil demeure plus de temps dans de certains ſign
que dans d'autres: Ce que nous expliquerons ailleu

11. Le mois Uſuel eſt un certain nombre de jou
que l'on a fixé pour la commodité du public: C
mois ſont ceux que nous avons dans le Calendrier
ſavoir, pour Janvier 31. jours; pour Février 28. pou
Mars 31. pour Avril 30. pour Mai 31. pour Juin 3
pour Juillet 31. pour Août 31. pour Septembre 3
pour Octobre 31. pour Novembre 30. pour Decem
bre 31.

12. Les Romains diviſoient leurs mois en trois p
ties, celle qui ſuivoit les Calendes juſqu'aux Non
depuis les Nones juſqu'aux Ides; & depuis les I
juſqu'aux Calendes du mois ſuivant. Les Calen
ſont tous les premiers jours de chaque mois; les No
ſont le cinquiéme, & les Ides le treiziéme: l'on exc
te quatre mois de l'année, qui ſont Mars, Mai, Jui
& Octobre, auſquels les Nones ſont le ſeptiéme
mois, & les Ides le quinziéme: les autres jours ſe
toient du nombre des jours qui precedoient ou
Calendes, ou les Nones, ou les Ides; de ſorte que l
cond jour du mois, ſe nommoit le quatriéme
nes: & aux mois exceptez, il ſe nommoit le
avant les Nones, & ainſi diminuant juſqu'aux
qu'ils nommoient le jour des Nones: le le-

des Nones ſe nommoit le huit des Ides, & ainſi de ſuite, le ſeptiéme, le ſixiéme, &c. juſqu'aux 13. ou 15. du mois, qu'ils nommoient le jour des Ides: le 13. aux mois ordinaires, & le 15. aux mois exceptez: Le lendemain des Ides ſe contoit du nombre qui reſtoit dans le mois; ainſi comme Février n'avoit que 28. jours, le lendemain des Ides s'appelloit le 15. de devant les Calendes de Mars; & en Janvier qui a 31. jours, le lendemain des Ides s'appelloit le 18. devant les Calendes, dans les mois exceptez, le lendemain des Ides s'apelloit le 16. ainſi en diminuant juſqu'au jour des Calendes: l'Egliſe a conſervé cet uſage dans ſes mois.

13. Le mois Lunaire eſt une revolution de la Lune, juſqu'à ce qu'elle retourne au même point du Zodiaque ou de ſa conjonction avec le Soleil; & il y en a de deux ſortes, le Periodique & le Synodique.

14. Le mois Periodique de la Lune, eſt le temps qu'elle employe à parcourir dans ſon mouvement propre, tout le cercle du Zodiaque; ce qu'elle fait en 27. jours ſept heures, & quelques minutes.

15. Le mois Synodique, eſt le temps que la Lune met d'une conjonction du Soleil à l'autre; ce qu'elle fait en 29. jours 12. heures & 44. minutes, un peu plus.

16. Les Saiſons ſont compoſées chacune de trois mois, & l'on en conte 4. ſavoir le Printemps qui commence le 21. Mars, lorſque le Soleil entre au ſigne du Belier, & il finit le 22. de Juin, lorſque le Soleil entre au ſigne de l'Ecreviſſe; & alors commence la ſeconde Saiſon, appellée l'Eté, qui finit le 23. de Septembre, que le Soleil entre dans le ſigne de la Balance, auquel commence la troiſiéme Saiſon de l'année que l'on appelle l'Automne, & elle finit pa-

reillement au 22. de Decembre, que le Soleil ſatrouue dans le ſigne du Capricorne, & pour lors commence l'Hyver, qui dure juſqu'au 21. de Mars que le Soleil r'entre au ſigne du Belier.

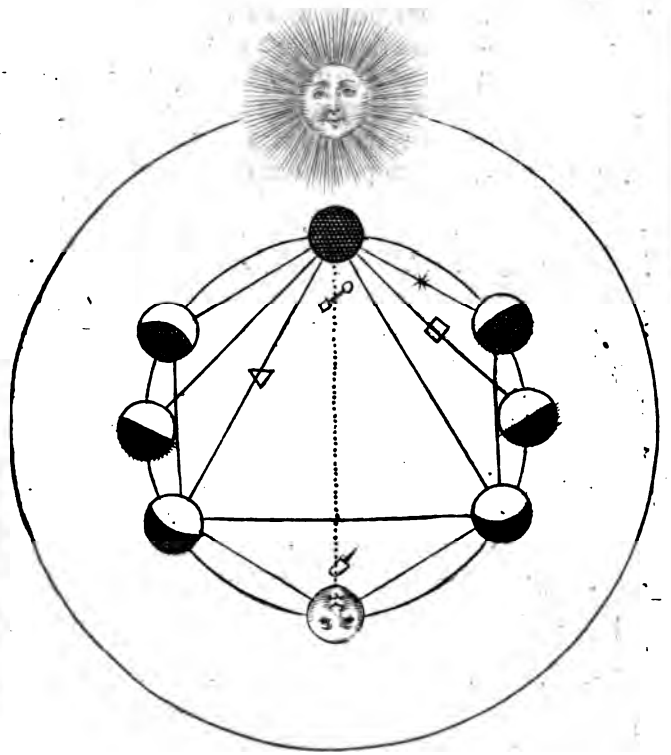
17. Chaque mois a ſon ſigne particulier du Zodiaque; ſavoir le Belier pour le 21. de Mars juſqu'au 21. d'Avril; le Toureau depuis le 21. d'Avril juſqu'au 22. de Mai; les Gemeaux depuis le 22. de Mai juſqu'au 22. de Juin; l'Ecreviſſe depuis le 22. de Juin juſqu'au 23. de Juillet; le Lion depuis le 23. Juillet juſqu'au 23. d'Août; la Vierge depuis le 23. d'Août juſqu'au 23. de Septembre; la Balance depuis le 23. Septembre juſqu'au 23. Octobre; le Scorpion depuis le 23. Octobre juſqu'au 23. Novembre; l'Archer au 23. Novembre; le Capricorne au 22. Decembre; le Verſeau au 21. Janvier; & les Poiſſons au 19. de Février.

18. L'on conte les Equinoxes au mois de Mars & de Septembre le 21. & 22. l'Equinoxe de Mars s'apelle l'Equinoxe du Printemps; & celui de Septembre l'Equinoxe d'Automne.

19. Les Solſtices ſe contentauſſi au mois de Juin & de Decembre le 22. de chaque mois, le premier s'appelle Solſtice d'Eté, & le ſecond Solſtice d'Hyver.

20. A chaque mois Synodique de la Lune, elle paroît differemment éclairée, ſelon qu'elle eſt éloignée differemment du Soleil; de ſorte qu'à ſa conjonction avec le Soleil, elle ne paroît point du tout; Aux ſextils elle paroît en croiſſant; aux quadratures elle paroît à moitié; aux trines on la void comme boſſuë, & dans l'oppoſition elle eſt totalement éclairée. La figure ſuivante la repreſente dans toutes ſes differences: La conjonction s'appelle Nouvelle Lune; la premiere quadrature s'appelle Premier Quartier; l'oppoſition Pleine Lune; & la ſeconde quadrature s'appelle dernier quartier.

page. 217.



plan. 78.

21. L'Année eſt la revolution des douze mois de l'année; & l'on en conte de trois ſortes, la Lunaire, la Solaire & la Siderée.

22. L'Année Lunaire eſt la revolution de douze mois Synodiques ou 354. jours.

23. L'Année Solaire, eſt le tems que le Soleil employe à parcourir le Zodiaque, d'un des Solſtices au même ou de l'un des points de l'équinoxe juſqu'au même point: Elle eſt de 365. jours 5. heures 49. minutes, ſuivant les plus exactes obſervations.

24. L'Année Syderée, eſt l'eſpace du temps que met le Soleil, partant d'une étoile fixe à retourner à la même étoile: cette Année eſt plus grande que la Solaire, parce que les étoiles vont plus vîtes dans leur mouvement diurne que le Soleil: Elle eſt compoſée de 365. jours 6. heures 9. minutes 26. ſecondes, & 43. troiſiémes, ſuivant Herigone.

25. L'on n'a pas reconnu de tout temps la veritable quantité de l'Année Solaire, ce qui a donné occaſion à differentes ſortes d'années dont on s'eſt ſervi dans les tems paſſez: La premiere eſt la commune, ou l'année Egyptienne, que l'on conte de 365. jours préciſement; la ſeconde eſt l'année Julienne, qui eſt de 365. jours & ſix heures: Cette derniere eſt trop grande, & la premiere trop courte: La troiſiéme enfin eſt la Gregorienne, qui eſt la plus reçûë, & qui contient (comme nous avons dit) 365. jours, 5. heures, 49. minutes.

26. Le ſurplus des 365. jours dans l'année eſt ce qui a donné occaſion aux années biſſextiles, dont le nombre des jours eſt de 366. jours préciſement: ces années biſſextiles arrivent de 4. ans en 4. ans, parce que les 6. heures environ de ſurplus aprés 4 années font 24. heures, qui valent un jour, que l'on ajoûte au mois de Février, lequel par là a 29. jours chaque année biſſextile: L'on lui a donné ce nom de Biſſextile, parce que ces années-là, l'on conte au mois de Février deux fois le ſixiéme des Calendes; de ſorte qu'aprés avoir dit une fois *Sexto Calendas*, le lendemain l'on dit, aux Années Biſſextiles, *Biſſexto Calendas Martii*.

27. Mais parce que le ſurplus de chaque année n'eſt pas préciſément de 6. heures, & que dans la ſuite des temps l'on contoit plus de jours qu'il ne faloit, le Pape Gregoire l'an 1582. reforma cet erreur, & retrancha dix jours du mois d'Octobre, & ordonna que de cent ans en cent ans on retrancheroit un jour. Voilà en quoi conſiſte la fameuſe reformation du Calendrier Julien par le Pape Gregoire, qui pour cette raiſon a donné ſon nom au Calendrier que nous ſuivons: Et comme les Peuples qui ne ſont point ſoûmis à la Juriſdiction du Pape n'ont pas voulu ſuivre cette reformation, la plûpart des Orientaux content dix jours plûtôt que les Catholiques.

28. L'Année Lunaire eſt moindre de onze jours que l'Année Solaire, & ce ſont ces onze jours de ſurplus que l'Année Solaire a pardeſſus la Lunaire, qui ont donné occaſion à l'Epacte; de ſorte que l'on ajoûte d'année à autre le nombre d'onze à l'Epacte de la precedente, ce qui fait en trois années le nombre de 33. & par conſequent de trois ans en trois ans il y a une Lunaiſon pour la troiſiéme année; ce qui fait que d'abord que cette Lunaiſon arrive, l'on retranche de l'Epacte 30. jours, & l'on ne retient que le ſurplus; ainſi que nous l'expliquerons ailleurs plus à fond, en donnant la maniere de conter la Lune par l'Epacte.

29. Apocataſtaſe eſt une revolution ou eſpace de temps que les Planetes mettent, ou à ſe rencontrer au même point du Zodiaque, d'où elles étoient parties, ou à ſe rencontrer en conjonction: Il n'y a que les Aſtronomes qui ſupputent ces ſortes de revolutions, dont nous parlerons cy-aprés.

30. L'on ſe ſert encore d'autres meſures plus grandes que celles des années dont nous venons de parler, qui ont été fort en uſage parmi les Anciens, & dont la plûpart ſont encore en uſage: Nous les reduirons à 9. S oir 1. l'Olimpiade des Grecs. 2. Le Luſtre des R o n s. 3. L'année Sabatique des Juifs. 4. l'Indiction. 5 .e nombre d'Or & Cycle Lunaire. 6. Le Cycle S e ou Alphabetique. 7. L'année Jubilaire des J 8. Les Siécles. 9. Les Ages.

31. L'Olimpiade eſt la revolution de cinq ans en 5. ans inclusivement, auſquels ſe celebroient les jeux Olimpiques ſi renommez dans l'Hiſtoire.

32. Le Luſtre des Romains étoit une pareille revolution de 5 en 5 ans, à la fin deſquels les Romains exigeoient le tribut du Peuple, & en renouvelloient le dénombrement, d'où eſt venu le nom de Luſtre.

33. L'année Sabatique étoit la ſeptiéme année, dans laquelle les Juifs laiſſoient repoſer la terre.

34. L'Indiction eſt une revolution de 15 en 15 ans, dont l'Empereur Conſtantin voulut qu'on ſe ſervît à la place des Luſtres. L'Egliſe Romaine ſe ſert dans ſes meſures des temps d'une ſemblable revolution, à qui elle a donné pareillement le nom d'Indiction Romaine.

35. Le nombre d'Or ou Cycle Lunaire, eſt la revolution de 19. ans, aprés leſquels la Lune renouvelle le même jour qu'elle avoit fait 19. ans auparavant: Methon Aſtronome Grec, eſt le premier qui l'a obſervé; & parce que cette obſervation a été jugée tres-utile & remarquable, elle fut écrite en lettres d'or, d'où cette revolution de ces 19. nombres depuis 1. juſques à 19. a été apellée le nombre d'Or.

36. Le Cycle Solaire ou Alphabetique, eſt une revolution de 28. années, aprés leſquelles les ſept lettres alphabetiques a, b, c, d, e, f, g, recommencent à marquer les mêmes jours de la ſemaine; ce qui arriveroit de 7 en 7 ans, ſi les années biſſextiles n'en troubloient point l'ordre.

37. L'Année jubilaire des Juifs étoit la cinquantiéme d'une Revolution de 50 en 50 ans, dans laquelle les eſclaves recouvroient la liberté, & les debiteurs tous leurs biens.

38. Le Siécle eſt la Revolution de 100 ans en 100 ans.

39. L'âge eſt la Revolution de 1000. ans. Les Hiſtoriens cependant font leurs âges plûtôt par raport aux grands evenemens qui ſont arrivez, qu'à un certain nombre déterminé d'années. En quoi l'on peut lire les Cronologiſtes hiſtoriques.

40. Eres ou Epoques, ſont les differens commencemens d'où l'on commence à meſurer les tems. Ainſi preſque chaque Nation a eu ſon Ere particuliere. Ainſi les Juifs en ont eu cinq depuis la creation du monde juſqu'à la naiſſance de Jeſus-Chriſt, depuis laquelle nous contons, & qui fait la ſixiéme Epoque ſacrée. Les Caldéens, les Perſans, les Grecs, les Romains en ont eu d'autres que nous ne raporterons pas, d'autant qu'elles regardent plûtôt l'Hiſtoire que les Mathematiques.

CHAPITRE XXII.

De la Gnomonique.

1. LA Gnomonique eſt la Science des Horloges, conſtruits ſur toutes ſortes de Superficies planes ou courbes. Cette Science repreſente ſur divers plans toute la Sphere avec ſes points, lignes, cercles & generalement tout ce que nous avons décris au Traité de la Sphere.

2. L'on diſtingue de deux ſortes d'Horloges ou Quadrans ſolaires, les uns ſont ſtables, & les autres pendules. Ces derniers ſont ainſi appellez, parce qu'on les tient ſuſpendus à la main comme les cylindres & les aneaux aſtronomiques. Les premiers ſont fixes & demandent une certaine ſituation pour marquer les heures.

3. Il y a de ſept ſortes de plans, ſur leſquels l'on décrit ordinairement des Horloges: Savoir l'Equinoxial, qui eſt parallele à l'Equateur: l'Horiſontal qui eſt parallele à l'Horiſon: Le Vertical qui eſt parallele au Cercle qui paſſe par les Poles de l'Horiſon & les points équinoxiaux: le Meridien qui eſt parallele au Meridien: le Declinant qui decline du Vertical: l'Incliné qui panche obliquement ſur l'Horiſon: & enfin le Declinant incliné qui participe de ces deux.

L'on diſtingue dans le Vertical le Plan Septentrional & Meridional; dans le Meridien l'Oriental &

l'Occidental, de même dans les Plans déclinans & inclinez, ſelon la partie qu'ils regardent ils prennent leurs noms. Il ſeroit inutile de repreſenter ici ces ſortes de Plans en perſpective ou en figure, nous les déſignerons aſſez par des exemples veritables, lorſque j'expliqueray ces ſortes de termes; & ceux qui n'entendront pas mes explications, peuvent ſe les imaginer plus facilement par la deſcription que je viens d'en faire, que par les figures dans une planche.

5. Ce qu'il y a de plus important à concevoir dans cette Science, eſt que l'on ſuppoſe que la Terre n'eſt qu'un point à l'égard de l'étenduë immenſe des Cieux. Cette ſuppoſition, quoique fauſſe en elle-même, ne laiſſe pas d'être reçûë; parce que toute vaſte que nous paroiſſe la terre, elle eſt ſi petite en comparaiſon de tous les cieux, qu'elle peut paſſer pour un point, outre que dans cette ſuppoſition l'on ne laiſſe pas que d'avoir les Quadrans dans toute leur juſteſſe.

6. Suivant cette ſuppoſition le Quadran ſe conçoit comme un Plan, ſur lequel ſe décrivent tous les rayons qui paſſent par le centre de la terre juſqu'à la rencontre de ce Plan. Cela ſupoſe ce que nous avons dit dans la Perſpective, ce que je ne repete pas ici, crainte d'être trop long.

7. Suivant ces diverſes ſuppoſitions l'on diſtingue pluſieurs points & pluſieurs lignes dans le Quadran, dont nous parlerons ici du moins des principaux, nous reſervans d'en parler plus amplement dans nôtre Traité de la Gnomonique.

8. Le centre du Quadran eſt le point dans ſon plan, par lequel l'on conçoit paſſer l'Axe du Monde.

9. Le Pole du Quadran eſt le Pole du grand Cercle parallele à ſon plan.

10. Le Style perpendiculaire eſt la ligne droite que l'on conçoit tirée perpendiculairement du centre de la terre ſur le plan du Quadran.

11. Style oblique, eſt la ligne oblique tirée du centre de la terre ſur le Plan du Quadran, parallelement à l'Axe du Monde.

12. L'extremité du Style de quelque maniere qu'il ſoit, perpendiculaire ou oblique, repreſente toûjours le centre de la Terre.

13. Le Cone de lumiere eſt celui que décrit le Soleil par ſon mouvement diurne autour du centre de la Terre.

14. Le Cone d'ombre, eſt celui que décrit l'extremité du Style qui repreſente le centre de la Terre ſur le Plan du Quadran.

15. La ligne horiſontale du Quadran, eſt la ligne droite par laquelle un Plan parallele a l'horiſon, & paſſant par le ſommet du Style, coupe le Plan du Quadran.

16. La ligne meridienne du Quadran eſt la ligne droite, par laquelle le Plan du Meridien paſſant par le ſommet du Style, coupe le Plan du Quadran.

17. La ligne ſubſtilaire eſt celle par laquelle le Meridien coupe le Plan du Quadran.

18. La ligne équinoxiale, eſt la ligne droite par laquelle un Plan perpendiculaire à l'Axe du Monde, coupe le Plan du Quadran en paſſant par le ſommet du Style.

19. Les cercles des heures, ſont douze grands cercles qui paſſent par les Poles du Monde, & diviſent l'Equateur & ſes paralleles en 24. parties égales, qui marquent les 24. heures du jour. Ces cercles dans leur projection ſur le Plan du Quadran, ſont repreſentez par des lignes droites tirées du centre du Quadrā qui en repreſēte les Poles: de ſorte que les lignes horaires ſont les communes ſections du Plan du Quadran, & des moitiez des cercles horaires opoſez au Soleil.

20. Les Rayons des Signes, ſont les lignes droites tirées du centre de la Terre, ou du ſommet du Style aux commencemens des Signes du Zodiaque.

21. Les Arcs des Signes du Zodiaque, ſont les communes ſections du Plan au Quadran & des Cones, qui ont pour baſes les paralleles des Signes.

Nous repreſenterons toutes ces lignes & ces points ſur differens Quadrans, lorſque nous expliquerōs tous

ces termes, ce qui ſera plus facile que de les repreſen
en planche.

Nous remarquerons que l'on ne fait pas ſeulem
des Quadrans ſuivant le rayon optique, ainſi que n
venons de les décrire ; mais on en peut faire auſſi p
des rayons briſez & refléchis, comme nous le diro
au Traité de la Gnomonique, où nous donnerons
regles de conſtruire toute ſorte de Quadrans. Vo
ce qui regarde la Geometrie & l'Aſtronomie, les de
premieres Sciences de nôtre Mathematique : Il
temps d'expliquer les termes de l'Arithmetique &
la Muſique dans nôtre ſeconde Partie.

SECONDE PARTIE.

Où ſont expliqués les termes de l'Arithmetique & de la Muſique, les deux dernieres Parties des Mathematiques.

LEs Mathematiques, comme nous l'avons dit au commencement de cét Ouvrage, conſiderent la Grandeur & les Nombres. Toute nôtre premiere Partie a été de la Grandeur; il ne nous reſte que les Nombres qui appartiennent à l'Arithmetique & à la Muſique. Nous remarquerons à l'égard de la Muſique, que le Mathematicien ne s'attache pas à conſiderer les ſons qui ſont les differentes harmonies de cette Science; mais ſeulement les differens nombres ou proportions que les ſons peuvent avoir enſemble pour former des conſonances ou diſſonnances; ainſi que nous l'expliquerons dans la ſuite.

2. Il y a de deux ſortes d'Arithmetique, la ſimple & l'algebrique.

3. L'Arithmetique ſimple eſt la Science des Nombres en general: & l'Arithmetique Algebrique eſt la Science des Nombres appliquez à toutes choſes: nous en traiterons dans un Chapitre different. Et parce que l'Arithmetique, ſoit ſimple ou algebrique, demande la connoiſſance des proportions, nous en ferons un Chapitre particulier. Aprés quoi nous finirons cette Partie par une briéve explication de ce que les Mathematiciens conſiderent dans la Muſique. Nous aurons donc cinq Chapitres: le premier ſera de l'Arithmetique ſimple en general: le ſecond ſera des proportions: le troiſiéme des differentes Regles d'Arithmetique: le quatriéme de l'Algebre & le cinquiéme de la Muſique.

CHAPITRE I.

De l'Arithmetique ſimple en general.

1. L'Unité eſt du nombre des choſes qui ſe conçoivent plus facilement par la ſeule notion que l'on en a que par aucune définition ; les Mathematiciens cependant la définiſſent ordinairement, ce par quoi chaque choſe eſt apellée une. L'unité répond au point qui n'eſt rien en apparence, & qui fait le commencement de toute grandeur : ainſi l'unité eſt la moindre choſe que l'on conçoive dans le nombre, & le commencement de tout nombre.

2. Le nombre eſt une multitude ou aſſemblage de pluſieurs unitez : comme 4, 5, 6, &c. 4, eſt compoſé de quatre unitez : 5, de cinq, &c.

3. Pour repreſenter toutes ſortes de nombres, nous nous ſervons de dix caracteres que nous avons empruntez des Arabes. Ces caracteres ſont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Le premier marque l'unité : le ſecond marque le nombre de deux, ou l'aſſemblage de deux unitez : le troiſiéme repreſente le nombre de trois : le quatriéme celui de quatre : le cinquiéme celui de cinq : le ſixiéme celui de ſix : le ſeptiéme celui de ſept : le huitiéme celui de huit : le neuviéme celui de neuf, & le dixiéme appellé zero ne ſignifie rien de lui même ; l'on s'en ſert cependant pour faire valoir les autres chiffres, ainſi que nous l'allons expliquer.

4. Pour nombrer juſqu'à l'infini, nos Anciens pour une plus grande facilité, ſe ſont contentez de conter juſqu'à dix ; ce qui répond au nõbre naturel des doigts que nous avons aux mains ; & pour continuer de plus grands nombres aprés avoir conté juſqu'à dix, ils ont conſideré ce nombre de dix comme l'unité, & lui ont donné le nom de dixaine ; deux dixaines comme deux, & on l'apelle vingt : trois dixaines comme le nombre de 3. & on l'apelle trente : quatre dixaines comme le nombre de 4. à qui l'on a donné le nom de quarante : cinq dixaines le nom de cinquãte : à ſix dixaines le nom

de ſoixante : à ſept dixaines le nom de ſeptante: à huit dixaines le nom de huitante : à neuf dixaines le nom de nonante,& à dix dixaines le nom de cent. De même maniere ils ont conſideré cent comme l'unité, & en ont conté juſqu'à dix, à qui ils ont donné le nom de mille. Et contant par leurs doigts une quatriéme fois, ils ont fait les dixaines de milles, & en ſuite les centaines de milles, les millions, les dixaines & centaines de millions ; & en dernier lieu les milliards, aprés quoy ils ont recommencé à dire dixaine de milliards, centaines de milliards, mille de milliards : millions de milliards ; milliard de milliards, & ainſi à l'infini. La Table ſuivante repreſente ces noms chacun en leur rang.

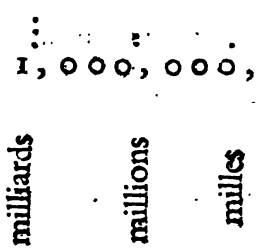
1. Rang ; unités.
2. Rang, dixaines.
3. Rang, centaines.
4. Rang, milles.
5. Rang, dixaines de milles.
6. Rang, centaines de milles.
7. Rang, millions.
8. Rang, dixaines de millions.
9. Rang, centaines de millions.
10. Rang, milliards.
11. Rang, dixaines de milliards.
12. Rang, centaines de milliards.
13. Rang, milles de milliards.
14. Rang, dixaines de milles de milliards.
15. Rang, centaines de milles de milliards.
16. Rang, millions de milliards.
17. Rang, dixaines de millions de milliards.
18. Rang, centaines de millions de milliards.
19. Rang, milliards de milliards.
20. Rang, dixaines de milliards de milliards.
21. Rang, centaines de milliards de milliards.
22. Rang ; mille de milliards de milliards, &c.

5. Pour donc exprimer par les dix Caracteres qui nous avons raporté cy-deſſus, toutes ſortes de nombres, ils les ont ſituez en differentes colomnes ou claſſes, & ont commencé à la maniere des Arabes, de droite à gauche; ainſi la premiere colomne repreſente les unités, la ſeconde les dixaines, & la troiſiéme les centaines, ſuivant les rangs que nous venons de marquer dans la Table précedente. Et où les rangs n'étoient remplis d'aucun nombre, ils y ont mis le zero pour tenir ſeulement le rang ou la place que tiendroient d'autres nombres, chacun dans ſon eſpece, s'il y en avoit. Par exemple, je veux écrire le nombre de quarante mille, deux cens & vingt-cinq, je remarque d'abord en quel rang doit être quarante milles; je trouve que c'eſt au cinquiéme rang où ſont les dixaines de milles, & je poſe par conſequent 4 au cinquiéme rang, & parce qu'il n'y a point d'unitez de mille, je poſe au quatriéme rang un zero: au troiſiéme rang qui eſt pour les centaines, je mets un 2 qui me marque deux cens: au ſecond rang qui eſt pour les dixaines, je mets encore un 2 pour vingt: & au premier rang, je poſe un 5 pour les cinq unités, comme il eſt marqué ci-deſſous.

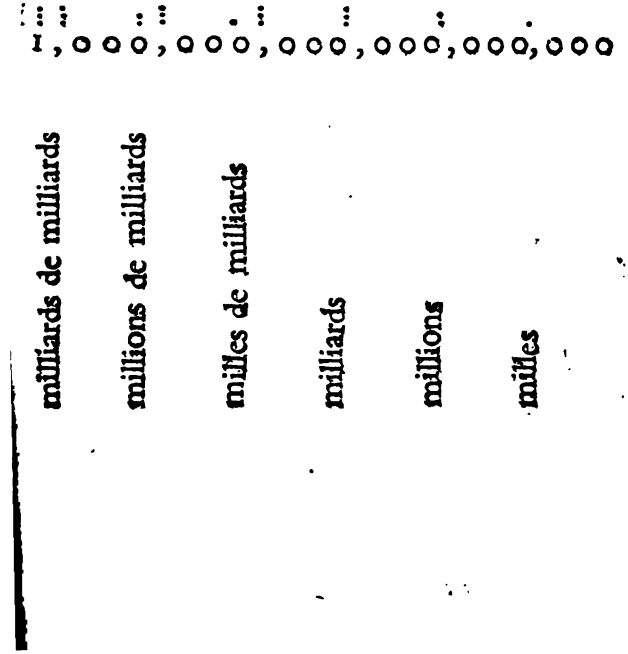
5. rang.	4 rang.	3. rang.	2. rang.	1. rang.
4	0	2	2	5

6. Si vous voulez lire facilement un grand nombre de chiffres poſées, ſeparez-les de trois en trois par une petite virgule: & au deſſus de la premiere, marquez un point pour les milles; à la ſeconde vir-

gule, deux points pour les millions; à la troiſiéme trois points pour les milliards. En cette ſorte :



Pour les milles de milliards, un point devant trois; pour les millions de milliards, deux points devant trois; pour les milliards de milliards, deux fois trois points, ainſi de ſuite : vous reſouvenant qu'un point ſeul marque les milles; deux points les millions; & trois points les milliards. De ſorte que ſuivant leurs differentes ſituations, vous lirez differemment : Cette Table l'exprimera mieux que le diſcours.



Vous remarquerez que l'intervale de ces differens points, marque trois rangs ou colomnes differentes, dont la premiere marque les unités de milles ou de millions, ou de milliards, ſuivant l'intervale où il eſt: la ſeconde colomne marque les dixaines: & la troiſiéme les centaines. Suppoſons donc à lire les chiffres ſuivans.

194,567,890,456,784,595.

Premierement je marque mes virgules & mes points, & je dis comme ſi je ne voyois que ces trois premiers chiffres 194, cent nonante-quatre millions, de milliards, & en ſuite comme s'il n'y avoit que les trois ſuivans 567, je dis cinq cens ſoixante-ſept milles de milliards; de même pour les trois ſuivans 890, huit cens nonante milliards; pour les trois qui ſuivent 456, quatre cens cinquante-ſix millions; & pour 784, ſept cens huitante-quatre milles; & enfin pour les trois derniers 595, cinq cens nonante-cinq. De ſorte que les chiffres cy-deſſus écris ſont cent nonante-quatre millions de milliards, cinq cens ſoixante-ſept mille de milliards, huit cens nonante milliards, quatre cens cinquante-ſix millions, ſept cens huitante-quatre milles, cinq cens nonante-cinq.

7. Les Romains ſe ſont ſervis d'autres caracteres; il écrivoient I, pour l'unité 1. II, pour le nombre de 2. III, pour le nombre de 3. V, pour le nombre de 5. X pour 10. L pour 50. & C pour cent. I C, ou D, pour 500. M pour 1000. Avec ces differentes ſortes de lettres, ils repreſentoient toutes ſortes de nombres, comme repreſente la table ſuivante.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17.
I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX. X. XI. XII. XIII. XIV. XV. XVI. XVII.

18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30.
XVIII. XIX. XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. XXV. XXVI. XXVII. XXVIII. XXIX. XXX.

34. 35. 39. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100.
XXXIV. XXXV. XXXIX. XL. L. LX. LXX. LXXX. XC. C.

200. 300. 400. 500. 600. 1000. 500.
CC. CCC. CCCC. IC. ou D. IↃC. ou DC. M. ou CIↃ. IↃↃ.

100000. 50000. 100000. 1000000. 1000000000.
CCIↃↃ. IↃↃↃ. CCCIↃↃↃ. CCCCIↃↃↃↃ. CCCCCIↃↃↃↃↃ.

5000000000. 10000000000.
IↃↃↃↃↃ. IↃↃↃↃↃↃ. &c.

8. Lorſque deux nombres ſont comparés enſemble, ou ils ſont égaux s'ils contiennent autant d'unités l'un que l'autre, comme 4, & 4, ou ils ſont inégaux lors que l'un des deux comprend plus d'unités que l'autre, comme 6, & 9.

9. Le plus petit nombre eſt toûjours renfermé dans le plus grand, comme 4, qui eſt plus petit que 6, eſt compris dans 6; mais le plus grand ne peut pas être compris dans le plus petit.

10. Un plus petit nombre eſt partie aliquote du plus grand, ou ſa meſure lorſque le plus petit eſt compris un certain nombre de fois au juſte dans le plus grand: Par exemple 2, eſt partie aliquote de 6, & de 8, parce que 2, pris trois fois ſe trouve juſte dans 6, & pris 4, fois il ſe trouve de même au juſte dans 8, ſans que 2, fois excede 6, ou qu'il en ſoit excedé, ni que 2, fois 4, excedent 8, ou qu'ils en ſoient excedé.

11. L'unité eſt partie aliquote & meſure de toutes ſortes de nombres, car étant priſe un certain nombre de fois, elle ſe trouve au juſte dans toute ſorte de nombres.

22. Partie aliquante d'un nombre eſt un plus petit à l'égard du plus grand, lorſque le plus petit ne meſure pas au juſte le plus grand, c'eſt-à-dire, que la partie aliquante priſe un certain nombre de fois défaudra, ou excedera le plus grand nombre; ainſi 4, à l'égard de 15, pris trois fois eſt défaillant de 15, & pris 4, fois il l'excede.

13. Un nombre eſt commune meſure de deux autres nombres, lorſqu'il eſt partie aliquote de tous deux: Par exemple 3, eſt commune meſure de 9, & de 12, parce qu'il meſure 9, & 12, il eſt au juſte 3, fois dans 9, & 4 fois dans 12.

14. Un plus grand nombre comparé à un plus petit eſt ou multiple, ou ſurparticulier, ou ſurpartient; multiple ſurparticulier, & multiple ſurpartient.

15. Un nombre eſt multiple d'un plus petit, lorſqu'il le contient un certain nombre de fois au juſte, ainſi 4, eſt multiple de 2, parce qu'il le contient 2, fois au juſte; de même 12, à l'égard de 2, de 3, de 4, & de 6.

16. Un nombre eſt ſurparticulier à l'égard du plus petit, lorſqu'il comprend le plus petit une fois, & de plus une des parties aliquotes du plus petit, comme 9, à l'égard de 6, qu'il contient une fois & encore une partie aliquote de 6, qui eſt 3.

17. Un nombre eſt ſurpatient d'un plus petit, lorſque le plus grand contient le plus petit une fois, & de plus une des parties aliquantes du plus petit: comme 7, à l'égard de 5.

18. Un nombre eſt multiple ſurparticulier d'un plus petit nombre, lorſque le plus grand contient le plus petit pluſieurs fois, & de plus une des parties aliquotes du plus petit: comme 14, à l'égard de 6, car 14, contient 2 fois 6, & le tiers de 6.

19. Un nombre eſt multiple ſurpartient d'un plus petit, lorſque le plus grand contient le plus petit pluſieurs fois, & une partie aliquante du plus petit: comme 12, à l'égard de 5, qu'il contient deux fois & 2, de ſurplus, qui n'eſt qu'une partie aliquante de 5.

20. Les équimultiples de plus petits nombres, ſont ceux qui contiennent autant de fois au juſte chacun un plus petit nombre, ainſi 12, & 18, ſont équimultiples de 4, & de 6, parce que 12, contient autant de fois 4, que 18, contient de fois 6.

21. Un nombre eſt moitié d'un plus grand, lorſqu'il le meſure deux fois au juſte: Par exemple 2, eſt moitié de 4, parce que 2, meſure 2, fois 4, au juſte; & ſi un nombre meſure trois fois un plus grand, il en eſt le tiers ou la troiſiéme partie; ſi quatre fois le quart; ſi

5. fois la cinquiéme, ainſi ſucceſſivement juſqu'à l'infini,

22. De même maniere un plus grand nombre ſera dit double d'un plus petit, ſi le plus grand contient le plus petit deux fois au juſte : comme 4 à l'égard de 2 ; & ſi le plus grand contient le plus petit trois fois, il ſera appellé triple ; ſi quatre fois quadruple ; ſi dix fois decuple ; ſi cent fois centuple ; ſi mille fois, mille cuple, &c.

23. Il en eſt encore de même du plus grand nombre ſurparticulier à l'égard d'un plus petit, car ſi le plus grand contient une fois le plus petit, & de plus une partie aliquote du plus petit, le plus grand prendra ſon nom de la partie aliquote du plus petit qu'il contiendra de ſurplus à l'égard du plus petit ; de ſorte que ſi le plus grand contient le plus petit une fois & la moitié, le plus grand ſera ſeſquialtere du plus petit ; ſi le plus grand contient une fois le plus petit & le tiers du plus petit, le plus grand ſera appellé ſeſquitierce ; & s'il en contenoit le quart, on l'appellera ſeſquiquarte du plus petit ; ſeſquiquinte ; ſeſquicentiéme, &c. Par exemple 9 eſt ſeſquialtere de 6, parce qu'il contient une fois 6 & la moitié de 6 qui eſt 3. 8 eſt ſeſquitierce de 6, parce qu'il contient une fois 6 & le tiers de 6 qui eſt 2. 6 eſt ſeſquiquinte de 5, parce que 6 contient une fois 5 & un cinquiéme de 5.

24. Le nombre ſurpartient prend auſſi differens noms à l'égard du plus petit nombre, ſuiuant que la partie aliquante ſe partage en pluſieurs parties aliquotes, qui enſemble ne faſſent pas une partie aliquote du plus grand nombre ; ainſi vous appellerez un nombre ſurbi-partiente tierce celui qui contiendra un plus petit une fois, & de plus une partie aliquante qui étant diviſée fera deux tierces du plus petit nombre

comme 5 à l'égard de 3 ; 5 contient 3 une fois & deux tiers de 3 ; ſi le plus grand nombre contenoit une fois le plus petit, & deplus une partie aliquante qui fut partagée en trois quarts du plus petit, le nombre ſeroit ſurtripartiente quarte du plus petit, comme 7 à l'égard de 4, car 7 contient 4 une fois, & de plus trois quarts de 4, vous remarquerez que cõme nous avons dit, il faut que la partie aliquante ne ſoit pas diviſée en pluſieurs parties aliquotes, qui enſemble ne faſſent pas une partie aliquote du plus petit, car en ce cas le nombre ſeroit ſurparticulier du plus petit, & non pas ſurpartient ; parce que pour lors le plus grand contiendroit de ſurplus une partie aliquote ; ainſi vous ne direz pas que 6 à l'égard de 4, eſt ſurbipartiente quarte, quoique 6 contienne veritablement 4, une fois, & deux quarts de 4 ; mais vous direz que 6 eſt ſeſquialtere de 4, parce que deux quarts font enſemble une moitié.

Vous remarquerez encore à l'égard du nombre ſurpartient que la dénomination ſe prend du nombre des parties aliquotes, ce qui s'exprime ; & mettant aprés (*ſur*) le nombre des parties aliquotes, & aprés (*partiente*) la partie aliquote ; ainſi vous voyez que *ſurbi-partiente quinte* marque deux cinquiémes ; ſurbipartiente tierce marque deux tierces ; ſurtripartiente quarte marque trois quarts ; ſurquadri-partiente ſeptiéme marque 4 ſeptiémes, ainſi à l'infini ; ce qu'il eſt facile d'apliquer pour peu que l'on s'attache à comprendre ce que nous avons dit cy-deſſus.

25. Les parties aliquotes de quelque nombre que ce ſoit, ſe déſignent en chiffre par deux nombres, dont le premier marque l'unité, & le ſecond marque combien de fois le plus petit ou la partie aliquote

eſt dans le plus grand ; de ſorte que un demi s'écrit ainſi $\frac{1}{2}$ un tiers $\frac{1}{3}$ un quart $\frac{1}{4}$ un cinquiéme $\frac{1}{5}$ un ſixiéme $\frac{1}{6}$ & ſi l'on veut déſigner pluſieurs de ces parties aliquotes, on change l'unité au nombre que l'on veut ; ainſi deux tiers s'écriront de cette ſorte $\frac{2}{3}$ trois quarts $\frac{3}{4}$ quatre cinquiémes $\frac{4}{5}$ ainſi à l'infini.

26. Le premier nombre qui conte combien on déſigne de parties aliquotes, s'appelle numerateur, & le ſecond qui eſt au deſſous, s'appelle dénominateur : Par exemple $\frac{2}{3}$ 2 eſt le numerateur, parce qu'il conte combien l'on déſigne de parties aliquotes, & 3 eſt le dénominateur, parce qu'il déſigne la partie aliquote du plus grand nombre ; ainſi 6 eſt les $\frac{2}{3}$ de 9. Trois marque la partie aliquote de 9. Et 2 marque que cette partie aliquote eſt deux fois dans 6.

27. Nombres premiers ſont ceux qui n'ont point de commune meſure que l'unité : Par exemple 3 & 5, 7 & 9, 2 & 3.

28. Nombres compoſez, ſont ceux qui ont quelque nombre pour commune meſure, comme 4 & 6, car 2 meſure 4, & 6, puiſqu'il eſt 2 fois dans 4, & 3 fois dans 6.

29. Nombre pair eſt celui qui peut être diviſé en deux également : comme 4, 6, 8, 10.

30. Nombre impair, eſt celui qui ne ſe peut diviſer en deux également : comme 5, 7, 9, 15.

31. Nombre pairement pair, eſt celui qui ſe diviſe par moitié juſqu'à l'unité, comme 32, dont la moitié eſt 16, la moitié de 16 eſt 8 ; la moitié de 8 eſt 4 ; la moitié de 4 eſt 2 ; la moitié de 2 eſt 1.

32. Nombre pairement impair ; eſt celui dont la moitié eſt un nombre impair, comme 14 ou 18.

33. Nombre impairement pair, eſt celui dont la moitié eſt diviſée par un nombre impair, comme 20, dont la moitié eſt 10 ; mais la moitié de 10 eſt 5, qui eſt impair.

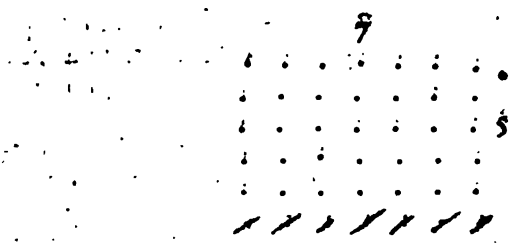
34. Nombre impairement impair, eſt un nombre impair, qui a pour parties aliquotes des nombres impairs, comme 15, qui a 3 & 5 pour parties aliquotes, & qui ſont tous deux des nombres impairs.

35. Nombre parfait, eſt celui qui eſt égal à toutes ſes parties aliquotes, comme 6 & 28 & 496.

36. Nombre imparfait, eſt celui qui n'eſt pas égal à toutes ſes parties aliquotes, mais qui les excede, ou qui en eſt excedé : Par exemple 12 eſt moindre que ſes parties 1, 2, 3, 4, 6, ajoûtez enſemble, & en ce cas il s'appelle abondant : mais 15 excede ſes parties aliquotes 3 & 5, qui ajoûtez enſemble ne ſont que 8, & ce dernier eſt appellé defaillant.

38. Produire un nombre par un autre, eſt poſer le nombre autant de fois que l'autre a d'unités : Par exemple, ſoit donné le nombre 7 à produire par le

nombre 5., posez sept fois 5, en cette maniere ; vous aurez le nombre de 7; produit par 5.



38. Lorsqu'un nombre est produit par un autre, cet autre est aussi produit par le premier; ainsi ces deux nombres se produisent l'un & l'autre : Par exemple 7 dans l'exemple cy-dessus est produit par 5, parce que 7 est posé autant de fois que 5 a d'unités. Mais 5 est aussi produit par 7, car 5 est posé autant de fois que 7 a d'unités.

39. Les nombres qui se produisent l'un & l'autre sont appellez racines. Ainsi dans l'exemple cy-dessus 7 & 5 sont les racines de leur mutuelle production.

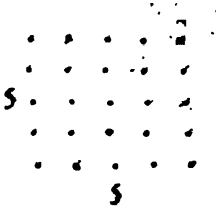
40. Le total ou l'assemblage de la production de deux nombres l'un par l'autre, est appellé le produit de leurs racines : C'est pourquoi dans l'exemple ci-dessus nombre 35 est le produit de 7 par 5, ou ce qui revient au même 35, est le produit de 5 par 7.

41. Les nombres peuvent être differemment considerés, car ou on les considere comme des produits d'une ou plusieurs racines, ou comme des racines mêmes, ou nombres simples : Par exemple 4, peut être considéré, ou comme le produit de 2 par 2, ou

d'un par 4, ou bien comme une racine ſimple: Par exemple de 16, car 4, produit par ſoi-même, donne 16.

42. Le produit d'un nombre par ſoi-même, eſt appellé nombre quarré : comme le produit de 4 par ſoy-même eſt 16. 16 eſt donc un nombre quarré.

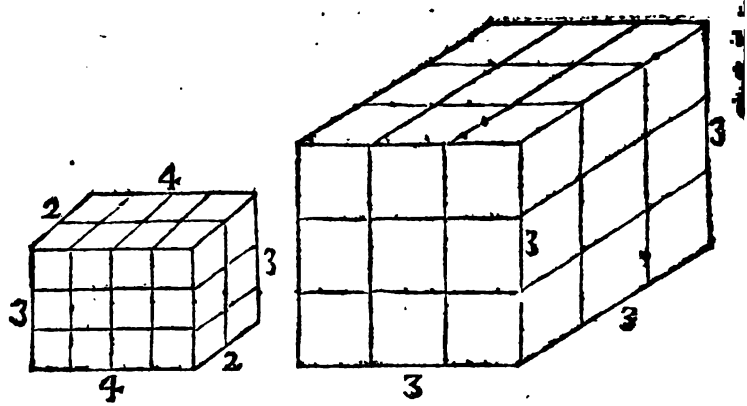
43. Racine quarrée, eſt la racine d'un nombre quarré : comme 4 qui eſt la racine quarrée du nombre quarré 16 : & 5, la racine quarrée du nombre quarré 25; car ſi vous poſez 5 autant de fois qu'il a d'unité, c'eſt-à-dire 5 fois, vous aurez le nombre 25, comme vous le repreſente cette figure.



44. Nombre plan eſt le produit de deux nombres l'un par l'autre : Ainſi 8 eſt un nombre plan, parce qu'il eſt le produit de 2 par 4 ou d'un par 8. Voyez cette figure,

45. Nombre ſolide, eſt le produit de trois nombres l'un par l'autre : Par exemple le nombre de 24 eſt un nombre ſolide, ſi on le conſidere comme le produit de ces trois nombres 2, 3, 4, car le produit de 2 par 3 eſt 6, & le produit de 6 par 4, eſt 24. De ſorte que dans le nombre ſolide un troiſiéme nombre produit le produit des deux autres. Voyez la figure ci-deſſous.

46. Nombre cube eſt le produit d'un nombre quarré par ſa racine: Par exemple 27 eſt un nombre cube parce qu'il eſt produit d'un nombre quarré 9, par ſa racine 3, car trois fois 3 ſont 9, & trois fois 9 ſont 27. Voyez cette figure.



47. Le nombre ſolide qui n'eſt pas cube, a toûjours deux ou trois racines, qui ſont les nombres de la production, deſquels le nombre ſolide a été fait comme dans la premiere figure cy-deſſus 2. 3 & 4. Mais dans le nombre cubique il n'y a qu'une même racine, comme dans l'exemple de la ſeconde figure le nombre de 3, & cette racine eſt appellée cubique.

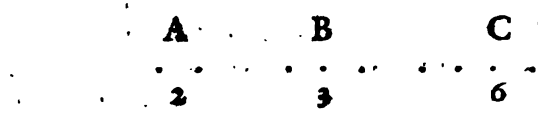
48. Tout

48. Tous ces differens nombres que nous venons de définir, ont pris leurs noms ou du plan ou du solide ou du quarré ou du cube, dont nous avons parlé dans la premiere Partie de nos définitions en Geometrie.

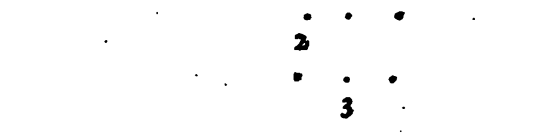
49. Les nombre peuvent se produire à l'infini : Par exemple la racine 4, produite par elle-même donne 16, & le produit 16 produit par la même racine, donne 64 ; le nombre ou produit 64 ; produit derechef par 4, donne 256. L'on peut encore produire 256 par 4, & vous aurez 1024 ; ainsi de suite à l'infini. Et pour désigner les differens produits d'un nombre par lui-même, l'on a accoûtumé d'appellet la racine, *premiere puissance* ; son produit par elle-même *nombre quarré* ; le produit du quarré par la même racine, *nombre cube* ; le nombre cube produit par la même racine, *nombre quarré quarré* ; ce nombre quarré quarré produit par la même racine, *cinquiéme puissance* ; la cinquiéme puissance derechef produite par la même racine, *sixiéme puissance*, & ainsi à l'infini. La Table suivante represente toutes les puissances du nombre 2.

Racine	Quarré	Cube	Quarré quarré &c.						
ou 1. puissance.	ou 2. puissance.	ou 3. puissance.	ou 4. puissance.	5. puissance.	6. puissance.	7. puissance.	8. puissance.	9. puissance. &c.	
2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	

50. Ce que nous venons de dire de la production d'une même racine, ſe peut auſſi appliquer à la production de pluſieurs racines : Par exemple, je peux produire le nombre de 2, par 3 en une même ligne comme le repreſente cette figure où A me marque la premiere, Racine 2, & B la ſeconde racine 3,



C le produit lineaire de 2 par 3 qui eſt 6, & pour lors ce premier produit s'appelle produit lineaire, ou du premier degré. Mais ſi ces deux racines ſont produites de long en large, comme dans la figure ſuivante



ce produit ſera appellé produit plan, ou du ſecond degré. Et ſi ce produit plan qui eſt 6, eſt produit par un autre nombre ou racine, comme 3, ce nouveau produit 18 ſera apellé produit ſolide, ou du troiſiéme degré ; ainſi alternativement produiſant le dernier produit par un autre nombre ou racine, vous aurez le produit ſurſolide ou du quatriéme degré ; du cinquiéme degré, &c. Voyez la Table.

2.	3.	4.	5.	6.	7.
:	6.	24	120.	720.	5040.
1. degré	2. degré	3. degré	4. degré	5. degré	6. degré

51. Un même nombre peut être considéré en différentes manieres : Par exemple, vous pouvez considérer le nombre 144, ou comme linéaire & du premier degré, ou comme un nombre plan produit de ces deux nombres 1 & 144 ; ou de 2 & 72 ; ou de 3 & 48 ; ou de 6 & 24 ; ou de 8 & 18 ; ou de 9 & 16 ; ou de 12 & 12 : Ou bien vous le pouvez considérer comme un nombre solide, ou de la troisiéme grandeur, produit des trois nombres 1, 2, 72 ; ou 2, 2, 36 ; ou 2, 3, 24 ; ou 2, 4, 8 ; ou 4, 6, 6 : ou bien comme un nombre surſolide, ou de la quatriéme grandeur ou degré qui aura été produit par ces quatre nombres 1, 2, 3, 24 ; ou 1, 2, 3, 12 ; ou 2, 2, 4, 9 ; ou 1, 3, 4, 6, &c. allant ainſi de ſuite juſqu'à ce que l'on ait trouvé toutes les différentes manieres par leſquelles le nombre 144 peut être produit.

Il y a encore de pluſieurs ſortes de nombres que je n'explique pas ici, parce que je les crois trop compoſez & trop difficiles pour ceux qui commencent, & ſur tout pour des jeunes gens à qui il faut encore comme former les premieres notions des Elemens de Mathematiques.

52. Nous avons juſqu'ici conſideré l'unité comme indiviſible ; preſentement il nous la faut conſiderer comme diviſible en une infinité de parties égales ou aliquotes ; & c'eſt à cette diviſion de l'unité que les Arithmeticiens ont donné le nom de fraction : C'eſt pourquoi nous définirons la fraction, la diviſion de l'unité en pluſieurs parties.

53. Le numerateur ou premier terme de la fraction que l'on appelle encore du nom d'antecedent, eſt le nombre qui marque combien il y a de parties aliquotes dans la fraction ; ainſi 2 eſt le numerateur de la fraction 2 tiers.

54. Le dénominateur ou ſecond terme & conſequent de la fraction, eſt le nombre qui marque en combien de parties égales l'unité a été diviſée : ainſi dans l'exemple cy-deſſus 3, eſt le dénominateur de la fraction 1 tiers, parce qu'il marque que l'unité a été diviſée en trois parties, dont chacune eſt un tiers, comme nous

l'avons expliqué ci-dessus. De sorte que toute la fraction est renfermée dans ces deux termes.

2 Numerateur,	3 Numerateur,
3 Dénominateur,	4 Dénominateur.

55. L'on peut considerer toute sorte de nombre comme un tout ou un entier, ou même une unité, puisqu'on l'appelle un nombre, lui donnant le nom d'un; & par consequent il n'y a point de nombres qui ne puissent être rompus: C'est pourquoi nous disons que 3 est la moitié de 6, le tiers de 9, le quart de 12.

56. L'on écrit toute sorte de fractions en mettant le numerateur au dessus d'un petit trait, & le dénominateur au dessous: En cette sorte:

$\frac{2}{3}$ deux tiers $\frac{4}{15}$ quatre quinziémes, &c.

CHAPITRE II.

Des rapports & proportions des Nombres.

1. LEs differentes manieres de comparer les nombres ont été apellées raports, & l'on peut comparer deux nombres ou plusieurs en deux manieres; savoir, par rapport à l'unité qu'ils contiennent, & par raport entr'eux : Nous appellerons le premier simplement rapport ou rapport arithmetique; & au second nous lui donnerons le nom de raison ou de raport geometrique.

2. Le raport arithmetique est donc la comparaison des nombres à l'unité, & il y en a de deux sortes; savoir le raport d'égalité ou de convenance, & le raport d'inégalité : Il y a rapport d'égalité, lorsque deux ou plusieurs nombres contiennent l'unité préciſement & au juste autant de fois l'un que l'autre, comme 10, & 10, ou 2 fois 10, ou 4 fois 5. Mais il y a raport d'inégalité, lorsqu'un nombre contient plus ou moins de fois l'unité que l'autre, comme 10, 20, 30, 100.

3. Raison est la comparaison de deux nombres ou plusieurs entr'eux, lorsque l'un ou l'une de ses parties mesure ou est mesurée par l'autre; ainsi lorsque je compare 3 avec 6 ou avec 9, je vois que 6 & 9 contiennent le nombre de 3, & que 3 est partie aliquote de 6 & de 9; & cette comparaison a été apellée raison: Remarquez que j'ay dit lorsque l'un des deux nombres mesure, ou l'une de ses parties, parce que si un nombre comparé à un autre ne le mesure pas préciſement, il suffit que quelqu'une de ses parties le mesure; & de cette sorte quelque nombre que vous compariez à un autre vous trouverez toûjours quelque raison, parce que du moins l'unité qui est la partie aliquote de tous nombres les mesurera.

4. Les termes d'un raport ou d'une raison, sont les nombres que l'on compare à l'unité ou entr'eux; ainsi

la comparaiſon qui eſt entre 7 & 10, a pour termes les 2 nombres 7 & 10 & ils ont été apellez antecedent ou conſequens, ſuivant les differentes manieres de les comparer.

5. Antecedent d'un rapport ou d'une raiſon eſt le premier nombre que l'on compare; le conſequent eſt le ſecond que l'on compare, ou à qui l'on compare l'entecedent: Par exemple, ſi vous comparez 3 & 6, le premier nombre 3 ſera l'entecedent, & 6 ſera le conſequent; mais ſi vous comparez 6 à 3, en ce cas le nombre de 6 deviendra l'antecedent, & le nombre de 3 ſera le conſequent.

6. La difference de deux nombres entr'eux eſt le plus ou le moins d'unitez qu'un nombre contient, à l'égard d'un autre: Par exemple, la differepce de 4 à 7 eſt 3, parce que 4 a moins de 3, unitez que 7; & le nombre de 7 a 3 unitez plus que 4.

7. L'excez ou le plus d'un nombre eſt la difference du plus grand au plus petit; & le moins ou défaut, eſt la difference du plus petit au plus grand: De ſorte que comparant 7 avec 4, ſa difference qui eſt 3, eſt apellée excez, parce qu'elle eſt du plus grand au plus petit; mais en comparant 4 avec 7, cette même difference 3, eſt apellée le défaut ou le moins de 4 à l'égard de 7.

8. Proportion eſt une égalité de rapports ou de raiſons: Par exemple, s'il y a même difference de 4 à 7, que de 8, à 11; ou qu'il y ait même raiſon de 3 à 6, que de 9 à 18, cette égalité de rapports ou de raiſons eſt appellée proportion, dont on en diſtingue de 4 ſortes, la Proportion Arithmetique, la Geometrique l'Harmonique & la contr'Harmonique.

9. La Proportion Arithmetique eſt l'égalité de difference entre pluſieurs nombres qui s'excedent, comme entre 3, 6, 9, 12, 15, car 3 eſt moindre que 6, de 3; & la difference de 6 à 9, eſt 3 : celle de 9 à 12, eſt 3 : & de 12 à 15, la difference eſt encore 3; Il y a donc proportion arithmetique entre ces nombres 3, 6, 9, 12, 15.

10. La Proportion Geometrique eſt l'égalité de raiſons entre pluſieurs nombres; c'eſt à dire, qu'il y a proportion geometrique entre pluſieurs nombres, lorſque l'antecedent contient ou eſt contenu autant de fois dans ſon conſequent, qu'un autre antecedent contient de fois ou eſt contenu dans un autre conſequent: Par exemple, il y a proportion geometrique entre 6, 12, 18, & 36, parce que 6, premier antecedent eſt la moitié de ſon conſequent 12; & de même 18, eſt auſſi la moitié de 36; & par conſequent il y a égalité de raiſons entre 6 12; & 18 & 36, ce que l'on apelle proportion geometrique.

11. La proportion Harmonique ſemble participer de la Proportion Arithmetique, & de la Proportion Geometrique; car c'eſt l'égalité des raiſons entre le premier antecedent & le dernier conſequent, & la difference du premier au ſecond terme, avec la difference du ſecond au troiſiéme terme: Telle eſt la proportion qu'il y a entre 3, 4, & 6; car 3 premier antecedent eſt la moitié de 6, dernier conſequent; & 1, la difference de 3 à 4, le premier au ſecond terme, eſt auſſi la moitié de la difference de 4 à 6, ſecond & dernier terme, laquelle difference eſt 2, mais la contr'harmonique eſt l'égalité de raiſons.

12. La quantité ou le denominateur d'un raport arithmetique eſt le nombre qui exprime leur differēce; ainſi 4 eſt la quantité ou le dénominateur du rapport arithmetique, qui eſt entre 12 & 16.

13. La quantité ou le dénominateur d'une raiſon ou raport geometrique, eſt le nombre qui dénomme quelle partie le plus petit nombre eſt du plus grand; ainſi 3 ou $\frac{1}{3}$ eſt le dénominateur ou quantité de la raiſon qu'il y a entre 9 & 27, parce que veritablement 9, eſt le $\frac{1}{3}$ de 27, puiſqu'il eſt 3 fois au juſte dans 27.

14. La quantité ou le dénominateur de la proportion harmonique, eſt le nombre qui exprime la raiſon que les differences ont entr'elles, ou bien la raiſon qu'il y a du plus petit nombre au plus grand : Par exemple, il y a proportion harmonique entre 3, 4, 6 la raiſon qu'il y a de 3 à 6, eſt exprimée par le dénominateur $\frac{1}{2}$ parce que 3 eſt la moitié de 6. $\frac{1}{2}$ ou 2 ſimplement, eſt donc le dénominateur ou la quantité de la proportion harmonique, & ainſi de la contr'harmonique.

15. Les expoſans des differens rapports, ſoit arithmetique, geometrique, &c. ſont les plus petits nombres ou les nombres premiers entre leſquels ſe trouvent ces mêmes rapports ; ainſi 1 & 3 ſont les expoſans du raport arithmetique, qui a 3 pour difference ; 1 & 2 ſont les expoſans de la raiſon geometrique, qui a 2 pour dénominateur, &c.

16. D'autant que le dénominateur donne ſon nom aux differens rapports, nous appellerons la raiſon d'égalité celle dont le dénominateur ſera 1 : Par exemple, nous dirons qu'il y a une raiſon d'égalité entre 10, & 2 fois 5 ou 10, & 7, & 3, &c. Et lorſque nous comparerons le plus grand au plus petit, nous dirons qu'il y a raiſon d'inégalité majeure, que nous déſignerons par ſon dénominateur : Par exemple, nous dirons qu'il y a raiſon double de 4 à 2 ; raiſon triple de 9 à 3 ; centuple de 209 à 2. Nous

dirons auſſi qu'il y a raiſon ſurparticuliere, lorſque nous connoîtrons que le plus grand contient le plus petit une fois, & une partie aliquote du plus petit ; & nous appellerons raiſon ſeſquialtere la raiſon qu'il y a entre 6 & 4, ſeſquitierce entre 4 & 3, &c. De même nous appellerons raiſon ſurpartiente, celle qu'il y a d'un plus grand nombre à un plus petit, lorſque le plus grand contiendra le plus petit une fois, & une partie aliquante, qui étant reduite en pluſieurs parties aliquotes, prendra ſa dénomination des parties aliquotes qu'elle contiendra : C'eſt pourquoi nous dirons qu'il y a raiſon ſurbipartiente quinte entre 7 & 5, parce que 7 ſurpaſſe 5 de $\frac{1}{5}$.

17. Neanmoins pour abreger & ne pas cauſer tant de confuſion, on ſe contente de dénommer une raiſon par ſes expoſans ; ainſi au lieu d'exprimer la raiſon ſeſquialtere, on dit la raiſon de 3 à 2 ; pour exprimer la raiſon ſurbipartiente quinte, l'on ſe contente d'exprimer les expoſans de cette raiſon, qui ſont 7 & 5, diſant la raiſon de 7 à 5, ou de 9 à 7, pour une raiſon ſurbipartiente ſeptiéme.

18. La raiſon d'inégalité mineure qui ſe fait en comparant le plus petit au plus grand, prend ſon nom de la partie aliquote que le plus petit nombre exprime. Ainſi la raiſon de 3 à 6, & $\frac{1}{2}$ la raiſon de 9 à 27 eſt $\frac{1}{3}$ la raiſon de 12 à 48 eſt $\frac{1}{4}$ ou bien l'on dit raiſon ſous-double, ſous-triple, ſous-ſeſquialtere, ſous-ſurbipartiente, &c. Mais il eſt plus commode de l'exprimer par ſes expoſans, en comparant le plus petit au plus grand, en cette ſorte la raiſon de 2 à 4, de 5 à 7, de 7 à 9, de 7 à 22, &c.

19. Toute proportion eſt renfermée entre quatre Termes, deux antecedens & deux conſequens ; parce qu'il faut neceſſairement deux raiſons égales : Or chaque raiſon renferme ſon antecedent & ſon conſequent. Et par conſequent il faut quatre Termes pour une Proportion : Mais ſi un même terme ſert pour deux, ſavoir de conſequent à l'égard du premier, & d'antecedent à l'égard du troiſiéme, la Proportion pour lors ſera compriſe entre trois termes : comme ſont les Proportions ſuivantes.

Proportion Arithmetique en quatre Termes :

2 6, 8 12.

En trois Termes :

4 7 10.

Proportion Geometrique en quatre Termes :

4 8 : 12 24.

En trois Termes :

8, 16, 32.

20. Dans chaque proportion le premier antecedent & le dernier conſequent, ſont appellez les extrêmes proportionels ; & le premier conſequent avec le ſecond antecedent ſont appellez moyens proportionels. Ainſi dans cette proportion Geometrique 3.6.12.24. les termes 3 & 24 ſont extrêmes proportionels, & 12 & 24. ſont les moyens proportionels.

21. Quatre grandeurs ſont proportionelles geometriquement, lorſque le dénominateur de la raiſon du premier antecedent au premier conſequent eſt égal au dénominateur de la raiſon du ſecond antecedent au ſecond conſequent : C'eſt pourquoi nous dirons que ces quatre nombres 3, 6, 12, 24, ſont proportionels geometriquement, parce que le dénominateur de la raiſon de 3 à 6, eſt $\frac{1}{2}$ & que le dénominateur de la raiſon de 12 à 24, eſt pareillement $\frac{1}{2}$ Enfin quatre nõbres ſeront dits proportionels lorſque l'antecedent d'une raiſon contiendra ou ſera contenu autant de fois dans ſon conſequent, que l'antecedent de l'autre raiſon contiendra ou ſera contenu dans ſon conſequent : comme dans l'exemple ci-deſſus 3, 6, 12, 24.

22. La maniere d'exprimer la Proportion Arithmetique eſt en cette ſorte. Il y a même difference de 2 à 5, que de 7 à 9, & la Geometrique en cette maniere. Il y a même raiſon de 3 à 6, que de 12 à 24.

23. Lorſque la Proportion Geometrique ſe trouve entre trois ou quatre nombres, on peut conclure en pluſieurs manieres.

1. Directement ou en proportion droite lorſque les nombres ſont mis dans leur ordre naturel : comme en cet exemple 2 4, 6 12, où les nombres ſont diſpoſez naturellement ; Ainſi ſuppoſez que ces quatre nombres ſoient proportionels, on conclura directement en cette maniere : donc il y a même raiſon de 2 à 4, que de 6 à 12.

2. L'on conclud en raiſon inverſe, lorſque l'on conclud en prenant pour conſequent l'antecedent, & l'antecedent pour conſequent, en cette maniere à l'égard des nombres cy-deſſus : donc il y a même raiſon de 4 à 2, que de 12 à 6.

3. L'on conclud par changement alterne lorſque l'on conclud en comparant le premier antecedent au ſecond antecedent comme à ſon conſequent; & le premier conſequent comme antecedent; au ſecond conſequent en cette maniere: donc il y a même raiſon de 2 à 6, que de 4 à 12.

4. L'on conclud par compoſition en prenant l'antecedent & le conſequent, pour le comparer au conſequent en cette maniere: donc il y a même raiſon de 2 plus 4 ou 6, 4, que de 6 plus 12 ou 18 à 12.

5. L'on conclud par diviſion, lorſque l'on compare l'antecedent moins ſon conſequent au conſequent, en cette maniere: donc 2 moins 4 eſt à 4; ce que 6 moins 12 eſt à 12.

6. L'on conclud par compoſition inverſe, lorſque l'on compare l'antecedent, plus le conſequent à l'antecedent en cette maniere: donc 2 plus 4 eſt à 2, ce que 6 plus 12 eſt à 6.

7. L'on conclud par compoſition contraire, en comparant l'antecedent à l'antecedent plus le conſequent en cette maniere: donc 2 eſt à 2 plus 4; ce que 6 eſt à 6 plus 12.

8. L'on conclud par compoſition contraire & inverſe, lorſque l'on compare le conſequent à l'antecedent plus le conſequent en cette maniere: donc 4 eſt à 2 plus 4; ce que 12 eſt à 6 plus 12.

9. L'on conclud par diviſion inverſe lorſque l'on compare l'antecedent moins le conſequent à l'antecedent en cette maniere, 2 moins 4 eſt à 2, ce que 6 moins 12 eſt à 6.

10. L'on conclud par diviſion contraire, en comparant l'antecedent à l'antecedent moins le conſequent, en cette maniere: 2 eſt à 2 moins 4, ce que 6. eſt 6 moins 12.

11. L'on conclud par diviſion inverſe & contraire, lorſque l'on compare le conſequent moins, l'antecedent à l'antecedent en cette maniere: 4 moins 2 eſt à 2, ce que 12 moins 6, eſt à 6.

12. L'on conclud par conversion de raison en comparant l'antecedent à la difference qu'il a avec son consequent en cette maniere : donc 2 est à 2, ce que 6 est à 6 ; car 2 est la difference de 2 à 4 ; & 6 est la difference de 6 à 12. La Table suivante represente toutes les manieres de conclure.

PREMIERE MANIERE.

Proportion droite :

A, B, C, D,
2. 4. 6. 12.

II. MANIERE.

Raison inverse :

B, A: D, C,
4. 2. 12. 6.

III. MANIERE.

Raison alterne :

A; C: B, D,
2. 6: 4. 12.

IV. MANIERE.

Composition droite :

A plus B, B: C plus D, D.
2 plus 4 6 plus 12.
ou 6, 4: ou 18 12.

V. Maniere.

Diviſion droite :

A moins B, B : C moins D, D.
2 moins 4, 4 : 6 moins 12, 12.

VI. Maniere.

Compoſition inverſe :

A plus B, A : C plus D, C.
2 plus 4 6 plus 12,
ou 6, 2 : ou 18, 6.

VII. Maniere.

Compoſition contraire :

A, A plus B : C, C plus D.
2, 2 plus 4 6, 6 plus 12,
ou 6 : ou 18.

VIII. Maniere.

Compoſition contraire & inverſe :

B, A plus B : D, C plus D.
4, 2 plus 4 12, 6 plus 12.
ou 6 : ou 18.

IX. Maniere.

Diviſion inverſe :

A moins B, A : C moins D, C.
2 moins 4, 2 : 6 moins 12, 6.

X. Maniere.

Diviſion contraire :

A, A moins B : C, C moins D.
2, 2 moins 4 : 6, 6 moins 12.

XI. Maniere.

Diviſion contraire & inverſe :

B, moins A, A : D moins C, C.
4, moins 2, 2 : 12 moins 6, 6.

XII. Maniere.

Converſion :

A, E difference de AB ; C, F difference de CD.
2, 2 difference de 2 à 4 : 6, 6 difference de 6 à 12.

24. Proportion continuë, eſt celle dont les Termes moyens ſervent d'antecedens aux derniers & de conſequens aux premiers : comme en cette Proportion Arithmetique 1, 3, 5, 7, 9, 11, où le ſecond Terme 3, eſt conſequent du 1, & antecedent de ſon ſuivant 5 ; de même le terme 5 eſt le conſequent de 3, & l'antecedent de 7. & ainſi de ſuite tant qu'il y a de termes moyens. Cette Proportion s'exprimera donc de cette ſorte : Il y a même difference de 1 à 3, que de 3 à 5, que de 5 à 7, que de 7 à 9, & que de 9 à 11 ; ou ſimplement, il y a même difference ou continuë entre les termes 1, 3, 5, 7, 9, 11.

25. Progreſſion, eſt une proportion continuë, compriſe ſous plus de trois termes : car lorſque la proportion continuë n'a que trois termes, on l'appelle ſimple proportion continuë : mais lorſqu'elle a plus de trois termes, elle prend le nom de Progreſſion : Et

ſi la Proportion eſt Arithmetique; on l'appelle Progreſſion Arithmetique; ſi elle eſt Geometrique, Progreſſion Geometrique; & Harmonique ſi la Proportion eſt Harmonique, &c.

Progreſſion Arithmetique:

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.

Progreſſion Geometrique:

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

Progreſſion Harmonique:

2. 3. 6. 9. 18. 27. 54.

On bien d'une autre maniere:

10. 12. 15. 20. 30. progreſſion contr'Harmonique.

26. Proportion ordonnée, eſt l'arrangement de pluſieurs nombres proportionnels en pluſieurs claſſes de ſorte qu'il y ait même proportion entre les nombres de la premiere claſſe, qu'entre les nombres de la ſeconde, & de la troiſiéme, & ainſi de ſuite, comme en cet exemple.

Proportion ordonnée:

12	30	60
4	10	20
2	5	10
8	20	40

Ou bien, en Proportion continuë ordonnée:

2	3	4	5
4	6	8	10
8	12	16	20
16	24	32	40
32	48	64	80

Vou

Vous voyez dans l'un & dans l'autre exemple. 1. Qu'il y a même raiſon du premier d'une claſſe, au ſecond de la même claſſe, que du premier de la ſeconde claſſe, au ſecond de la ſeconde claſſe; & que du premier de la troiſiéme ou quatriéme claſſe pareillement au ſecond de la troiſiéme ou quatriéme claſſe. 2. Qu'il y a même raiſon du ſecond de la premiere claſſe, au troiſiéme de la même claſſe, que du ſecond de la ſeconde claſſe ou de la troiſiéme claſſe, &c. au troiſiéme de la ſeconde, troiſiéme ou quatriéme claſſe. 3. Que du troiſiéme de la premiere claſſe, au quatriéme de la même claſſe, il y a encore même raiſon que du troiſiéme de la ſeconde claſſe, ou de la troiſiéme ou quatriéme, au quatriéme de la ſeconde troiſiéme ou quatriéme claſſe; & ainſi à l'infini.

16. Proportion troublée, eſt l'arrangement de pluſieurs nombres proportionels en deux claſſes; de ſorte que le premier de la premiere claſſe ſoit au ſecond de la même claſſe, ce que le penultiéme de la ſeconde claſſe eſt au dernier de la ſeconde claſſe; & le ſecond de la premiere claſſe au troiſiéme de la même claſſe, ce que l'antepenultiéme eſt au penultiéme de la ſeconde; ainſi de ſuite, comme dans cet exemple.

Proportion troublée.

12	18
4	9
2	3

17. Conclure en raiſon égale, eſt conclure dans une proportion ordonnée ou troublée, que la premiere d'une part, eſt à la derniere de même claſſe; ce que la premiere d'autre part, eſt à la derniere de l'autre claſſe; ainſi dans l'exemple cy-deſſus, nous conclurons: donc il y a raiſon égale de 12, à 2, & de 18 à 3; car il y a même raiſon de 12 à 2, que de 18 à 3, puiſqu'ils ont un même dénominateur: Et comme dans les differentes claſſes il n'importe laquelle vous prenez pour la premiere ou pour la derniere, pourveu

qu'ayant pris dans la premiere un certain rang, ve
preniez dans la ſeconde claſſe le même rang, toutes l
fois qu'entre pluſieurs nombres il y aura proportio
ordonnée ou troublée, l'on pourra toûjours conclu
en raiſon égale : Et délors que l'on a conclu en raiſo
égale, on peut conclure en toutes les differentes ma
nieres dont nous avons parlé ci-deſſus.

18. Raiſon compoſée ou compoſition de raiſon, c
la raiſon qui reſulte de pluſieurs dénominateurs de rai
ſons produits les uns par les autres : Par exemple, ſ
nous poſons les differens nombres ſuivans 4, 8, 12, 24
la raiſon qui ſe trouvera entre quatre & 24, ſe
compoſée des raiſons de quatre à 8, de 8 à 2, de 2
12, de 12 à 24 ; car ſi vous multipliez leurs dénom
nateurs ; ſavoir le dénominateur de 4 à 8, qui eſt
avec le dénominateur de 8 à 2, qui eſt 4 ; le dénom
nateur de 2 à 12, qui eſt $\frac{1}{6}$ & le dénominateur de 1
à 24, qui eſt $\frac{1}{12}$ vous aurez le dénominateur $\frac{1}{2}$ qui
ſultera de ces 4 dénominateurs $\frac{1}{2}$ 4, $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ puiſque
$\frac{1}{2}$ multiplié par 4 produit 2, & 2 produit par $\frac{1}{6}$ pr
duit $\frac{1}{12}$ & $\frac{1}{12}$ multiplié par $\frac{1}{24}$ produit $\frac{1}{288}$ ou un $\frac{1}{288}$ qui
la raiſon de 4 à 24 ; puiſque 4 eſt le $\frac{1}{6}$ de 24 *cecy ſ
poſe plus de connoiſſance dans les operations d'arithmetiqu
mais on peut paſſer cette definition & la reſerver lors qu'on ſa
plus à fond l'arithmetique.*

19. La raiſon compoſée prend ſon nom du nomb
des dénominateurs qui ont été multipliez, ainſi la ra
ſon compoſée ci-deſſus eſt compoſée de 4 raiſons ; c
elle eſt compoſée de la raiſon de 4 à 8, qui eſt $\frac{1}{2}$; de
raiſon de 8 à 2, qui eſt 4 ; de la raiſon de 2 à 12, qui e
$\frac{1}{6}$; & enfin de la raiſon de 12 à 24, qui eſt $\frac{1}{2}$.

20. Lors qu'une raiſon eſt compoſée d'une mêm
raiſon multipliée pluſieurs fois, elle prend ſon nom d
nombre des multiplications ; ainſi ſuppoſons cet
proportion continuë ou progreſſion Geometrique
6, 12, 24, 48, laquelle a par tout un même dénom
nateur $\frac{1}{2}$: Nous dirons que la raiſon compoſée de 3

48, eſt quadruplée ; parce qu'elle eſt compoſée de la multiplication de la raiſon de 3 à 5, poſée 4 fois ; de ſorte que raiſon doublée, eſt celle qui eſt compoſée d'une même raiſon poſée 2 fois, comme dans celle-ci 3, 6, 12, la raiſon de 3 à 12, eſt doublée ; & ſi la raiſon eſt poſée 3 fois, elle s'appellera raiſon triplée ; ſi quatre fois quadruplée ; ſi cent fois centuplée ainſi à l'infini.

11. Il faut bien diſtinguer ces manieres de parler ; raiſon double, & raiſon doublée ; raiſon triple, & raiſon triplée ; raiſon quintuple, & raiſon quintuplée ; car il y a tres-grande difference. L'on appelle raiſon double celle qui ſe trouve entre deux nombres dont le plus grand eſt double du plus petit, comme entre 4 & 2 : Mais raiſon doublée eſt une raiſon entre deux nombres extrêmes, laquelle eſt compoſée de deux fois la raiſon qui ſe trouve du premier au ſecond, comme en cette proportion continuë 3, 6, 12. La raiſon de 3 à 12 eſt doublée, parce qu'elle eſt compoſée de deux fois la raiſon de 3 à 6 ; mais elle eſt ſi l'on conſidere ſimplement 3 avec 12. Il en eſt de même de la raiſon triple & triplée, car il y a raiſon triple de 9 à 3, & elle eſt triplée de 24 à 3 dans cette progreſſion 24. 12. 6. 3, quoique 24 à 3 ſoit en raiſon octuple.

12. Ce que nous avons dit de la compoſition des raiſons, ſe peut facilement appliquer à la compoſition des differences dans la Proportion Arithmetique. Ainſi nous appellerons difference compoſée, ou compoſition de difference, la difference qui reſultera de l'addition de pluſieurs differences poſées : Par exemple, dans ces nombres 3, 7, 11, 24, 35, nous dirons que la difference de 3 à 35, eſt compoſée des quatre differences de 3 à 7, qui eſt 4 ; de celle de 7 à 11, qui eſt encore 4 ; de celle de 11 à 24, qui eſt 13 ; de celle de 24 à 35, qui eſt 11 ; car la difference de 3 à 35 eſt 32 & 32 eſt compoſé de tous ces nombres que nous

avons dit être les differences de 3 à 7, de 7 à 11, & c'est à savoir 4, 4, 13 & 11 ; car ces quatre nombres ajoûtez font 32, qui est la difference de 3 à 32.

23. Le nom de la difference composée, se prend du nombre des differences dont elle est composée, ou de la même ajoûtée plusieurs fois, si la proportion arithmetique est connuë. Ainsi dans l'exemple cy-dessus nous dirons que la difference de 3 à 35, est composée des quatre differences 4, 4, 13, & 11 : Et dans la suivante qui est continuë, comme 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, nous dirons que la difference de 4 à 22, est sextuplée parce qu'elle est composée de six fois cette même difference 3 : car 3 fois 6 font 18. & la difference de 4 à 22 est 18.

CHAPITRE III.

Des differentes Operations de l'Arithmetique, où ſont définis les noms qui ſont en uſage, lorſque l'on eſt à l'operation.

1. LEs Operations ou Regles d'Arithmetique, ſont les differentes manieres de ſupputer, combiner, ou diſpoſer les nombres: Par exemple, les ajoûter en une ſomme totale, en trouver les rapports, en extraire les racines ou puiſſances; ainſi que nous allons l'expliquer.

2. Les Operations ou Regles d'Arithmetique, ſont ou ſimples ou compoſées. Nous appellons les Operations ſimples, celles qui n'ont pas beſoin des autres pour être faites: Par exemple, l'addition eſt une Operation ſimple, parce qu'elle ne ſuppoſe point d'autres Operations pour être faite: Mais les Regles compoſées ſont celles qui ſuppoſent que l'on ſçache les Regles ſimples, & qui ne peuvent être faites ſans le mélange des Regles ſimples; ainſi la Regle ordinairement appellée Regle de 3, eſt une Regle compoſée, parce qu'elle ſe fait de la multiplication & partition.

3. Les Operations ſimples ſont l'addition, la ſouſtraction, la multiplication, la partition, la compoſition des puiſſances & des nombres, & l'extraction des racines. Les Regles compoſées ſont les Regles de trois ou proportionelles, les progreſſions, les fauſſes poſitions, les combinaiſons, les réductions, les évaluations, les permutations, les regles de ſocietez, les regles d'intérêts, alliages, & une infinité d'autres, dont nous parlerons plus amplement dans nôtre Arithmetique pratique, & où nous définirons beaucoup de termes, qu'il ſoit inutile d'expliquer ici: c'eſt pourquoi nous nous contenterons de définir les premieres Regles.

4. L'Addition eſt la premiere Operation de l'Arithmetique qui aſſemble pluſieurs nombres en un ſeul; c'eſt à dire, que l'addition fait de pluſieurs nombres un nombre total à qui l'on a donné le nom de ſomme. Par exemple, ſi de ces quatre nombres 7,9,4,20, vous n'en faites qu'un nombre total qui eſt 40, cette operation s'apellera addition.

5. Dans toute Operation d'Arithmetique, il faut diſtinguer ce qui eſt connu de ce qui ne l'eſt pas. Ce qui eſt connu s'appelle le donné; & ce qui ne l'eſt pas & que l'operation doit découvrir, s'apelle le requis. Ainſi dans l'addition que nous venons de définir le donné ſont les nombres à ajoûter, & le requis eſt la ſomme qui reſulte de l'operation; comme dans l'exemple cy devant 7.9.4. 20. ſont les nombres donnez, & le nombre de 40 eſt le requis.

6. Le donné d'une Operation d'Arithmetique eſt toûjours connu, c'eſt par ſon moyen que l'on trouve le requis ou l'inconnu; mais le donné & le requis, changent de nom dans les diverſes operations; ainſi ce ſont des termes generaux qui conviennent à tout ce qui eſt connu, & tout ce qui eſt inconnu.

7. Nous apellerons le donné de l'Addition nombres partiels, qui ſeront les propoſez. Et lorſque l'on aura poſé les differens nombres l'un ſous l'autre, en ſorte que les nombres répondent aux nombres en même colomne ou claſſe; les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, nous écrirons au deſſus ce mot (Adjoûter) en cette maniere. Et tous les nombres

Adjoûter			
	1	0	7
	2	0	4
	8	5	2
	4	0	0

poſez au deſſus d'un traît, ſeront le donné de l'Ad

ition. Dont il faudra chercher le requis de l'addition ui eſt la ſomme, comme nous l'avons dit; en ſorte ue ſuppoſé l'operation faite, & que l'on ait trouvé ue ces 4 nombres faſſent enſemble 1563. Nous écri-ons 1563, au deſſous des nombres donnez en cette aniere, & ce nombre ſera la ſomme ou le requis.

Adjoûter	1	0	7
	2	0	4
	8	5	2
	4	0	0
Somme	1	5	6	3

7. Le formulaire d'additionner, eſt tant & tant: r exemple 3 & 4 ſont 7; 7 & 9 ſont 16; de ſorte que ns l'addition chaque nombre n'eſt poſé qu'une fois: eſt pourquoi cette operation ne fait qu'unir par la jonction (&) les nombres les uns aux autres, ce l'il faut bien remarquer.

8. Nous appellerons la Preuve d'une Operation, e ſeconde Operation, qui démontrera infailliblement que la premiere eſt bonne; Et nous appellerons reuve fauſſe, une Operation qui prouvera une regle ſſe, ou qui ne démontrera pas infailliblement la nté d'une Operation; ainſi que nous ferons voir ns nôtre Arithmetique pratique, & que ceux qui t les premieres teintures des Operations d'arithme-ue, pourront le connoître facilement, ſans les ex-iquer plus au long dans ce lieu cy.

9. La Souſtraction eſt une Operation d'Arithmeti-e, qui retranche un petit nombre d'un plus grand ur en ſavoir la difference: comme ſi de 9 je retran-e 3, & que je diſe que le reſtant eſt 6, qui eſt la dif-renc- de 9 à 3; cette Operation eſt une Souſtraction,

ce qui se doit entendre de toute sorte de nombres quelques grands qu'ils soient. La situation des chifr dans la Soustraction, est de poser le petit nombre so le grand; en sorte que les nombres du plus petit r pondent aux nombres ou unitez du plus grand e même colomne, les dixaines aux dixaines encette sor

De	A,	2	9	8	7	5	2
ôter	B,		4	3	2	4	1

10. Dans la Soustraction il y a deux nombres co nus, & on cherche le troisiéme que l'Operation do découvrir; ainsi dans l'exemple cy-dessus, les de nombres A & B, sont les nombres connus: Le p grand est toûjours le dessus, comme A; & le plus pe est dessous, comme le nombre B. Pour distinguer grand du petit, & désigner quelle Operation l'on d faire; on écrit à côté du grand nombre (de) com vous le voyez cy-dessus; & à côté du petit l'on é (ôter) ce qui marque que le nombre B doit être ô du nombre A.

11. Le troisiéme nombre qui est inconnu, & que Soustraction doit découvrir, est la difference, comm dans la figure suivante, le nombre Z; Et à côté l'o écrit difference, excez, ou restant du plus grand nom bre; ainsi que vous le voyez.

De	A,	2	9	8	7	5	2
ôter	B,		4	3	2	4	1
Difference							
Excez ou reste	Z,	2	5	5	5	1	1

12. Le Formulaire de la Souſtraction, eſt tant de tant, parce que dans cette Operation l'on retranche une fois le plus petit nombre du plus grand.

13. La Multiplication eſt une Operation d'Arithmetique, qui trouve un nombre qui en contient deux autant de fois qu'ils ont d'unitez : Par exemple, ſi l'on multiplie 8 par 9, & que l'on trouve 72, ce dernier nombre 72 contiendra le nombre de 8 autant de fois que le nombre de 9 a d'unitez ; pareillement ce même nombre 72, contiendra 9 autant de fois que 8 a d'unitez. Et cette Operation qui découvre ce troiſiéme nombre s'apelle Multiplication. Ou bien ſi vous voulez définir plus briévement la Multiplication, vous direz que c'eſt la production d'un nombre par un autre : Ce que nous avons déja expliqué ci-devant.

14. Dans la Multiplication il y a deux nombres connus, & un troiſiéme que l'on cherche ; le premier des nombres connus s'apelle le Multiplicande ; le ſecond Multiplicateur ; & le troiſiéme que l'on cherche & que l'Operation doit découvrir, s'apelle le Produit.

15. Le Multiplicande eſt celui qui doit être multiplié, c'eſt-à-dire, qui doit être poſé autant de fois que le ſecond nombre ou multiplicateur a d'unitez : comme A figure ci-deſſous. Le Multiplicateur eſt le nombre qui multiplie le Multiplicande, c'eſt-à-dire, qui le produit autant de fois qu'il a d'unitez comme B. Et le Produit enfin eſt le requis de la multiplication comme Z. L'on poſe le Multiplicande le premier, & au deſſous le Multiplicateur ; de ſorte que les unitez de l'un & de l'autre ſe répondent, les dixaines, les centaines, &c. A côté du Multiplicande l'on écrit (Multiplier) & à côté du Multiplicateur l'on écrit (par) comme le

marque la figure ci-dessous, & en suite l'on separe le produit des deux autres par un petit trait. Voyez la figure.

Multiplier — 1 9 5 A
par . . . . . 7 B

Produit 1 3 6 5 Z

16. Le Formulaire de la Multiplication est tant de fois tant, parce que l'on pose le Multiplicande autant de fois que le Multiplicateur a d'unitez. Ordinairement on pose pour le multiplicande le plus grand nombre, & pour le Multiplicateur le plus petit.

17. La Division ou Partition est une Operation d'arithmetique, qui retranche d'un grand nombre un plus petit autant de fois que le plus petit peut être retranché; comme si je demandois en 120 combien de fois 5, & qu'aprés avoir operé je trouvasse 24, cette operation seroit appellée partition; parce qu'en effet 120 contient 24 fois 5, ou bien 120 partagé & mesuré, & divisé en 5, forme 24 portions de 5, d'où cette operation a pris le nom de division: car c'est tout de même que si vous partagiez & divisiez 120 en 24 portions lesquelles portions auroient toutes chacunes 5 unitez.

18. Dans la Partition il y a aussi trois nombres, deux qui sont donnez, & le troisiéme que l'on cherche; les deux donnez sont le Dividende & le Diviseur: le Dividende est le plus grand nombre qui est partagé & mesuré par le plus petit; & le Diviseur est le plus petit nombre donné; le troisiéme s'apelle l'Exposant ou le Quotient, parce qu'il découvre combien de fois

le plus petit eſt dans le plus grand ; & le plus petit eſt toûjours autant de fois dans le plus grand, que l'Expoſant a d'unitez. Cette figure repreſente l'un & l'autre.

Diviſer 120 (24 Expoſant ou Quotient.

par 5 (

19. Le Dividende ſe place toûjours au deſſus du Diviſeur ; & le Diviſeur ſe place autrement que dans les Operations precedentes : car dans les Operations precedentes chaque nombre donné a ſes unitez, ſes dixaines, centaines, &c. en même claſſe : Et dans la diviſion le premier chiffre à main gauche du Diviſeur, ſe place ſous le premier chiffre à main gauche du Dividende, comme le repreſente la figure ci-deſſous : Et l'Expoſant ſe met à côté, comme vous le voyez.

Dividende 120 (24 Expoſant.

Diviſeur 5 (

20. Le Formulaire de la Partition eſt en tant combien de fois tant : Par exemple en 24 combien de fois 4 ; parce que l'Expoſant, comme nous avons dit, découvre combien de fois le Diviſeur eſt contenu dans le Dividende.

21. La compoſition des puiſſances, eſt l'operation qui éleve un nombre à toutes ſes diverſes puiſſances. Et elle ne differe point de la multiplication, comme on le verra dans la pratique.

22. L'Extraction des Racines, eſt une operation qui découvre le nombre, qui ayant été multiplié par ſoy même a produit le nombre donné : Par exemple, l'on demande la racine quarré de 81, & que l'operation trouve le nombre de 9 qui multipliée par ſoi-même, produit le nombre donné 81, cette operation s'appelleroit l'extraction de la Racine quarrée. Que l'on demandoit la Racine cube de 216, il faudroit trouver un nombre, qui multiplié par lui-même, & le produit encore multiplié par le même nombre multiplicateur, feroit au juſte le nombre de 216: Par exemple 6, car 6 fois 6 ſont 36, & ſix fois 36 ſont 216 : Ainſi de toutes les extractions des differentes Racines.

23. Dans l'extraction des racines, il n'y a que deux nombres ; l'un qui eſt donné & l'autre que l'on cherche: & ce nombre donné prend different nom, ſuivant que l'on extrait differentes Racines : car ſi l'on extrait la Racine quarrée, le nombre donné eſt un nombre quarré ; ſi l'on extrait la Racine cube, le nombre donné eſt nombre cube, & ainſi de toutes les puiſſances : le nombre que l'on cherche prend le nom de Racine ou de l'expoſant de la racine, & ſuivant les differentes extractions ; car ſi c'eſt extraction de la Racine quarrée, l'Expoſant ſera racine quarrée, ce qui eſt tres-facile à concevoir. Nous n'expliquerons pas ici plus d'Operations d'Arithmetique, parce que ce ſeroit faire confuſion que d'en parler ſans en donner les Regles en même tems ; ce que nous ferons ailleurs.

CHAPITRE IV.

Des Caracteres de l'Algebre.

1. NOus appellerons Grandeur en general tout ce qui eſt capable d'augmentation & de diminution: de ſorte que les nombres mêmes ſeront appellez grandeurs en ce ſens, parce qu'ils ſont capables d'augmentation & de diminution; car l'on peut ajoûter au nombre 9 un deuxiéme nombre 3, qui avec 9 ſera 12: ou bien l'on en peut retrancher 3 & vous aurez 6.

2. La quantité d'une grandeur ſera ici appellée le quotient ou l'expoſant de ſa meſure; ainſi par exemple, ſi l'on a meſuré une longueur par des lieuës, des toiſes, ou des pieds; le nombre qui exprimera combien cette longueur a de lieuës, de toiſes ou de pieds, ſera la quantité de cette longueur. De même ſi on prend d'un nombre une certaine portion: Par exemple, les $\frac{1}{4}$ les $\frac{1}{7}$ les $\frac{1}{2}$ &c. Tous ces expoſans ſeront les quantitez des nombres retranchez.

3. Nous appellerons Grandeur poſitive celle qui ajoûte au rien, & nous nommerons Grandeur défective celle qui retranche du rien; ainſi 4 eſt une grandeur poſitive; parce que 4 ajoûte quatre unitez à rien: Mais moins 4 ſera une grandeur défective, parce qu'il s'en faut 4 pour arriver au rien. Cette maniere de parler eſt tres frequente dans l'Algebre, & quoy qu'elle paroiſſe du prim'abord entierement abſurde, l'on connoîtra quelle eſt l'uſage de cette expreſſion dans le Traité d'Algebre,

& dans ces operations. Nous remarquerons cepe
dant que cette maniere de parler eſt même en uſa
dans le commerce de la vie civile; puiſque nous diſo
d'un homme qui n'a rien, & qui doit 1000. écus, qu
s'en faut mile écus qu'il n'ait vaillant quelque choſe.

4. Grandeur connuë, eſt celle dont la quantité e
l'expoſant de ſa meſure eſt connuë: comme le nomb
20 ou 30 ou 100; ou bien la longueur de cent lieu
ou cent toiſes ou de cent pieds.

5. Mais Grandeur inconnuë, eſt celle dont on i
nore la quantité ou l'expoſant de ſa meſure; comm
qui demanderoit quel eſt le nombre qui ajoûté à
fait 30, ce nombre dans cette expreſſion paroît incó
nu, parce que l'on ignore d'abord quel il eſt, ou que
eſt ſa quantité.

6. Les définitions precedentes bien entenduës, il e
facile de concevoir ce que c'eſt que l'Algebre: Nou
définirons donc l'Algebre une Science qui conſider
la grandeur en general, & qui faiſant ſur certains Ca
racteres les Operations de l'Arithmetique, découvr
& fait connoître la quantité des grandeurs inconnuë
par le moyen de celles qui ſont connües. Cette Scien
ce eſt comme la Science generale des Mathematique
car la Geometrie ne conſidere que les dimenſions, &
leurs proprietez; l'Arithmetique n'a pour objet qu
les nombres; mais l'Algebre conſidere l'un & l'autr
en general, les regardant comme capables de plus & d
moins, & par conſequent capables de toutes les opé
rations de l'Arithmetique. Il faut avoir un peu de pra
tique dans cette Science pour en concevoir les beau
tez. Voici pour ne pas nous écarter de nôtre deſſein
les Caracteres dont on ſe ſert dans cette Science admi
rable.

7. Cette figure o marque le rien; je la me

premiere, parce que le rien eſt parmi les Algebriſtes comme le centre de toutes leurs Operations, car toutes les Grandeurs poſitives ajoûtent au rien, & toutes les Grandeurs défectives en retranchent.

8. Les Grandeurs connües s'expriment par nombres ou par lettres: Par exemple 24. 100. 1000. ou bien la grandeur *a* la grandeur *b*, la grandeur *c*. Il faut prendre garde d'exprimer les grandeurs égales par nombres égaux, ou par des lettres ſemblables: Par exemples 24 plus 24; *a*, plus *a*. Et les grandeurs inégales s'expriment par des nombres inégaux, ou des lettres differentes: Par exemple 24, plus 12, plus 7; ou bien *a*, plus *b*, plus *c*. Et pour avoir plus de facilité, il faut garder l'ordre des lettres, ſuivant l'ordre des grandeurs: Par exemple appeller la premiere grandeur *a* la ſeconde *b* la troiſiéme *c* ainſi conſecutivement.

9. Les Grandeurs inconnuës ſont exprimées par les lettres de l'Alphabet, en prenant à rebour: C'eſt pourquoi s'il y a pluſieurs grandeurs inconnuës la premiere ſera exprimée par *z*, la ſeconde par *y*, la troiſiéme par *x*, & ainſi de ſuite, prenant garde d'exprimer les inconnuës égales par des mêmes lettres, & les inégales par des lettres differentes.

10. La Grandeur poſitive ſe marque par ce ſigne + qui ſignifie plus: de ſorte que toutes les grandeurs qui ſont precedées de cette marque + ſeront toutes poſitives; ainſi + *a*, + 3 + 6 + *d*, ſignifient plus *a*, plus 3, plus 6, plus *d*. Et la grandeur défective ſe marque par ce ſigne — qui ſignifie moins: Et par conſequent tous ces Caracteres — *a*, — 4 — *x*, — *b*, ſignifient moins la grandeur *a*, moins la grandeur 4, moins la grandeur *x*, moins la grandeur *b*.

11. Les grandeurs égales ſont exprimées par l'u
ou l'autre de ces ſignes = ∞ ainſi ces Caracteres 4 =
a ou 4 ∞ *a* ſignifient que 4 eſt égal à *a*.

12. L'on pratique toutes les mêmes Operations dan
l'Algebre que dans l'Arithmetique, dont voici l'uſag
des ſignes dans les Operations principales.

13. Dans l'Addition l'on ſe ſert du ſigne + & −
Par exemple, ſi l'on vouloit ajoûter enſemble la gran
deur *a* avec la grandeur *b*, moins la grandeur *c* & l
grandeur *d*, l'on écriroit ainſi : *a* + *b* − *c* + *d*, où vou
remarquerez que lorſque devant une grandeur l'o
ne met aucun ſigne, l'on ſous entend le ſigne + pa
exemple 10 + *b*, eſt la même que + 10 + *b*.

14. Dans la Souſtraction l'on ſe ſert du ſigne −
que l'on écrit aprés la grandeur de laquelle l'on r
tranche, ainſi pour écrire le difference de *b* à *c*, l'
écrit *b* − *c*, ce qui marque que *c* a été retranché de

15. Dans la Multiplication, ſi elle eſt de nombr
à nombre elle n'a pas de ſigne particulier, parce qu'e
le ſe fait comme dans l'Arithmetique : mais quan
on veut multiplier une grandeur litterale par une a
tre grandeur litterale, on les joint enſemble : P
exemple, pour multiplier *a* par *b*, l'on écrit *a*
pour multiplier *c* par *d*, l'on écrit *c d*, & ſi l'on vo
loit multiplier *c d* par *e*, l'on écriroit *c d e* ; &
l'on multiplioit une grandeur par elle-même, on
mettroit autant de fois qu'elle ſeroit multipliée : l
exemple, ſi l'on veut multiplier *a* par *a*, l'on écri
a a ; & ſi l'on vouloit encore multiplier ce produit
par *a*, l'on écriroit *a a a*, ou pour abreger *a* ; *bbb*
*b*⁴, ainſi de tous autres. Mais il faut remarquer d
ces abbreviations la difference qu'il y a entre 2 *a*
2 ; car le premier marque ſimplement l'addition

ois la grandeur a : de sorte que $2a$ est la même chose que $a+a$: Tout au contraire dans cette expression aa ou a^2, la grandeur a est multipliée par elle-même ; de le sorte que si lon détermine la quantité de la grandeur à 12, 2 fois a ou $2a$ ou $a+a$ vaudront seulement 24 ; mais aa ou a^2, vaudront 144, car c'est la même chose que 12 fois 12 qui sont 144, ce qu'il faut bien remarquer.

16. Dans la division l'on se contente de separer le Dividende du Diviseur par un petit trait en cette maniere $\frac{a}{b}\frac{b}{10}$; ce qui marque que a a été divisé par, b & que $\frac{a}{b}$ en est l'exposant ; de même b a été partagé par 10, & cette figure $\frac{b}{10}$ marque l'exposant.

17. Pour les racines on se sert de ce signe $\surd$ & pour marquer que c'est une racine quarrée ou cubique, l'on écrit $\surd Q$ & si l'on veut désigner d'autres puissances l'on écrit $\surd^3$ pour marquer la cubique ; $\surd^4$ pour la racine quarrée quarrée ; $\surd^5$ pour marquer la racine de la cinquieme puissance ; $\surd^{10}$ pour marquer la racine de la dixiéme puissance. Ainsi pour marquer la racine quarrée de aa, l'on écrit $\surd aa$ pour écrire la racine quarrée quarrée de $aaaa$, l'on écrit $\surd^4$ Mais prenez garde qu'autre chose est d'écrire le chiffre au dessus du signe en cette maniere $\surd^5$, & l'écrire à côté de cette sorte $\surd 5$: car dans le premier $\surd^5$ marque la racine de la cinquéme puissance ; & $\surd 5$ marque la racine de ce nombre 5.

18. Pour exprimer les Racines sourdes, c'est-a-dire, les grandeurs incommensurables ou qui n'ont aucune mesure, l'on se contente d'écrire le signe à côté de la grandeur dont l'on extrait la racine en cette maniere $\surd 5$ $\surd 18$ $\surd 30$: car supposé que 5, 18 & 30 soient

3 quarrés dont la racine eſt ſourde, car elle ne peut s'exprimer par nombres, il ſuſit d'écrire comme nous avons dit √ 5, √ 18, √ 30.

19. Les Proportions ont auſſi leurs Signes, car pour marquer la Proportion Arithmetique ſeparée, qui eſt entre 7, 5, 12, 10. on l'exprime ainſi 7, 5 : 12. 10. & ſi elle eſt continuë, en cette maniere ÷ 7. 5. 3. La Proportion Geometrique ſeparée ſe marque par ce ſigne : : Par exemple 6, 2. : : 12. 4. Et la proportion geometrique continuë par le même ſigne, diviſé par un trait en cette maniere ⁝ Par exemple ⁝ 1. 2. 4. 8. 16.

20. Nous remarquerons ici, puiſque nous parlons de la grandeur en general, que toutes grandeurs auſſi bien que les nombres peuvent avoir les mêmes raports arithmetiques, & les mêmes raiſons geometriques que nous avons conſideré dans les nombres ; car deux lignes, par exemple, peuvent être conſiderées par raport à une certaine meſure déterminée, comme de toiſe ou de pied, laquelle meſure d'un pied, par exemple aura le même effet à l'égard de ces grandeurs, que l'unité à l'égard des nombres, & par conſequent dans deux lignes ou deux quarrez, ou deux cubes, l'on pourra marquer la difference arithmetique, & par conſequent leurs raport arithmetique. Pareillement l'on peut conſiderer combien de fois la plus petite ou l'une de ſes parties aliquotes eſt contenuë dans la plus grande : Par exemple une ligne peut être la moitié, le tiers ou le quart, &c. d'une plus grande ; & par conſequent avoir toutes les mêmes raiſons Geometriques que nous avons remarqué dans les nombres, avec les compoſitions de raiſon, & tout ce que nous avons expliqué au Chapitre II. de cette ſeconde Partie, ce qui peut facilement être appliqué à toutes ſortes de grandeurs.

21. Lorſqu'une longueur par exemple, ou toute

titre grandeur dans les trois dimenſions, a une commune meſure avec une autre longueur, cette raiſon geometrique s'appelle raiſon rationnelle; ou de nombre à nombre, parce qu'elle peut s'exprimer par nombre: Ainſi par exemple, ſi nous comparons une longueur de 15 pieds avec une longueur de 3 pieds, la raiſon geometrique qu'il y aura de la plus grande pour s'exprimer par ces nombres, & dire, par exemple, *a* eſt à *b*, ce que 15 eſt à 3, en ce cas ce ſera une raiſon rationnelle. Mais ſi les grandeurs ſont incommenſurables, c'eſt à dire, qui n'ont aucune commune meſure, comme la Diagonale d'un quarré avec ſon côté ou ſa racine (ce que nous démontrerons ailleurs) pour lors la raiſon geometrique qui ſe trouve entr'elles, eſt appellée irrationelle, & elle ne ſe peut exprimer par nombre. Ainſi, par exemple, ſi vous prenez *a* pour le côté ou la racine d'un quarré, & *b* pour ſa diagonale, vous direz que la racine de *a* à *b* eſt irrationelle.

22. On appelle Multinomes les grandeurs incommenſurables entr'elles: & s'il y en a 2, on les nomme Binomes; ſi 3, Trinomes; ou bien grandeurs ſourdes incommenſurables de deux nombres, trois nombres, &c.

Il y a une infinité d'autres expreſſions dans l'Algebre que nous n'expliquons pas ici, parce qu'elles demandent plus de connoiſſance que celles que nous prétendons ici donner: c'eſt pourquoi nous ne diſons rien des dégagemens des Subſtitutions, des Directions, des Retours, des Combinaiſons, des Fractions, de l'Algebre, &c. Voici une Table qui donnera l'explication des Signes que nous venons d'expliquer.

Signe du rien.

+ Signe du plus.

− Signe du moins.

$aaa.\ bbb.\ c^2.\ d^4.\ f^5$ Signe de la Multiplication.

$\frac{a}{a}\ \frac{ab}{10}\ \frac{9}{x}$ Signes de la diviſion.

Signes des Racines $\surd 4\ \surd 18.$

= ou ↄ Signe de l'égalité.

: Proportion Arithmetique ſeparée.

÷ Proportion Arithmetique continuë.

:: Proportion Geometrique ſeparée.

∷ Proportion Geometrique continuë.

a, b, c, d, e, f, &c. Pour les grandeurs connuës.

z, y, x, v, t, s, pour les inconnuës.

CHAPITRE V.

De la Muſique.

1. LE ſon eſt un ſentiment excité en nous par le mouvement, ou le froiſſement, ou le tremblement des corps: l'experience fait aſſez entendre cette définition; car l'air agité ou d'autres corps froiſſez, nous apercevrons le ſon. Et l'on en diſtingue de deux ſortes, l'un aigu & l'autre grave, qui ne prennent leurs noms que par le plus ou le moins de mouvement qui arrive au corps ſonore. De ſorte que le ſon aigu eſt celui qui eſt produit par un mouvement rapide & frōpt: mais le mouvement grave eſt produit par un mouvement plus lent; d'où l'on voit que puiſque le ſon eſt capable de plus & de moins il peut être l'objet des Mathematiques.

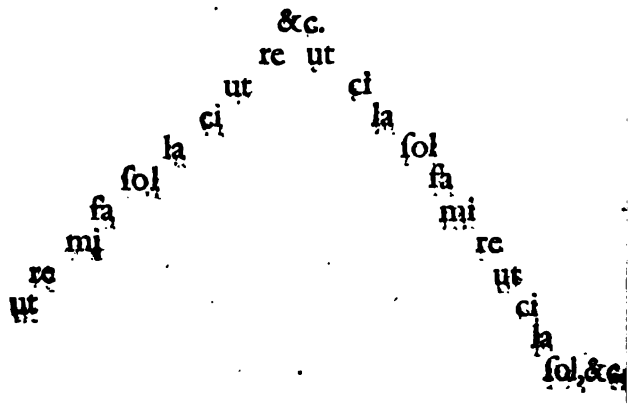
2. Nous diſtinguerons de trois ſortes de Muſique, une Phyſique qui conſidere la nature & les proprietez du ſon; l'autre Mathematique, qui en conſidere ſeulement le plus & le moins, ou les differentes meſures & raports geometriques des ſons; & la troiſiéme l'Art de la Muſique, qui aplique les Regles de la Muſique pour produire la melodie, ou par le chant, ou par les inſtrumens ſonores. Nous ne traiterons ici que de la Muſique Mathematique.

3. La melodie ou harmonie eſt une liaiſon & mélange des ſons agreables.

4. Les ſons ſont agreables qui ont quelque rapport rationel entr'eux, & qui ſe mélent facilement pour s'entretenir: Au contraire les ſons deſagreables n'ont point de raports rationels, ou tres-peu, ce qui fait qu'ils ne s'uniſſent pas, ni ne ſe lient pour ſe conſerver, au contraire ils ſe détruiſent l'un l'autre, c'eſt ce

que l'experience a fait reconnoître; car ſi les cordes d'un Luth ſont d'accord, l'on ne ſçauroit en toucher une que l'on ne s'apperçoive du mouvement de celles qui s'accordent; ce qui n'arrive pas dans celles qui ne s'accordent pas: de ſorte que ce que l'on appelle conſonance, eſt cette varieté de ſons qui s'uniſſent, & qui par leur union produiſent ce que nous avons appellé melodie.

5. Comme ce ſont les voix & les ſons qui forment par leur mélange & leur union toute l'harmonie; pour déſigner ces differentes voix, ſelon qu'elles ſont plus ou moins aiguës, & qu'elles ont un certain nombre ou proportion du ſon, on leur a donné les noms ſuivans, depuis que Guidon Aretin les inventa en 1028. ces noms ſont: *ut, re, mi, fa, ſol, la*, & nos Modernes y en ont ajoûté une ſeptiéme qui a le même ſon qu'un *mi* qui ſeroit chanté aprés le *la*; ils l'ont appellez *ci*: Aprés quoi l'on recommence les mêmes notes dans des ſons plus aigus, ſi l'on veut continuer d'augmenter les voix ou de l'abaiſſer ſi l'on veut des ſons plus graves, gardant toûjours leur même ſituation & arrangement; en cette ſorte:



6. Pour désigner ces mêmes voix, l'on s'est encore servi des lettres alphabetiques, à qui l'on a donné deux ou trois noms des voix que nous venons de décrire, dont ils ont formé des tables telles que sont les suivantes,

b mol, nature, b quarre.

E	b	mi	la
D	la	re	sol
C	sol	ut	fa
B	fa	b	mi
A	mi	la	re
G	re	sol	ut
F	ut	fa	

b mol, b quarre.

E	ci	mi
D	la	re
C	sol	ut
B	fa	ci
A	mi	la
G	re	sol
F	ut	fa

Nous nous servirons de cette derniere comme la plus facile.

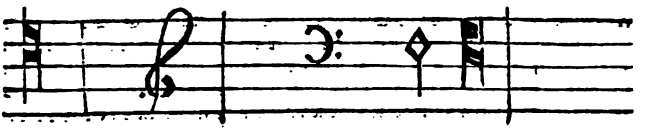
7. L'on repete ces lettres alphabetiques de même que les voix, lorſque l'on veut monter ou deſcendre: & pour déſigner le premier ordre de ces lettres commençant par les ſons graves, ils l'ont écrit par des lettres majuſcules : le ſecond ordre par des lettres plus petites : & le troiſiéme ordre par des lettres doubles, en cette maniere :

ee ci mi
dd la re
cc ſol ut
bb fa ci
aa mi la
gg re ſol
ff ut fa

e ci, mi
d la, re
c ſol, ut
b fa, ci
a mi, la
g re, ſol
f ut, fa

E, ci, mi
D, la, re
C, ſol ut
B, fa, ci
A, mi, la
G, re, ſol
F, ut, fa

8. Et pour n'être pas obligé de repeter ſi ſouvent les lettres dont nous venons de parler, l'on s'eſt contenté de ſe ſervir de certaines marques pour déſigner les principales de ces lettres. Ces marques ſont les ſuivantes à qui l'on donne le nom de Clef.

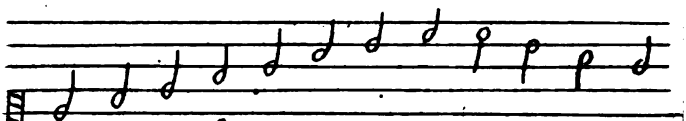


La premiere de ces clefs ainſi marquées eſt appellée la clef de C, *ſol*, *ut*; la ſeconde qui eſt un G, eſt la clef de G, *re*, *ſol*, & la troiſiéme marquée de cette ſorte ou eſt nommée la clef de F, *ut*, *fa*.

9. Ces clefs ſervent à marquer quelle note ou quelle lettre il faut prendre ſur la ligne où elle eſt poſée. Ainſi dans la clef de C, *ſol*, *ut*, il faut prendre un *ſol*, ou un *ut*, c'eſt à dire, qu'en b mol (ainſi que je l'expliquerai bien-tôt) il faut prendre un *ſol*, & en b quarre un *ut*. Dans la clef de G, *re*, *ſol*, il faut prendre en b mol un *re*, & en b quarre un *ſol*. Dans F, *ut*, *fa*, le b mol commence par *ut*, & en b quarre par un *fa*.

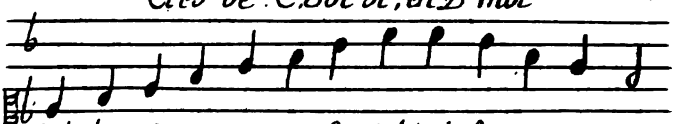
10. Mais pour conter les notes de ſuite, l'on ne conte pas ſeulement les notes qui ſont ſur les lignes, mais encore celles qui ſont entre les lignes; de ſorte que la clef vous en marque l'ordre & la ſuite. Ces notes ſont ordinairement marquées par ces caracteres que l'on place ſur les lignes; & c'eſt la tête qui marque le lieu de la note: comme en cette Table ſuivante où les trois clefs ſont diſtinguées.

Page. 282. Clef de C. Sol vt en 4 quarre



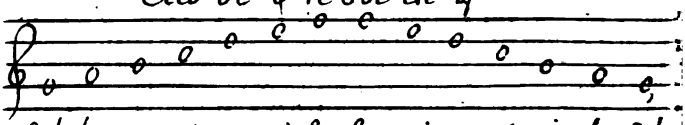
vt, re, mi, fa, Sol, la, ci, vt, vt, ci, la, Sol

Clef de C. Sol vt, en B mol



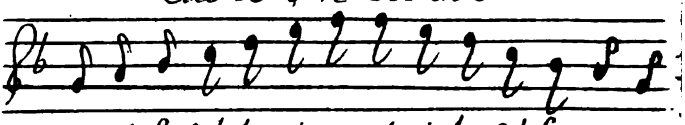
Sol, la, ci, ut, re, mi, fa, Sol, Sol, fa, mi, re, ut

Clef de 𝄞 re sol en 4



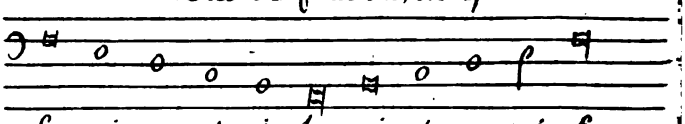
Sol, la, ci, ut, re, mi, fa, Sa, mi, re, ut, ci, la, Sol

Clef de 𝄞 re Sol en b



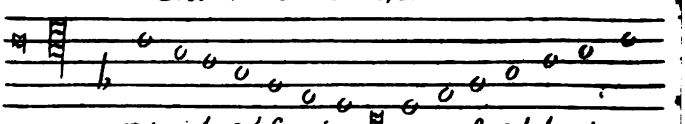
re, mi, fa, Sol la, ci, ut, ut, ci, la, Sol, fa, mi, re

Clef de 𝄢 ut Sa, en 4



fa, mi, re, ut, ci, la, ci, ut, re, mi, fa

Clef de F ut fa, en b



vt, ci, la, sol, fa, mi, re, ut, re, mi, fa, sol, la, ci, ut

Pl. 80

11 L'on ne diſtingue pas ſeulement les notes par leurs poſitions, mais encore par le temps que l'on demeure à les faire ſonner; c'eſt ce qui a fait inventer differentes figures qui marquent les differens temps que l'on doit s'arrêter ſur une note: & pour cela les Muſiciens diſtinguent de trois ſortes de meſures, l'une à 4 batemens qu'ils appellent meſure pleine; qu'ils déſignent par un C; la ſeconde eſt à 3 batemens, & ils la déſignent par un 3; la troiſiéme n'eſt qu'à 2 batemens, ou un ¢ coupé de cette ſorte, c'eſt par raport à ſes meſures qu'ils differentient leurs notes ainſi. Cette figure qu'ils appellent longue vaut 4 meſures: la breve vaut 2 meſures: la ronde vaut une meſure: la blanche vaut deux temps: la noire ne vaut qu'un temps ou batement: la crochuë n'en vaut qu'un demi c'eſt à dire, qu'il en faut deux pour un temps; & enfin la double crocheu ne vaut que le quart d'un batement, & par conſequent il en faut quatre pour un batement.

12. Les tons ſont les differens degrez de la voix ou du ſon en montant du grave à l'aigu, ou en deſcendant de l'aigu au grave, ſelon les notes que nous avons marquées ci-devant: Mais tous les degrez ne ſont pas des tons parfaits, c'eſt pourquoi l'on en diſtingue de quatre ſortes, qui ſont le ton majeur, le ton mineur, le demi ton, & la dieſe. Le ton majeur eſt en raiſon ſeſquioctave, c'eſt-à-dire, comme 9 à 8; le ton mineur eſt comme 10 à 9; le demi-ton comme 16 à 15; la dieſe comme 25 à 24, ou comme 128, à 125. *ut re*, eſt un ton: *re mi*, un autre ton: *mi fa*, eſt demi ton: *fa ſol*, eſt un ton: *ſol la*, ton: *la ci*, autre ton: *ci ut*, demi ton: & ainſi en deſcendant.

13. Il y a cette difference entre le demi ton & la dieſe, que la dieſe eſt plus proche de la note ſuperieure que le demi ton; ainſi la dieſe eſt plus aiguë que le demi-ton. Pour marquer une dieſe en Muſique, l'on ſe ſert de ce ſigne ♯

14. Les intervales ſont les differences des ſons ou des voix qui ne ſe ſuivent pas immediatement, comme *ut mi : ut fa : ut ſol ; ut la*, &c. Il y en a de deux ſortes, qui ſont, les conſonans ou melodieux, & les diſſonans. Les conſonans s'accordent & font la melodie ; les diſſonans ſe détruiſent & ſont deſagreables ; ceux-cy ſont comme incommenſurables, les autres ont quelque raport rationel entr'eux. L'on conte ordinairement pour conſonance la tierce majeure & mineure, la quinte majeure & mineure, la ſexte majeure & mineure, & l'octave. Les Muſiciens ordinairement rejettent la quarte tant majeure que mineure : Mais les Mathematiciens reçoivent la quarte mineure ou le Diateſſaron ; paree que cet intervale eſt compoſé d'un raport rationel qui ſe trouve entre leurs ſons. La Table ſuivante marque les accords, & les diſſonances à l'infini, ſupoſé que les ſons puiſſent augmenter de la ſorte ;

	Diſſon.	diſſon.	diſſon.					
Uniſſon,	1	2	3	4	5	6	7	
f	ut	re	mi	fa	ſol	la	ci	
octave,	8	9	10	11	12	13	14	
f	ut	re	mi	fa	ſol	la	ci	
quinziéme,	15	16	17	18	19	20	21	
ff	ut	re	mi	fa	ſol	la	ci	
vingt-deux ?	22	23	24	25	26	27	28	
fff	ut	re	mi	fa	ſol	la	ci	
ving-neuf ?	29	30	31	32	33	34	35	
ffff	ut	re	mi	fa	ſol	la	ci	
trente-ſix,	36	37	38	39	40	41	42	&c.
fffff	ut	re	mi	fa	ſol	la	ci	
	Accords,	acc.	acc.	acc.				

15. Il y a cette difference de la quinte majeure, par exemple, ou de la sexte majeure, &c. à la mineure, que ces sortes d'accords majeurs ont moins de demi-tons que les mineurs : Ainsi *ut sol*, est une quinte majeure, parce qu'elle n'a qu'un demi ton dans son intervale : mais *fa ci*, en descendant, ou *ci fa*, en montant, est une quinte mineure ; de même *ut mi*, est une tierce majeure, parce que l'intervale n'est composé d'aucuns demi-tons : mais *re fa*, est tierce mineure, parce que son intervale renferme le demi-ton *mi fa*.

16. Les accords sont entr'eux comme les nombres suivans, ce que l'on démontre en Musique : Je n'ay pas voulu les ômettre, pour faire voir la convenance que la Musique a avec les nombres. Cette Table vous represente leurs raports.

Le Diapason ou l'octave, comme —— 2 à 1.
Le Diapente ou la quinte, comme —— 3 à 2.
Le Diatessaron ou la quarte —— 4 à 3.
Le Diton ou tierce majeure —— 5 à 4.
Le Sesquiton ou tierce mineure —— 6 à 5.
L'hexacorde ou sexte majeure —— 5 à 3.
L'hexacorde mineur ou sexte mineure —— 8 à 5.

17. Pour mieux distinguer les tons & les accords, on tend sur une regle de bois une longue corde de boyau par le moyen de deux chevalets, & la regle étant divisée suivant les nombres que nous venons de décrire, si l'on applique d'autres chevalets entre les deux principaux la corde donne les tons & les accords : Cet instrument est appellé Monocorde.

18. L'on distingue deux genres de Musique, l'un qu'on appelle b mol, & l'autre b quarre. Le genre de b mol se marque sur les lignes en b *fa*, *ci*, par un b simplement ; & le genre b quarre ne marque rien. La difference de ces deux genres est que le b mol est plus doux, parce qu'il évite le triton qui se rencontre du *fa*

au *ci*, en y ſubſtituant un demi ton aprés *la*; ce demi ton eſt ordinairement apellé *fa*, *fin* ou *za*; ainſi au lieu de *la*, *ci*, l'on dit *la za*, ou *la fa*, en ne montant que d'un demi-ton. Le b quarre au contraire n'évite point le triton, car aprés le *fa* ſuivent trois tons entiers *fa ſol*, *ſol la*, *la ci*

19. La Melopée eſt la convenance du chant aux paſſions ou affections que l'on veut exprimer : c'eſt pourquoi dans la compoſition il faut prendre garde d'accommoder les ſons doux, comme en b mol aux paſſions douces & languiſſantes. Au contraire dans les paſſions fortes & violentes, il faut des ſons graves & forts, qui ſe trouvent plus facilement dans le genre de b quarre.

TROISIE'ME PARTIE.

Qui contient un Abregé des principales Operations de l'Arithmetique.

CHAPITRE I.

Regles de l'Addition.

1. RAngez les caracteres de chaque nombre propoſé en forme de colonne ; les unitez dans la premiere à main droite, les dixaines dans la ſeconde, les centaines dans la troiſiéme, & ainſi des autres, ſuivant la table du ch. 1. p. 2. n. 4.

2. Cherchez la ſomme de la colonne des unitez adjoûtant chaque chiffre l'un aprés l'autre, comme nous l'avons remarqué dans nos definitions au Formulaire de l'Addition, p. 2. ch. 3. n. 7.

3. Si la ſomme trouvée ſe peut exprimer par un ſeul chiffre poſez-le ſous le trait & en même rang que la colonne des unitez ; comme ici dans le premier exemple.

4. Mais ſi la ſomme trouvée ne peut s'exprimer que par deux ou pluſieurs chiffres, vous poſerez ſeulement le chiffre des unitez ſous ſa colonne, & reſerrerez le chiffre des dixaines pour l'adjoûter à la colonne des dixaines. Voyez le ſecond exemple.

5. S'il ſe trouve des zeros dans cette premiere colonne vous les conterez pour rien, & au cas que la ſomme de cette premiere colonne eut pour premier chiffre un zero, vous le poſerez au premier rang tout comme un autre chiffre, & reſerverez le chiffre des

dixaines pour le ſecond rang. Voyez le troiſiém exemple où le zero eſt poſé au premier rang de la ſom me.

6. Si cette colonne eſt toute de zeros, vous poſe rez ſeulement zero. Voyez le quatriéme exemple.

7. Vous chercherez en ſuite la ſomme de la ſecon de colonne, parcourant chaque chiffre & les ajoûtan ſuivant le Formulaire de l'Addition ; ſe ſouvenant d' ajoûter le chiffre que l'on a retenu de la premiere co lonne par la regle 4e, & ſi le nombre qui reſulte d l'Addition des dixaines, ſe peut exprimer par un ſeu chiffre, vous le poſerez ſimplement ſous ſa colonn au deuxiéme rang, comme vous le voyez dans le 4 exemple. Mais s'il ne peut s'exprimer que par deu chiffres vous poſerez le premier, & reſerverez l'aut pour la troiſiéme colonne, comme on peut le voi dans les exemples 1 2 & 3.

8. Dans une colonne toute de zeros vous poſere ſeulement le nombre que vous aurez retenu de la pre cedente colonne & enſuite vous irez à la troiſiém colonne. Voyez le 5e exemple.

9. Vous continuerez d'operer de la même manie dans toutes les autres colonnes, ſuivant le même ord & les mêmes regles. Et lorſque vous aurez trouvé l derniere ſomme, vous la poſerez ſous la derniere co lonne, avançant le dernier chiffre d'un rang, ſi cet ſomme ne peut s'exprimer par un ſeul chiffre, com l'on le void dans tous les exemples cy-bas, excepté ſixiéme ou la derniere ſomme, eſt exprimée par ſeul chiffre.

10. Mais ſi la ſomme qui ſe peut trouver à chaq colonne, étoit compoſée de trois chiffres ou pl Vous poſerez ſeulement les premiers ſous ſa colonn & les autres ſeront reſervez pour la colonne ſuiva ou avancez, au cas que ce fut à la derniere colon Voyez le 7e & 8e exemple.

Pre

Premier exemple.

dixaines de milles.	milles.	centaines.	dixaines.	unitez.
4	7	3	2	1
5	6	4	8	2
4	5	6	7	3
4	0	3	2	2
Somme 1	8	9	7	8

Second exemple.

milliards.	centaines de milles.	dixaines de milles.	milles.	centaines.	dixaines.	unitez.
2	3	1	3	4	5	6
4	0	7	4	3	2	1
		8	3	4	5	3
4	5	9	4	7	1	8
Somme 1	1	0	6	5	9	4	8 Somme

3e exemple.	4e exemple.	5e exemple.	6e exemple.
20940	56780	82403	25
53239	47930	42004	456
48560	52000	90405	730
43251	81570	80302	4215
30000	34560	79005	32041
195900.	271840:	374119:	37467.

7e exemple.	8e exemple.
23584	9032
70291	9102
43589	8045
20294	9903
51092	8912
80081	9840
40090	9900
48193	9809
70992	8909
81491	9804
30192	9700
1291	9849
4	8949
	9899
	9999
Somme 601180	Somme 141652

T

Remarquez que dans l'exemple ſeptiéme, comme il s'eſt trouvé 106, dans la ſeconde colonne on a poſé 6, & on a reſervé 10 pour la troiſiéme colonne, & dans le 8e exemple comme l'on a trouvé 141 dans la derniere colonne, on a poſé 1 ſous la derniere colonne, & on a avancé 14.

Definitions.

Pour abreger les expreſſions, nous dirons qu'un nombre eſt *incomplexe*, qui ſera exprimé ſous un ſeul chiffre comme 7, 9, 5. mais tout nombre exprimé par pluſieurs chiffres, nous l'appellerons complexe, comme ſont les nombres 30, 105, 1235, &c.

Pratique.

Dans les grandes operations comme ſont celles du 7e & 8e exemple : l'on diviſe en pluſieurs portions les nombres donnez, & on adjoûte en ſuite les ſommes trouvées. Par exemple, ſoit partagée la 8e operation ci-devant en trois portions chacune de cinq lignes comme vous le voyez par un petit trait, poſez-les ſeparément & en faites l'addition. Poſez de nouveau les trois ſommes trouvées en une Addition, & la ſomme qui en proviendra ſera la même que celle que nous avons trouvée ci-devant, comme on le peut voir ici

90312	98402	97000		
91012	99000	98491		
80451	98091	89491	44994	1e ſomme
99031	89091	98991	48262	2e ſomme
89121	98041	99991	48396	3e ſomme
44994.	48262.	48396.	141652.	

CHAPITRE II.

Regles de la Souſtraction.

1. DIſpoſez chaque chiffre des nombres donnez, en ſorte que le plus grand nombre ſoit ſur le plus petit, & que les unitez ſoient dans la premiere colonne, les dixaines dans la ſeconde, & ainſi des autres, comme dans l'Addition.

2. Retranchez chaque chiffre inferieur de celui qui lui répond au deſſus & en même colonne, ſuivant le Formulaire de la Souſtraction, p. 2. ch. 3. n. 12. & ſi le ſuperieur eſt ſuffiſant pour contenir l'inferieur; vous en poſerez la difference immediatement au deſſous; comme on peut le voir dans le 1. exemple ci-deſſous.

3. Si le chiffre inferieur eſt égal au ſuperieur la difference ſera zero; que vous poſerez au deſſous de chaque colonne: mais ſi le chiffre inferieur eſt lui-même un zero la difference ſera le chiffre ſuperieur. Voiez le 2 & le 3 exemple.

4. Si le chiffre ſuperieur n'eſt pas ſuffiſant pour en retrancher l'inferieur, vous emprunterez ſur le chiffre de la colonne ſuivante une unité qui vaudra 10, leſquels étans ajoûtez au chiffre de qui l'on doit faire le retranchement ils ſuffiront, & la difference en ſera poſée ſuivant la regle 2. Voyez le 4 exemple.

5. Le chiffre ſur qui on a emprunté diminue d'un dans l'operation ſuivante.

6. Si le chiffre ſur qui on a emprunté eſt zero il ne faut pas laiſſer de prendre la dixaine neceſſaire; & un autre chiffre ſuivant ſatisfera à tout. Voyez le 5. exemple & la remarque ci-aprez.

7. Enfin le nombre qui reſultera de ces differences partielles ſera la difference totale.

Premier exemple.

de 49756
Souſtraire 35424

14332 difference totale ou reſtant.

Second exemple.

de 457975
Souſtraire 245975

212000 difference ou reſtant.

Troiſiéme exemple.

de 857534
Souſtraire 442000

415534 difference ou reſtant.

Quatriéme exemple.

de 7546932
Souſtraire 3829896

3717036 difference ou reſtant.

Cinquiéme exemple.

de 600000
Retrancher 387456

212544 difference ou reſtant.

Remarquez que 6 ne pouvant être retranché d
zero, on ne laiſſe pas d'emprunter la dixaine ſur le z
ro ſuivant, comme vous le voyez dans le 5e exempl
en cette maniere 6 de zero ne peut j'emprunte ſur l
ſecond zero un qui vaut 10. 6 de 10 reſtent 4, & co
tinuant l'operation à la ſeconde colonne, je dis 5 d
zero ne peut, j'emprunte une dixaine ſur le troiſiém
zero, mais comme j'ay déja pris une dixaine pour

premiere colonne, celle que j'ay emprunté ne vaut plus que 9 ainſi je dis 5 de 9 reſtent 4. & continuant de même à emprunter ſur chaque zero de nouvelles dixaines chaque zero ſe trouve valoir 9 à cauſe de l'unité qui a été retranchée à chaque emprunt, ainſi je dis à la troiſiéme colonne 4 de 9 reſtent 5. 7 de 9 reſtent 2. 8 de 9 reſte 1. & enfin retranchant 1 de 6 à la derniere colonne, je dis 5 de 5 reſtent 2.

Que ſi l'on propoſoit à ſouſtraire pluſieurs nombres differens de pluſieurs autres nombres, il faut ajoûter d'une part tous les nombres qui doivent être ſouſtraits & de l'autre ceux de qui ils doivent être ſouſtraits, & en ſuite ſouſtraire la plus petite ſomme de la plus grande comme l'on peut le voir ici.

	3795		4565
de	8956	ſouſtraire	7890
	67892		45782
	80643		58237

de	80643
Souſtraire	58237
	22406 difference requiſe.

CHAPITRE III.

Regles de la Multiplication.

1. IL faut ſavoir le produit des unitez ou des 9 premiers chiffres, les uns par les autres, tels qu'ils ſont exprimez dans la Table ſuivante, dont nous allons expliquer l'uſage.

	1 perpendiculaire	2 perpendiculaire	3 perpendiculaire	4 perpendiculaire	5 perpendiculaire	6 perpendiculaire	7 perpendiculaire	8 perpendiculaire	9 perpendiculaire
1 parallele.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2 parallee.	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3 parallele	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4 parallele	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5 parallele	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6 parallele	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7 parallele	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8 parallele	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9 parallele	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Deux nombres incomplexes étans propoſez on demande le produit par le moyen de cette Table. Par exemple 7 fois 8. premierement je cherche le ſeptiéme parallele déſigné par le nombre de 7, & en ſuivant le 8 perpendiculaire, je paſſe toutes ſes cellules juſqu'à la rencontre du 7e parallele où je trouve 56

qui ſatisfait au nombre propoſé. De ſorte que 56 eſt le produit de 7 par 8 ou de 8 par 7. Si l'on demande le produit de 4 par 9, je cherche le 4e parallele & le 9e & prens le nombre de 36 qui ſe trouve dans la cellule qui termine le parallele & le perpendiculaire. Si on demande le produit de 8 par 9; je cherche le nombre qui termine le 8 parallele & le 9e perpendiculaire & je trouve 72, & ainſi de quelque nombre que l'on voudra, depuis 1 juſqu'à 9: mais pour plus grande facilité à nombrer, les commençeans doivent aprendre tous les produits par cœur ou du moins les décrire dans un carton pour y avoir recours lorſqu'on en aura de beſoin.

2. Diſpoſez les nombres donnez en ſorte que le plus grand ſoit au deſſus pour multiplicande, & le petit au deſſous pour multiplicateur chaque chiffre dans ſa colonne naturelle, comme vous le verrez ci-bas.

3. Cherchez ſeparement & ſucceſſivement par le moyen de la Table precedente tous les produits de chacun des chiffres du multiplicande par le premier chiffre du multiplicateur. Et poſez chaque produit ſous ſa colonne, reſervant les dixaines pour la colonne ſuivante, ou les avançant à la derniere colonne, comme nous l'avons fait à l'Addition, & que la pratique ſuivante l'éclaircira.

4. Cherchez de même maniere tous les produits de chacun des chiffres du multiplicande par le 2e chiffre du multiplicateur les poſans chacun dans ſon rang, & reſervant les dixaines, ſavoir le premier produit au ſecond rang, le ſecond au troiſiéme & ainſi ſucceſſivement juſqu'au produit du dernier chiffre. Et s'il y a plus de deux chiffres au multiplicateur, vous opererez au troiſiéme tout de même qu'au ſecond, ſe ſouvenant de mettre le premier produit au troiſiéme rang, pour le troiſiéme chiffre du multiplicateur, & au quatriéme rang pour le 4e chiffre du multiplicateur, & ainſi ſucceſſivement tant qu'il y aura de chiffres au multiplicateur. Ce que la pratique ſuivante éclaircira.

5. S'il ſe trouve des zeros dans le multiplicande, vous poſerez zero pour le produit de ce rang : mais ſi vous avez retenu quelques dixaines du produit precedent, vous le poſerez au lieu du zero.

6. Si le zero ſe trouve dans le multiplicateur, vous poſerez autant de zeros qu'il y a de chiffres au multiplicande, ou pour abreger vous n'en tiendrez aucun conte paſſant aux autres chiffres, & ſituant leurs produits ſuivant les regles 3 & 4.

7. Enfin vous ajoûterez les produits compoſez que vous aurez trouvez par l'operation, & leur ſomme ſera le produit requis.

Exemple & Pratique.

On demande de multiplier 4809556 par 3809. Premierement je poſe le multiplicande ſur le multiplicateur en cette maniere par la 2e regle.

Multiplier	4809556
par	3809

Secondement je multiplie chacun des chiffres du multiplicande par le premier chiffre du multiplicateur en cette ſorte. 9 fois 6 ſont 54 poſe 4 & retient 5 (*le 4 ſe poſe au prémier rang*) 9 fois 5 ſont 45 & 5 que j'ay retenu ſont 50 ; poſe zero, *au* 2e *rang* & retiens 5. 9 fois 5 ſont 45 & 5 de retenu ſont 50 poſe encore zero (*au* 3e *rang*) & retiens 5. 9 fois 9 ſont 81 & 5 de retenus ſont 86 poſe 6 (*au* 4e *rang*) & retiens 8. 9 fois zero c'eſt zero, (*par la* 5 *regle*) poſe 8 que j'ay retenu (*au* 5 *rang.*) 9 fois 8 ſont 72 poſe 2 (*au* 6 *rang*) & retiens 7. 9 fois 4 ſont 36, & 7 de retenus ſont 43. poſe 3 & avance 4 ce qui donne la diſpoſition ſuivante.

Multiplier	4809556
par	3809
	43286004

Cette operation faite j'efface le premier chiffre du multiplicateur pour me ſouvenir que ſa multiplication eſt faite, & en ſuite je paſſe au ſecond chiffre du multiplicateur qui n'étant qu'un zero, je poſe 7 zeros par la regle 6, reculant le premier d'un rang par regle 4, comme vous le voyez ici.

Multiplier	4809556
par	3807
	43286004
	0000000.

Je paſſe au troiſiéme chiffre du multiplicateur, effaçant le ſecond & diſant 8 fois 6, ſont 48. poſe 8 (*au 3e rang par la 4e regle*) & retiens 4. 8 fois 5 ſont 40 & 4 de retenus ſont 44. poſe 4 enſuite & retiens 4. 8 fois 5 ſont 40 & 4 de retenus ſont encore 44. poſe 4 & retiens 4. 8 fois 9 ſont 72 & 4 de retenus ſont 76. poſe 6 & retiens 7. 8 fois zero eſt zero. poſe le 7 que j'ay retenu 8 fois 8 ſont 64. poſe 4 & retiens 6. 8 fois 4 ſont 32 & 6 ſont 38 poſe 8 & avance 3.

Multiplier	4809556
par	3807
	43286004
	0000000.
	38476448.

Ayant effacé le 8. je paſſe à la 4e operation, diſant 3 fois 6 ſont 18. poſe 8 (*au 4e rang par la 4e regle*) & retiens 1. 3 fois 5 ſont 15 & 1 ſont 16 poſe 6 & retiens 1. 3 fois 5 ſont 15 & 1 de retenu ſont 16; poſe encore 6 & retiens 1. 3 fois 9 ſont 27 & 1 de retenu ſont 28; poſe 8 & retiens 2. 3 fois zero ce n'eſt rien; poſe le 2 que j'ay retenu. 3 fois 8 ſont 24 poſe 4 & retiens 2. 3 fois 4 ſont 12 & 2 retenus ſont 14 poſe 4 & avance 1. ce qui donne la 4e operation comme vous le voyez

Multiplier 4809556
par 3809

43286004
0000000.
38476448..
14428668...

18319598804 produit total.

J'adjoûte en ſuite les 4 produits de chacun des chifres du multiplicateur & le nombre 18319598804 eſt le produit total, c'eſt à dire 3809 fois 4809556.

Pratiques abregées.

1. Pour multiplier par 10, il faut ajoûter un zero au multiplicande. Par exemple 2455 fois 10 ſont 24550.

2. Pour multiplier par 100, il faut ajoûter 2 zeros au multiplicande. ainſi 4795 fois 100 ſont 479500.

3. Pour multiplier par 1000, il faut ajoûter 3 zeros, 97555 fois 1000 ſont 97555000.

4. Et generalement pour multiplier par quelque rang que l'on voudra des millions milliards, &c. il faut ajoûter autant de zeros qu'ils ont de colonnes qui precedent le premier rang qui eſt celui des unités. Ainſi pour multiplier par million, il faut ajoûter ſix zeros, parce que le rang des millions a ſix colonnes qui precedent l'unité, ainſi 3565 par million ſont 3565000000. Pour multiplier par million de milliards il faut ajoûter quinze zeros, parce que les millions de milliards ſont à la ſeiziéme colonne, ainſi 435 par million de milliards donne 435000000000000000.

5. Toutes les fois que le multiplicateur a des zeros

pour premiers chiffres, il les faut transporter au multiplicande, & poſer les chiffres reſtans pour multiplicateur: par exemple pour multiplier 455 par 3500 il faut diſpoſer vôtre operation de cette ſorte, & le produit qui en proviendra ſera le requis.

Multiplier 45500
par 35

227500
136500.

1592500 produit de 455 par 3500.

CHAPITRE IV.

Regles de la Diviſion.

1. IL faut ſavoir trouver l'expoſant de tous les dividendes d'un ſeul ou de deux chiffres par un diviſeur incomplexe ce qui ſe fait par le moyen de la table du Chapitre precedent en cette maniere. Cherchez le parallele du diviſeur propoſé & la cellule qui contient le dividende, la premiere cellule du perpendiculaire où ſe trouve le dividende eſt l'expoſant requis. Par exemple, l'on demande en 45 combien de fois 5. Je cherche le 5e parallele & trouve 45 en la 9e cellule de laquelle remontant juſqu'à la premiere cellule du perpendiculaire je trouve 9 pour expoſant. Si l'on demande l'expoſant de 64 par 8. Je cherche dans le 8 parallele le diviſeur 8 qui ſe trouve à la 8e cellule d'où remontant par le perpendiculaire juſqu'à la premiere cellule je trouve 8 pour expoſant, ce qui eſt tres-facile de concevoir.

Mais ſi le dividende ne ſe trouve point dans aucune des cellules; il faut prendre le moindre nombre qui en

approche le plus & qui ſoit dans l'une des cellules du parallele du diviſeur. Par exemple, l'on veut trouver l'expoſant de 39 par 6 je cherche au ſixiéme parallele & ne trouvant point 39 dans aucune des cellules, je prens 36 qui s'y trouve & qui eſt le moindre nombre qui en approche le plus, d'où remontant par le perpendiculaire je trouve 6 pour expoſant: mais cet expoſant n'eſt pas exact comme nous l'expliquerons cy-aprés. Il faut neantmoins retenir cette metode de trouver les expoſans incomplexes, parce qu'elle eſt abſolument neceſſaire pour pratiquer la diviſion ſuivant les regles que nous en allons donner. Il ſeroit même bon de ſavoir par cœur tous les expoſans de chaque dividende de deux chiffres par quelque diviſeur incomplexe que ce ſoit. Ou de ſe ſervir de la Table ſur un Carton quand on opere.

2. Poſez vôtre dividende le premier, ſeparant & diſtinguant bien chaque rang de chifres de peur de confuſion.

3. Poſez le diviſeur ſous les derniers chifres du dividende chacun ſous chacun immediatement. A moins que le dernier chifre du dividende, ou autant qu'il y en a au diviſeur ne fuſſent pas ſuffiſans pour contenir le diviſeur; auquel cas il faut que le diviſeur ſoit avancé d'une colonne moins. Par exemple pour diviſer 4557 par 346, c'eſt ainſi qu'il faut diſpoſer le dividende & le diviſeur.

diviſer	4557
par	346

Mais ſi l'on propoſe de diviſer le même nombre 4557 par 869 je les poſe ainſi, parce que les trois chifres 455 ne peuvent pas être diviſés par 869, car le diviſeur ne doit jamais exceder le dividende.

Diviſer	4557
par	869

4. Tracez à côté du dividende un petit arc pour placer ſucceſſivement les chiffres que l'on découvrira pour expoſant, comme il eſt ici repreſenté

Diviſer 455 (
par 346.

5. Poſez ſeparément les chiffres du dividende qui doivent ſervir à la premiere operation, & au deſſous ceux du diviſeur. Par exemple

$$\frac{455\cdot}{346}($$

6. Cherchez par la Table l'expoſant du dernier chifre du diviſeur & le poſez dans le petit arc au lieu du quotient. Par exemple en 4 combien de fois 3, 1 fois que je poſe dans le petit arc, comme vous le voyez.

$$\frac{455\cdot}{346}(1$$

7. Multipliez à part le diviſeur par l'expoſant que vous aurez trouvé & ſon produit, retranchez-le des chiffres du dividende, poſant au deſſous le reſtant en cette maniere

$$\frac{455\cdot}{346}(1$$

109 premier reſtant.

Multiplier 346
par 1

346 produit.

8. S'il arrive que le produit du diviſeur par l'expoſant ſoit plus grand que le nombre duquel il doit être ſouſtrait, c'eſt une marque qu'il faut diminuer l'ex-

poſant d'une ou pluſieurs unitez juſqu'à ce que le produit ſoit moindre que le dividende, comme on verra dans les exemples ſuivans,

9. Mais s'il arrive qu'ayant pris pour expoſant un nombre dont le produit par le diviſeur étant retranché des chiffres du dividende, le reſtant peut encore contenir le diviſeur. L'expoſant eſt trop petit ainſi il faut l'augmenter d'une ou pluſieurs unitez, juſqu'à ce qu'il ne reſte rien ou que le reſtant ſoit moindre que le diviſeur. Ce qui ſera facile à concevoir dans la pratique ſuivante.

Second exemple & pratique des neuf Regles precedentes.

On demande de diviſer 259104 par 634. 1. je place mon dividende bien diſtinctement de peur de confuſion, comme vous le voyez cy-bas, & immediatement au deſſous des dernieres chiffres, je place chaque chiffre du diviſeur. Savoir le 6 ſous le penultiéme du dividende, parce que le dernier chiffre 2 ne peut pas contenir le dernier chiffre du diviſeur qui eſt 6 ce qui me donne la diſpoſition ſuivante.

Diviſer 259104(
par 634

2. je poſe ſeparément les chiffres du dividende qui doivent ſervir à cette premiere operation, comme il eſt ici repreſenté

2591..(
634

3. je cherche l'expoſant de 25 par 6 & trouvant dans la table que c'eſt 4 je le poſe au lieu du quotient.

ultiplie en ſuite le diviſeur 634 par l'expoſant 4 que
y trouvé & ſon produit 2536 je le ſouſtrait de 2591
oſant au deſſous ou au deſſus le reſtant, comme on
e voit icy.

2591.. (4 Multiplier 634 qui eſt le diviſeur.
par 4 l'expoſant.
634
2536 2536
0055 premier reſtant.

Ou bien en cette maniere.

0055 premier reſtant.
xxxx..
xxxx
xxx6

. Que ſi au lieu de l'expoſant 4 je m'étois équivo-
ué & que j'euſſe poſé 5 au quotient. Le produit qui
roit reſulté de la multiplication du diviſeur par l'ex-
oſant 5 m'auroit donné 3170 qui n'auroit pû être
ouſtrait de 2591.. ce qui eſt une marque qu'il auroit
alu diminuer l'expoſant 5 d'une unité ou de pluſieurs
i on avoit pris un expoſant plus grand, comme le re-
arque la 8e Regle.

. Si au lieu de 4 pour expoſant, j'avois pris ſeulement
le produit de 634 par 3 auroit été 1902 qui étant
ouſtrait des chiffres du dividende 2591 auroit donné
our reſtant 689 qui peut encore contenir le diviſeur
par conſequent il auroit falu augmenter l'expoſant
'une ou de pluſieurs unitez ſi le nombre qu'on auroit
ris pour expoſant étoit encore moindre que 3, com-
e l'a remarqué la 9e Regle, ainſi 4 eſt l'expoſant ju-
e de cette premiere operation avec le reſtant 55 qui
oit ſervir à l'operation ſuivante, dont voicy les
egles.

Regles pour les operations qui suivent la premiere.

1e pour 2e operation vous poserez separément les chiffres restantes de la premiere operation, & vous les joindrez à côté droit le dernier des chiffres au dividende qui n'ont point servi à l'operation precedente comme dans le premier exemple 1097, & dans le second 551 en cette maniere.

$$\frac{1097}{346}\left(\begin{matrix}1\\ \\ \end{matrix}\right. \qquad \frac{550.}{634}\left(\begin{matrix}4\\ \\ \end{matrix}\right.$$

2e vous poserez le diviseur au dessous, en sorte que chaque chiffre reponde à chacun ; savoir le premier sous le premier, le second sous le second & ainsi des autres, comme vous le voyez cy-dessus.

3e Vous effacerez au dividende le chiffre qui sert à cette operation pour mieux s'en souvenir, comme nous le verrons dans la pratique suivante.

4. Si le diviseur se trouve plus grand que le dividende de cette seconde operation, vous poserez au quotient un zero à côté du premier chiffre que l'on y avoit posé l'autre fois. Et la seconde operation sera finie comme la pratique le démontrera. Et tout le dividende restera pour l'operation suivante.

5. Que si le diviseur se trouve égal aux chiffres du dividende, vous poserez 1 au quotient & retranchant l'un de l'autre, le restant sera zero, de sorte que dans l'operation suivante s'il y en a, vous n'aurez qu'un seul chiffre pour dividende.

6. Mais si le diviseur est moindre que le dividende de cette operation. Vous chercherez l'exposant du dernier chiffre du dividende par le dernier chiffre du diviseur, & vous le poserez au quotient.

7. Vous multiplierez le diviseur par l'exposant nouveau, & son produit sera soustrait des chiffres du dividende

dende, & le restant servira à l'operation suivante, s'il y en a:

8. Si le produit du diviseur par l'exposant nouveau se trouve plus grand que le dividende ou moindre, en sorte qu'il puisse encore diviser le restant; vous chercherez l'exposant veritable, suivant ce que nous avons dit aux Regles 8 & 9 de l'operation precedente.

9. S'il reste encore de nouvelles operations à parcourir, vous suivrez toutes les mêmes regles ci-dessus. Et s'il reste aprés la derniere operation quelques chiffres vous les poserez pour fraction sur un trait à côté du quotient & le diviseur au dessous. Comme nous le verrons plus amplement aux Regles des fractions.

Continuation des deux exemples ci-devant.

Pour le premier exemple je pose le restant 1097 & au dessous le diviseur 346. Comme je l'ay déja remarqué à la premiere Regle; effaçant dans le dividende proposé le 7 qui restoit, ce qui marque que c'est la derniere operation; en cette maniere:

Diviser ~~4887~~. (1097 (1
par 346 346

Je cherche l'exposant de 10 par 3 dans la Table, & je trouve 3 que je pose pour second chiffre de l'exposant, comme vous le voyez ici.

1097 (13
346

Je multiplie separément le diviseur 346 par 3, & je trouve 1038. qui peut être retranché de 1097 sans que le restant puisse le contenir davantage, & par consequent je juge que l'exposant 3 est le veritable. Je soustrais donc 1038 de 1097, & le restant 59 je le

poſe deſſus ou deſſous, comme il eſt ici repreſenté, & à côté ſous un petit trait le reſtant, & au deſſous le diviſeur.

1097 (13.
346
1038
0059

Multiplier 346
par 3
1038 produit.

Ou bien en cette maniere.

59
x0x97 (13
346
x0x97

59
346

Pour le ſecond exemple je poſe le reſtant 55 à côté droit duquel je joins le zero qui ſe trouve à la ſeconde colonne du dividende lequel n'a point ſervi dans la premiere operation. J'écris au deſſous mon diviſeur, j'efface dans le dividende propoſé le zero par un petit trait, ce qui donne la diſpoſition ſuivante.

Diviſer x8x9x04 (4..
par 634

Diviſer le premier reſtant 550 (4..
par 634

Et voyant que par la 4e Regle que mon dividende eſt plus petit que le diviſeur, je poſe zero au quotient, la ſeconde operation eſt finie, & donne la diſpoſition ſuivante :

Diviſer le premier reſtant 550. (40 :
par 634
550. ſecond reſtant.

e paſſe à la troiſiéme operation écrivant pour divi-
lende, le ſecond reſtant 550 & lui joignant à côté le
remier chiffre du dividende 4 qui n'a point encore
té en aucune operation. J'écris le diviſeur au deſſous
ayant 4 ſous le 4 du dividende, le 3 ſous le zero, & le
ſous le premier 5, je trace à côté l'arc du quotient,
omme il eſt ici repreſenté :

Diviſer ⁂⁂⁂⁂⁂ (40 :
par 634

Diviſer le ſecond reſtant 5504 (40 :
par 634

n ſuite je cherche l'expoſant de 55 par 6 & je trouve
dans la table. Mais aprés avoir multiplié le diviſeur
34 par 9 je trouve 5706, ce qui excede le dividende
504 & par conſequent je prens ſeulement 8, & le
roduit 5072 je le ſouſtrais de 5504. ce qui me donne
our dernier reſtant 432 que je poſe à côté pour frac-
on, comme on le voit ici :

Diviſer ⁂⁂⁂⁂⁂ (408 — 432 expoſant juſte.
par 634
634

Diviſer le ſecond reſtant 5504 (408. multiplier 634
par ⁂⁂⁂ par 8
5072 5072
432 dernier reſtant pour la fraction.

Tout le ſecond exemple que nous avons propoſé et icy repreſenté de ſuite:

Diviſer 259104 (propoſition.
par 634

Premiere Operation.

Diviſer 2591.. (4 premier chifre de l'expoſant.
par 634

Multiplier 634 diviſeur.
par 4 expoſant.
2536 produit.

de 2591..
Souſtraire 2536..
55.. premier reſtant.

Seconde Operation.

Diviſer le premier reſtant 550. (.0 ſecond chiffre
par 634 (l'expoſant.
550 ſecond reſtant.

Troiſiéme Operation.

Diviſer le ſecond reſtant 5504 (..8 troiſiéme chiff
par 634 de l'expoſan

Multiplier 634 diviſeur.
par 8 expoſant.

5072 produit.

de 5504 ſecond reſtant.
Soustraire 5072 produit du diviſeur par l'expoſant.

432 dernier reſtant qui forme la fraction.

Reſolution de la Propoſition

Diviſer ⁂⁂⁂⁂⁂⁂ (408 $\frac{432}{634}$ expoſant juſte.
par 634

Pratiques abregées.

1. Lorſqu'il s'agit de diviſer par 10, il ſuffit de retrancher par un trait le premier chiffre, & tous les chifres qui le precedent en ſeront l'expoſant, & le chifre etranché formera la fraction. Par exemple pour diviſer 2567 par 10 je coupe le premier chiffre 7 en cette maniere 256|7 & l'expoſant eſt 256 & $\frac{7}{10}$.

2 Pour partager par 100, il faut couper les deux premiers chiffres, pour diviſer par 1000 les trois premiers, & ainſi conſecutivement retranchant autant de chiffres qu'il faut ajoûter de zeros dans la multiplication par 100, par 1000, par 1000000, &c. ce qu'il eſt facile de concevoir, & en ce cas les chiffres coupés forment la fraction.

CHAPITRE V.

Regles de la composition des puissances.

1. LEs puissances des neuf nombres incomplexes ne se trouvent que par la multiplication. Par exemple, si l'on veut avoir les puissances successives de 2, il faut le multiplier par lui-même, & son produit 4 encores par 2 ; le produit 8 par 2, & le produit 16 encore par 2, ce qui donnera 32 pour la cinquiéme puissance, & si l'on vouloit l'étendre plus loin, il n'y a qu'à multiplier le dernier produit par la même racine & on trouvera à l'infini des puissances du nombre de 2, voici une Table qui contient les puissances des 9 premiers chiffres jusqu'à la sixiéme. Nous reservant d'en donner une plus grande dans nôtre Arithmetique.

Premiere Table pour la composition des puissances.

premieres puissances, ou racines	secondes puissances. ou quarrés	troisiémes puissances. ou cubes	4 puissances.	5 puissances.	6 puissances.
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441

Ou pourroit par le moyen de la ſeule multiplication trouver à l'infini les diverſes puiſſances de quelque nombre que ce ſoit. Mais comme le calcul en ſeroit tres-penible & ennuyeux, voici une ſeconde Table pour en faciliter l'operation.

Seconde Table pour la compoſition des Puiſſances.

1ᵉ Puiſſance	1 fois chaque racine			
2ᵉ Puiſſance	1 fois la 2ᵉ de chacune	2 Produits de l'une par l'autre		
3 Puiſſance	1 fois la 3ᵉ de chacune	3 Produits de la 2ᵉ de chacune par l'autre		
4 Puiſſance	1 fois la 4ᵉ de chacune	4 Produits de la 3ᵉ de chacune par l'autre	6 Produits de la 2ᵉ de l'une par la 2ᵉ de l'autre	
5 Puiſſance	1 fois la 5ᵉ de chacune	5 Produits de la 4ᵉ de chacune par l'autre	10 Produits de la 3ᵉ de chacune par la 2ᵉ de l'autre	
6 Puiſſance	1 fois la 6ᵉ de chacune	6 Produits de la 5ᵉ de chacune par l'autre	15 Produits de la 4ᵉ de chacune par la 2ᵉ de l'autre	20 Produits de la 3ᵉ de l'une par la 3ᵉ de l'autre

2. Pour élever un nombre incomplexe en quelque rang qu'il ſoit à toutes ſes diverſes puiſſances obſervez les regles ſuivantes. Premierement cherchez dans la premiere Table cy-devant le nombre donné dans le premier rang perpendiculaire. Et enſuite toutes ſes diverſes puiſſances dans le rang parallele où vous l'aurez trouvé. Secondement contez combien le nombre ordonné a de colonnes avant lui, ou de zeros. Troiſiémement ajoûtez à chaque puiſſance de ce nõbre pour le quarré deux fois autant de zeros; pour le cube 3 fois autant; pour la 4ᵉ puiſſance 4ᵉ fois autant pour la cinquiéme cinq fois autant, &c. Par exemple on demande les puiſſances ſucceſſives de 400, c'eſt-à-dire de 4 élevé au 3ᵉ rang, & par conſequent il a devant lui deux zeros, cherchez dans la Table cy-devant au premier perpendiculaire 4. Et ſuivant ſon parallele vous trouverez 16 pour ſon quarré, 64 pour ſon cube, 256 pour la 4ᵉ puiſſance 1024 pour la 5ᵉ puiſſance, &c. ainſi ajoûtant à 16 quatre zeros, vous aurez 160000 pour le quarré de 400; adjoûtant à 64 ſix zeros, vous aurez 64000000 pour ſon cube; ajoûtant à 256 huit zeros, vous aurez 25600000000 pour la 4ᵉ puiſſance; ajoûtãt à 1024 dix zeros, vo⁹ aurez 10240000000000 pour la 5ᵉ puiſſance de 400, & ainſi des autres puiſſances à l'infini, pourvû que vous ayez une Table qui ait à l'infini toutes les puiſſances des 9 premiers chiffres. Il en ſera de même de tout autre nombre propoſé pourvû que vous contiez bien exactement le nombre des zeros qu'il a avant lui, & que vous obſerviez les regles que nous venons de donner.

3. Pour élever un nombre de deux chiffres à quelque puiſſance que l'on voudra. Suivez les regles ſuivantes.

Cherchez dans la ſeconde Table de la compoſition des puiſſances. Celle à laquelle vous voulez élever le nombre donné.

Par le moyen de la premiere Table & des Regles de la multiplication cherchez tous les divers produits qui ſont marquez dans chaque cellule de la ſeconde Table

au rang parallele de la puiſſance donnée.

Adjoûtez tous ces divers produits, & la ſomme d'iceux achevera l'operation.

EXEMPLE.

On demande de lever le nombre 43 à la 5e puiſſance.

Je cherche d'abord dans la ſeconde Table le rang parallele qui répond à la cinquiéme puiſſance, & je trouve à la premiere cellule 1 fois la cinquiéme puiſſance de chaque racine, c'eſt-à-dire 1 fois la 5e puiſſance de 40 & la 5e puiſſance de 3. Ainſi je cherche dans la premiere Table quelle eſt la 5e puiſſance de 4. Je trouve que c'eſt 1024, auquel j'ajoûte 5 zeros ſuivant la Regle 2e ci-devant, parce que 40 n'a qu'un zero avant lui dont je conclus que 102400000 eſt la 5e puiſſance de 40. Que je poſe ſeparément au lieu de l'Addition. Je cherche en ſuite la 5e puiſſance de 3 dans la Table, & je trouve 243 que je poſe ſous le nombre 102400000, & par là j'ay ſatisfait à la premiere cellule de la Table ſeconde au parallele de la 5e Puiſſance.

Je conſidere en ſuite ce que me dit la ſeconde cellule du même Parallele, & je trouve 5 produits de la 4e de chacune par l'autre. Ainſi je cherche dans ma premiere Table quelle eſt la 4e puiſſance de 40, & je trouve que c'eſt comme nous avons remarqué cy-devant à la Regle 2e. 2560000 que je multiplie par l'autre racine 3 ce qui donne 7680000 que je poſe 5 fois au deſſous les produits de la premiere cellule. De là je paſſe à la premiere racine 3, & j'en cherche la 4e puiſſance qui eſt 81 que je multiplie par la derniere racine 40, dont le produit eſt 3240 que je poſe encore 5 fois au deſſous les autres produits, & ma ſeconde cellule eſt finie.

Enfin la troiſiéme cellule de ma ſeconde Table dans le Parallele de la 5e puiſſance, me dit qu'il faut 10 produits de la 3e de chacune par la 2e de l'autre. Ainſi dans la premiere Table, & ſuivant la ſeconde Regle, je trouve que la 3e puiſſance de 40 eſt 64000; & la 2e Puiſſance de 3 c'eſt 9. Je multiplie 64000 par 9, le produit qui en reſulte eſt 576000 que je poſe 10 fois ſous les autres produits cy-devant. Je fais le même pour la racine 3, dont le cubé ou 3e puiſſance eſt 27; que je multiplie par 1600 qui eſt le quarré où la 2e puiſſance de 40 le produit qui en provient eſt 43200 que je poſe encore 10 fois ſous les autres produits, & par là j'ay trouvé les 32 produits, dont la ſomme eſt la cinquiéme puiſſance de 43. Comme on le voit dans la Page ſuivante.

Produits de la 5ᵉ Puiſſance de 43.

1ᵉ cellule { 102400000 la 5ᵉ puiſſance de 40.
243 la 5ᵉ puiſſance de 3.

2ᵉ cellule {
7680000 produit de la 4ᵉ puiſſance de
7680000 [40 par 3.
7680000
7680000
7680000
3240 produit de la 4ᵉ puiſſance
3240 [de 3 par 40.
3240
3240
3240

3ᵉ cellule {
576000 produit de la 3ᵉ puiſſance de
576000 [40 par la 2ᵉ de 3.
576000
576000
576000
576000
576000
576000
576000
576000
43200 produit de la 3ᵉ puiſſance de
43200 [3 par la 2ᵉ de 40.
43200
43200
43200
43200
43200
43200
43200
43200

147008443 la 5ᵉ puiſſance de 43.

Si l'on veut abreger multipliez le produit 7680000 par 5 vous aurez 38400000 pour les cinq produits de la 4e puiſſance de 40 par 3. Multipliez auſſi par 5 le produit 3240 & vous aurés 16200 pour les 5 produits de la 4e puiſſance de 3 par 40. Multipliant 576000 par 10, vous aurez les 10 produits de la 3e puiſſance de 40 par le quarré de 3, & enfin multipliant encore 32200 par 10 vous aurez les 10 produits de la 3e puiſſance de 3 par le quarrée de 40, ce qui donne les nombres ſuivans.

102400000 la 5e puiſſance de 40.
243 la 5e puiſſance de 3.

38400000 les 5 produits de la 4e puiſſ. de 40 par 3.
16200 les 5 produits de la 4e puiſſ. de 3 par 40.

5760000 les 10 prod de la 3e de 40 par la 2e de 3.
432000 les 10 prod. de la 3e de 3 par la 2e de 40.

147908443 la 5e puiſſance de 43.

4 Pour élever toute ſorte de nombres complexes à quelque puiſſance que l'on voudra, vous obſerverez les Regles ſuivantes.

Separez les deux derniers chiffres du nombre donné, & élevez-les à toutes leurs puiſſances ſucceſſivement juſqu'à la puiſſance propoſée.

Les Puiſſances des deux derniers chiffres étant trouvées ajoûtez-leur autant de zeros que la puiſſance & la valeur des chiffres le demandent par la Regle 2 cy-devant.

Faites une table de toutes ces puiſſances que vous reſerverez pour les operations ſuivantes.

Conſiderez enſuite ces deux derniers chiffres comme une ſeule racine dont vous aurez toutes les puiſſances par la table que vous aurez formée, & ajoûtez-leur le troiſiéme chiffre qui les precede, & ce ſera votre ſeconde racine.

Operez ſur ces deux racines comme auparavant, & aprés que vous aurez découvert les puiſſances de ces trois nombres ajoûtez-leur les zeros marquez par la 2e Regle & en faites encore une table particuliere.

S'il y a un quatriéme chiffre ajoûtez-le comme une ſeconde racine aux trois autres que vous ne conſiderez plus que comme une ſeule racine & operez de la même maniere que cy-devant.

Et la ſomme de tous ces derniers produits ſera la puiſſance requiſe du nombre propoſé.

Que s'il ſe trouvoit encore d'autres chiffres dans le nombre propoſé, il faudroit faire une troiſiéme Table de toutes les puiſſances des 4 derniers chiffres, & les conſiderant comme une ſeule racine operer ſuivant les articles ci-deſſus.

EXEMPLE.

L'on demande la cinquiéme puiſſance du nombre 4567.

Premierement je cherche toutes les Puiſſances des deux derniers chiffres 45 .. dont je fais la table ſuivante.

Le quarré de 4500 eſt par les Regles precedentes, & les Tables de la compoſition des Puiſſances.

202 50000 quarré.
9112 5000000 cube.
410062 500000000 quatriéme Puiſſance.
18452812 5000000000 cinquiéme Puiſſance.

Secondement je conſidere 4500 comme une ſeule racine, & je luy ajoûte pour ſeconde racine le ſecond chiffre 6 qui donne 60, & je prens toutes les Puiſſances de ces deux racines juſqu'à la cinquiéme par les mêmes Regles cy-deſſus, ce qui donne la Table ſuivante.

20793600 quarré.
9481881 6000 cube.
432373800960000 quatriéme Puiſſance.
19716245323776000 00 cinquiéme Puiſſance.

Troiſiémement conſiderant les chiffres 4560 comme une ſeule racine dont j'ay les diverſes Puiſſances, j'ajoûte le dernier chiffre 7 comme ſeconde racine & opere ſuivant la ſeconde Table de la compoſition des Puiſſances au Parallele de la 5e Puiſſance. Ainſi je poſe premierement au lieu de l'Addition la 5e Puiſſance de 4560. Telle que nous l'avons trouvée ci-deſſus, & au deſſous immediatement celle de 7 qui eſt ſelon la premiere Table le nombre 16807. Et ce ſont les deux produits de la premiere cellule.

Quatriémement pour la ſeconde cellule je prens la 4e Puiſſance de 4560 qui eſt 432373800960000 je la multiplie par 7 le produit dõne 3026616606720000 que je multiplie encore par 5 pour avoir les 5 produits de la 4e Puiſſance de 4560 par 7 ; le produit qui en reſulte 151330820336 00000 je le poſe ſeparément au lieu de l'Addition. Je fais la même operation pour 7 dont je prens dans la premiere table la 4e Puiſſance qui eſt 2401 que je multiplie par la racine 4560 & le produit 10948560 je le multiplie encore par 5 pour avoir les 5 produits de la 4e Puiſſance de 7 par 4560. Le nombre qui en provient 54742800 je le poſe au lieu de l'Addition ce qui finit les produits de la deuxiéme cellule.

Cinquiémement je paſſe à la troiſiéme cellule où je trouve 10 produits de la 3e de chacune par la 2e de l'autre. Ainſi je prens dans la Table cy-devant la 3e Puiſſance de 4560 qui eſt 9481881 6000 que je multiplie par le quarré de 7 qui eſt 49 dont le produit eſt 464612198400 00 que je multiplie derechef par 10 en lui ajoûtant un nouveau zero, ſuivant la pratique abregée de la multiplication que nous avons donnée

y-devant, posant ce produit au dessous des autres. Enfin je viens à la 3ᵉ puissance de 7 qui est 343 que je multiplie par le quarré de 4560 qui est comme nous l'avons marqué dans la derniere table cy-dessus 20793600 & le produit se trouve 7132204800, qui étant encore multiplié par 10 donne 71322048000, qui est le dernier produit qu'il faut poser au lieu de l'addition, dont la somme est la cinquiéme puissance de 4567.

Produits qui composent la cinquiéme puissance de 4567.

```
19716245323,77600000
                16807
  15133083033600000
            54742800
     46461219840000
         71322048000
```

```
1986804148007847607
```

CHAPITRE VI.

Regles de la reſolution des Puiſſances ou Extraction de leurs racines.

1. POUR trouver quelque racine que l'on voudra de l'une des puiſſances des 9 premiers chiffres, obſervez les Regles ſuivantes.

1. Cherchez en quelle puiſſance eſt le nombre donné & en quelle cellule de la premiere table du Chapitre precedent.

2. Voyez quelle eſt le nombre qui dénomme la puiſſance du nombre donné, & celui qui denomme la racine propoſée.

3. Diviſez le denominateur de la puiſſance du nombre donné par le denominateur de la racine propoſée, & l'expoſant ſera le denominateur de la puiſſance qui ſera la racine requiſe, dont vous trouverez le nombre au même rang parallele que celui de la puiſſance donnée.

4. Si le denominateur de la puiſſance propoſée ne peut ſe diviſer exactement par le denominateur de la racine donnée, c'eſt une marque que la racine propoſée n'eſt pas une des puiſſances, de l'un des 9 premiers nombres.

Vous remarquerez que par le denominateur d'une puiſſance ou d'une racine on entend le nombre qui denomme le rang ou la puiſſance d'un nombre. Par exemple dans la puiſſance 5e 5 eſt le denominateur de cette puiſſance. Dans la racine 4^{e} 4 eſt le denominateur de cette racine.

Application & exemple des Regles ci-deſſus.

On demande la racine cubique ou ce qui eſt le même la racine 3e du nombre 531441.

Je cherche dans la premiere Table du Chapitre cy-devant en quel rang & cellule ſe trouve le nombre 531441. & je le trouve au dernier rang & à la derniere cellule, c'eſt-à-dire à la 6e puiſſance de 9. Ainſi je diviſe le denominateur 6. par le denominateur de la racine propoſée qui eſt 3, je trouve que l'expoſant eſt 2e, d'où je conclus que la racine cubique de 531441 eſt la deuxiéme puiſſance de 9, c'eſt à dire 81.

Mais ſi l'on avoit demandé la racine quarrée de ce même nombre, parce que le denominateur 2 de la racine quarrée diviſe encore 6 par 3, le nombre qui ſe trouve à la troiſiéme cellule du parallele de 9, qui eſt 729 ſeroit la racine quarrée du nombre 531441.

Que s'il arrive que le denominateur d'une racine ne puiſſe pas diviſer le denominateur d'une puiſſance. Par exemple le denominateur de la racine quarrée qui eſt 2 ne peut pas diviſer le denominateur 9 de la 9e puiſſance, ainſi vous ne pourriez pas trouver la racine quarrée de 3874. 20489, qui eſt la 9e puiſſance de 9, parce que aucune des puiſſances de 9 n'eſt la racine quarrée de ſa neuviéme puiſſance.

II. Par le moyen de la table pour trouver la racine incomplexe d'un nombre propoſé. Suivez les Regles cy-deſſous.

1. Si c'eſt la racine quarrée qu'on demande cherchez le nombre propoſé au 2e perpendiculaire de la premiere table du ch. 5. ou s'il ne peut pas s'y trouver prenez le moindre nombre qui en approche le plus, & le chiffre de la premiere cellule qui lui répond en la même parallele ſera la racine requiſe.

Exemple.

On demande la racine quarrée de 49. je cherche le nombre 49 dans le perpendiculaire des quarrez qui eſt le ſecond, & je le trouve en la ſeptiéme cellule, ainſi prenant le nombre 7 qui ſe trouve en la premiere cellule du 7e parallele le nombre de 7 eſt la racine quarrée de 49.

2. Si c'eſt la racine cubique que l'on demande, cherchez le nombre propoſé dans le 3e perpendiculaire de la premiere table, & le nombre de la premiere cellule qui ſe trouve dans le parallele du nombre trouvé ſera la racine requiſe. Si le nombre ne ſe trouve pas préciſement dans les cellules du troiſiéme perpendiculaire, vous prendrez, comme nous avons dit cy-deſſus le moindre nombre qui en approche le plus.

EXEMPLE.

On demande la racine cubique de 512. Je cherche 512 dans le troiſiéme perpendiculaire; Je le trouve à la huitiéme cellule, & 8 qui ſe trouve dans la premiere cellule du 8e parallele qui eſt le parallele du nombre propoſé eſt la racine cubique de 512. mais ſi l'on demande la racine cubique de 110, ne trouvant point 110 dans les cellules de la table au 3e perpendiculaire, je prens 64 qui eſt le moindre nombre qui m'approche le plus, ainſi la racine 4 eſt la cubique de 110.

3. Generalement quelque racine que l'on demande d'un nombre qui n'a qu'une racine incomplexe vous n'aurez qu'à en chercher le nombre dans le perpendiculaire de ſon denominateur, & ſuivre les mêmes Regles que celles que nous avons données pour la racine quarrée & la racine cubique.

EXEMPLE.

L'on demande la racine 6e du nombre 865. Je cherche 865 dans les cellules du 6e perpendiculaire, & ne l'y trouvant pas je prens 729 qui eſt le moindre nombre qui approche le plus du nombre 865. Ainſi 3 eſt la racine 6e du nombre donné. Il en eſt de même de toute autre même plus avancée pourvû que l'on ait une table plus étenduë.

III. A quelque rang ou colonne que ſoit élevé la puiſſance d'un des nombres incomplexes, on pourra trouver ſa racine. Par les Regles ſuivantes,

1. Pour la racine quarrée coupez de 2 en 2 chiffres & de droite à gauche par diverſes tranches les zeros du nombre propoſé.

2. Cherchez la racine du quarré propoſé & poſez-la au lieu du quotient.

3. Si vous ne trouvez pas preciſement le nombre donné dans les cellules du quarré prenez le moindre nombre qui en approche le plus, & la racine qui luy repond ſera requiſe.

4. Ajoûtez à la racine trouvée autant de zeros quil y a de tranches de zeros dans le nombre donné & vous aurez la racine du nombre propoſé.

Exemple.

L'on demande la racine 2e de 64000000. Je coupe par tranches tous les zeros en cette maniere de deux en deux 64|00|00|00. en ſuite je cherche la racine quarrée de 64. par l'Article precedent & trouvant 8. je le poſe au quotient & lui ajoûte trois zeros, parce qu'il y a 3 tranches de zeros, ainſi 8000 eſt la racine requiſe du nombre 64000000. Voyez cette diſpoſition.

La racine quarrée de 64|00|00|00 (8000 racine requiſe.

Mais ſi l'on demande la racine quarrée de 72|00|00|00|00 aprés avoir trãché les zeros ne trouvant pas 72 preciſement dans les cellules des quarrez, je prens 64 qui eſt le moindre qui en aproche le plus, ainſi ajoûtant à ſa racine 8, 4, zeros le nombre 80000 eſt la racine quarrée de 7200000000.

5. Si c'eſt la racine cubique que l'on demande ou quelqu'autre racine plus avancée. Tranchez vos zeros ſuivant le denominateur de la racine propoſée. Par exemple pour la cubique vous couperez les zeros de 3 en 3, pour la quatriéme racine vous les couperez de 4 en 4 & ainſi de ſuite à l'infini. Suivant les mêmes regles cy-deſſus, & ajoûtant toûjours autant de zeros à

la racine trouvée, qu'il y aura de tranches de zeros dans le nombre donné, ce qui n'a nullement beſoin de plus grande explication, la pratique l'apprenant ſans aucune difficulté.

V. Pour extraire la racine quarrée d'un nombre complexe quel qu'il ſoit, obſervez les Regles ſuivantes.

1. Coupez de droite à gauche de deux en deux chiffres, & par diverſes tranches le nombre donné comme dans les Regles de l'Article 3 de ce même Chapitre.

2. Cherchez ſuivant les Regles cy-deſſus la racine quarrée des chiffres qui ſe trouvent à la derniere tranche.

3. Poſez au lieu du quotient la racine trouvée, & ſon quarré, retranchez-le des chiffres de cette derniere tranche, poſant exactement au deſſus les chiffres reſtant de la ſouſtraction.

4. Doublez la racine déja trouvée & poſez-en le produit ſous le dernier chiffre de la ſeconde tranche, avançant les autres ſous ceux qui ont reſtez, & qui ſerviront de dividende.

5. Cherchez l'expoſant de ce dividende par le diviſeur qui eſt au deſſous, comme dans la diviſion, & le poſez pour ſecond chiffre ou racine au lieu du quotient à côté de la premiere déja trouvée dans la derniere tranche.

6. Multipliez le diviſeur par la racine trouvée, & retranchez le produit qui en reſulte des chiffres de vôtre dividende, poſant au deſſus les chiffres reſtans, s'il y en-a, comme dans l'operation de la premiere tranche.

7. Multipliez cette ſeconde racine par elle-même & aprés avoir poſé ſon produit ou quarré ſous le chiffre de la tranche, vous le ſouſtrairez des chiffres qui lui repondent au deſſus.

8. S'il y a encore d'autres tranches ſur leſquelles vous deviez operer; vous doublerez toutes les racines trouvées, comme ſi ce n'en étoit qu'une, & placerez le produit qui en reſulte ſous le dernier chiffre de

tranche nouvelle pour ſervir de diviſeur, ſous les chiffres reſtans qui ſerviront de dividende.

9. Vous chercherez l'expoſant de ce nouveau dividende par ſon diviſeur, & vous le poſerez pour 3e racine au lieu du quotient.

10. Vous retrancherez le produit de cette nouvelle racine par le diviſeur, poſant exactement au deſſus les chiffres qui reſteront.

11. Vous multiplierez la derniere racine trouvée par elle-même, & le produit ſera poſé ſous le premier chiffre de la tranche pour être ſouſtrait, comme il eſt expliqué cy-devant.

12. Et s'il reſte encore quelque tranche, vous ſuivrez exactement les Regles 8, 9, 10, 11, ſe ſouvenant de prendre toutes les racines trouvées comme une ſeule. S'il ne reſte rien aprés l'operation, c'eſt une marque que le nombre étoit parfaitement quarré : mais s'il reſte quelque chiffre aprés l'operation le nombre n'eſt pas exactement quarré, & ſa racine eſt ſourde. Nous donnerons cy-aprés les Regles d'approcher le plus qu'il ſe pourra de la racine exacte.

EXEMPLE.

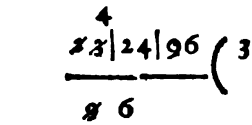
L'on demande la racine quarrée de 132496.

Premierement je coupe par tranche de deux en deux chiffres de droite à gauche le nombre donné, comme il eſt cy-aprés repreſenté.

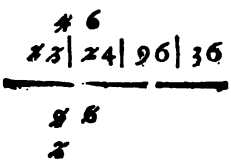
Secondement je cherche ſuivant les regles cy-deſſus la racine quarrée de 13 qui ſe trouve dans la derniere tranche, & le nombre 3 qui en eſt la racine, je le poſe au lieu du quotient ; & ſon quarré qui eſt 9, je le poſe ſous le premier chiffre de la tranche, & je le ſouſtrais de 13 poſant 4 au deſſus pour reſtant aprés avoir effacé le 9 & 13.

4
13|24|96 (3
9

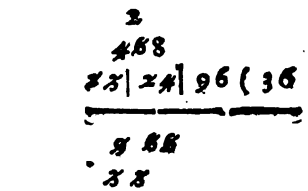
Troiſiémement pour venir à la tranche qui ſuit, je double la racine 3, & ſon produit 6, je le poſe pour diviſeur ſous le dernier chiffre de la tranche, comme vous le voyez.



Quatriémement je cherche par les regles de la diviſion l'expoſant de 42 par 6, & trouvant 6, je le poſe pour nouvelle racine à côté de la premiere, & enſuite multipliant le diviſeur 6 par la racine 6, je retranche ſon produit de 42, poſant le reſtant au deſſus. Remarquez que ſi j'avois pris 7 pour l'expoſant, il n'y auroit pas eu dequoi fournir au produit ſuivant, car 4 qui reſteroit dans cette tranche ne pourroit pas contenir le quarré 49.

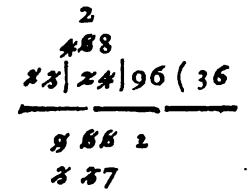


Cinquiémement je multiplie la nouvelle racine 6 par elle-même, & poſe ſon quarré ſous le premier chiffre de la tranche, & le ſouſtrait de 64 qui lui repond au deſſus, poſant le reſtant, ce qui donne la diſpoſition ſuivante.

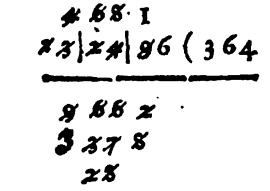


Sixiémement je double les racines 36 & le pro-

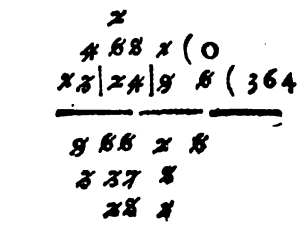
duit 72. je le poſe ſous le dernier chiffre de la tranche, & ceux qui ſuivent, comme on le voit ici.



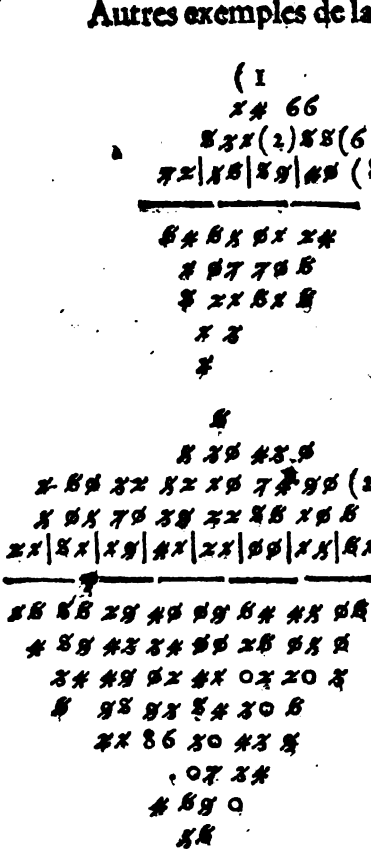
Septiémement je cherche l'expoſant de 28 par 7 qui ſe trouve 4 que je poſe au lieu du quotient. Je multiplie cette nouvelle racine 4 par le diviſeur 72 & le produit 288, je le ſouſtraits de 289 ce qui donne cette diſpoſition.



Enfin je multiplie la derniere racine 4 par elle-même, & ſon quarré 16 je le ſouſtrais des chiffres reſtans & mon operation eſt finie ſans qu'il reſte aucun chiffre, ce qui marque que la racine 364 eſt exacte & que le nombre 132496 eſt un nombre quarré.



Autres exemples de la racine quarrée.



V. Pour extraire la racine cubique de toute ſorte de nombres complexes, voici les Regles.

1. Coupez de droite à gauche, de trois en trois chiffres par diverſes tranches le nombre propoſé.

2. Cherchez la racine cubique du nombre le plus proche des chiffres qui ſe trouvent dans la derniere tranche & poſez au lieu du quotient la racine trouvée.

3. Retranchez des chiffres de cette tranche le nombre cubique de la racine trouvée & poſez au deſſus le reſtant.

4. Multipliez cette racine par elle-même & triplez ſon produit que vous poſerez pour diviſeur ſous le dernier chiffre de la tranche & ſous les chiffres reſtans de la premiere operation.

5. Cherchez l'expoſant du dividende par ce nouveau diviſeur & le poſez pour ſeconde racine au lieu du quotient.

6. Multipliez le diviſeur par la nouvelle racine, & aprés avoir poſé chaque chiffre ſous chaque dividende faites-en la ſouſtraction, & poſez le reſtant au deſſus.

7. Multipliez cette racine par elle-même, triplez ſon produit que vous multiplierez par la premiere racine dont le produit ſera poſé & ſouſtrait, comme nous avons dit cy-devant, avançant ſous le ſecond chiffre de la tranche.

8. Cubez la ſeconde racine, & le produit poſé ſous le premier chiffre de la tranche, il ſera ſouſtrait & le reſtant poſé au deſſus.

9. S'il y a encore quelque tranche ſur qui il faille operer, multipliez toutes les racines déja trouvées par elles-mêmes, triplez-en le produit & le poſez pour nouveau diviſeur ſous le dernier chiffre de la tranche nouvelle.

10. Cherchez l'expoſant de ce nouveau diviſeur & le poſez en ſon lieu.

11. Multipliez le diviſeur par la racine nouvelle, & le produit poſé & ſouſtrait, vous poſerez le reſtant.

12. Multipliez cette nouvelle racine par elle-même, triplez-en le produit que vous multiplierez encore par toutes les racines precedentes, & aprés l'avoir poſé & ſouſtrait, vous poſerez le reſtant au deſſus.

13. Cubez la derniere racine dont vous ſouſtraiez le produit, ſuivant les Regles ſi ſouvent repetées.

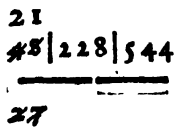
14. Il en eſt de même de toute autre tranche tant qu'il y en aura, & ſi à la fin de l'operation il ne reſte

aucun chiffre la racine ſera exacte,& le nombre donné un nombre cubique, ſinon la racine ſera ſourde.

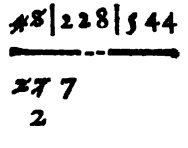
Exemple.

La racine cubique de 48228544.

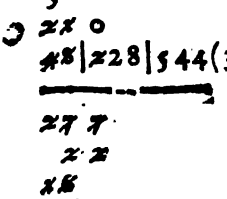
Je coupe de trois en trois les chiffres comme on le voit ici, & je cherche la racine cubique de 48 qui eſt 3, dont le cube eſt 27 que je poſe ſous 48,& que je ſoustraits & poſe au deſſus le reſtant 21.



Je multiplie la racine par elle-même ſon produit et 9 que je triple, & poſe le produit 27 comme vous voyez pour ſervir de diviſeur.



Je cherche l'expoſant de 21 par 2, prenant garde de ne pas prendre un nombre trop haut pour pouvoir fournir aux produits ſuivans. Il ſe trouve que l'expoſant juſte eſt 6 que je poſe en ſon lieu,& le multipliant par le diviſeur le produit qui en reſulte je le ſouſtrais de 212 & poſe le reſtant au deſſus.



Je multiplie la nouvelle racine par elle-même, le produit est 36 que je triple, & le nombre 108 qui en provient, je le multiplie encore par la premiere racine ce qui me donne 324 que je pose & soustrais comme vous le voyez ici.

```
 1
 8 7
21 08
48|228|544(36
-----------
27 74
 2 2
26 2
 3
```

Je cube la seconde racine 6 & le produit 216 posé sous le premier chiffre de la tranche & soustrait, vous ferez la disposition suivante.

```
  1 5
  8 77
 21 088 2
 48|228|544(36
-----------
 27 746
  2 21
 26 2
  3 2
```

Je multiplie les deux racines 36 par elles-mêmes, le produit est 1296 que je multiplie encore par 3 & le produit 3888 je le pose sous le dernier chiffre de la premiere tranche pour servir de diviseur.

1 5
~~5~~ ~~7~~7
~~21~~ ~~0~~~~8~~~~2~~
~~48~~|~~228~~|544 (36

~~27~~ ~~746~~ 8
~~2~~ ~~21~~ 8
~~1~~ ~~62~~ 8
~~32~~
3

Je cherche l'exposant de 15 par 3 je trouve 4 que pose au quotient. Je multiplie le diviseur 3888 par racine 4 & le produit 15552 je le pose & le soustrais suivant les mêmes Regles ci-dessus.

~~1~~ ~~5~~1
~~5~~ ~~7~~~~7~~7
~~21~~ ~~0~~~~8~~~~2~~ 3
~~48~~|~~228~~|~~5~~44 (364

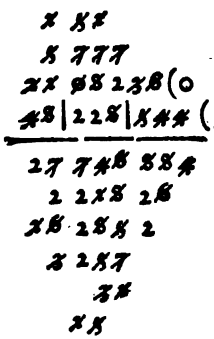
~~27~~ ~~746~~ ~~8~~2
~~2~~ ~~218~~ ~~2~~
~~16~~ ~~285~~
~~3~~ ~~25~~
~~3~~
~~15~~

Je multiplie la nouvelle racine 4 par elle-même, produit 16, je le triple & le nombre 48 qui en pr vient je le multiplie par 36 dont le produit est 172 que je pose sous le second chiffre de la tranche & chifres restans de l'operation precedente, je le soustr & pose le restant au dessus qui est 64.

~~1~~ ~~5~~~~1~~
~~5~~ ~~7~~~~7~~~~7~~
2~~1~~ 0~~8~~2 ~~36~~
~~48~~|22~~8~~|~~5~~~~4~~~~4~~ (764

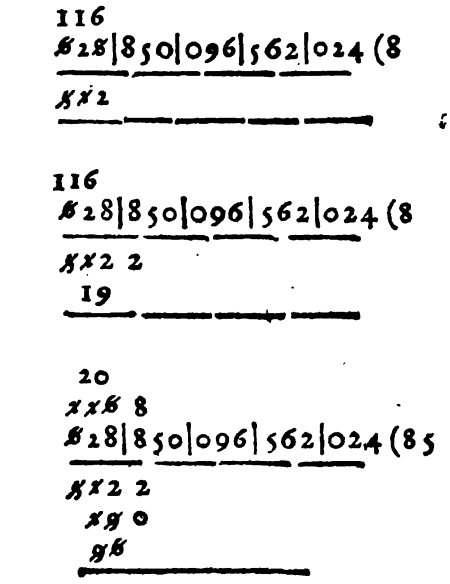
27 ~~746~~ ~~8~~~~8~~4
2 2~~18~~ 2
~~16~~ 2~~85~~ 2
~~3~~ 2~~47~~

Je cube la derniere racine 4 & ſon produit 64 je le ſouſtrais des chiffres reſtantes 64, d'où je concluë que ne reſtant plus rien, la racine eſt exacte.



Autre exemple ſelon toutes ſes operations.

On demande la racine cubiq; de 6288500965620 24



14
20
116 85
628|850|096|562|024 (85

112 20
19 0
96 0
6

14
20 72
116 85
628|850|096|562|024 (85

112 205
19 02
96 0
6 1

14
20 72
116 85
628|850|096|562|024 (85

112 205 5
19 027
96 06
6 1
2 1

```
   1
  14 72
  20 720
 116 855 0
 628|850|096|562|024(856
 ---------------------------
 512 205 5
  19 027 0
  96 065
   6 10
   2 1
  13 0
 ---------------------------

   1 62
  14 72
  20 720 2
 116 855 09
 628|850|096|562|024(856
 ---------------------------
 512 205 50
  19 027 0
  96 065 8
   6 101
   2 19
  13 9
 ---------------------------

   1 62
  14 728 0
  20 720 28
 116 855 890
 628|850|096|562|024(856
 ---------------------------
 512 205 5068
  19 027 010
  96 065 82
   6 101 2
   2 199 8
  13 01
     2
```

x 6z9 3
x4 7z8 03
z0 7z0 z84
xx6 8xx 099 9
6z8|8x0|099|x6z|024 (8567

xxz z0x x06 8
x9 0z7 0x0 6
96 06x 8zx
6 x0x z4
z x99 8
x3 0x8 7
z3
x x

880
x 6z9 37
x4 7z8 036
z0 7z0 z84 6
xx6 8xx 099 94
6z8|8x0|099|x6z|024 (8567

xxz z0x x06 8z
x9 0z7 0x0 6
96 06x 8zx 3
6 x0x z48
z x99 8x
x3 0x8 7
z3z z
x x

880
x 6z9 37
x4 7z8 036 2
z0 7z0 z84 69
xx6 8xx 099 949
6z8|8x0|099|x6z|024 (8567

xxz z0x x06 8z3
x9 0z7 0x0 64
96 06x 8zx 3
6 x0x z48 3
z x99 8x
x3 0x8 7
z3z z
x x

```
        000
        88 00
     1 629 374 1
    14 728 036 21
    20 720 284 692
   116 855 090 949 2
   628|850|096|562|024 ( 85674
   ---------------------------
   512 205 506 823 7
    19 027 010 646 8
    96 065 825 346
     6 101 248 38
     2 199 858 0
    13 018 712 1
       231 27
     1 522 0
        88 0
```

```
        88 0
     1 629 374 1
    14 728 036 21
    20 720 284 603
   116 855 090 949 260
   628|850|096|562|024 ( 85674 racine exacte
   ---------------------------
   512 205 506 823 764
    19 027 010 646 86
    96 065 825 346 1
     6 101 248 382
     2 199 858 01
    13 018 712 1
       231 274 1
     1 522 0
        88 0
```

VI. Pour extraire la racine quarrée quarrée, il faut extraire du nombre donné la racine quarrée suivant les regles de l'article 4 ci-dessus. Et du quotient ou racine en extraire de nouveau la racine quarrée. Son quotient satisfera à la proposition dont je ne donne point d'exemple.

VII. Lorsque le denominateur d'une racine proposée se peut diviser par 2 par 3 ou par quelqu'autre nombre exactement, alors vous pourrez extraire toute sorte de racines vous servant seulement de la racine quarrée ou de la racine cubique ou autre exprimée par le denominateur qui divisera le denominateur de la racine proposée. Par exemple vous vous servirez de la racine quarrée lorsque le denominateur de la racine proposée se divisera par 2 : vous vous servirez de la racine cubique, si le denominateur de la racine donnée se peut diviser par 3, & si le denominateur ne se peut diviser que par 5, vous vous servirez de la racine 5e & ainsi de toutes autres quelques racines que l'on puisse proposer pourvû que son denominateur puisse être divisé par un nombre moindre qui le divise exactement.

Ceux qui voudront savoir les regles d'extraire les racines dont le denominateur est un nombre premier comme la racine 5, 7, 11. 13, &c. auront recours à nôtre Arithmetique où nous donnons la maniere d'extraire toutes sortes de racines à l'infini. Je n'ay point voulu mettre ici ces regles de peur d'être trop étendu dans ces rudimens de Mathematiques, & sur tout dans cet Abregé d'Arithmetique. Je renvois encore le Lecteur à nôtre Arithmetique pour savoir la formation & la resolution de toutes sortes de nombres.

CHAPITRE VII.

Contenant quelques Problemes neceſſaires pour les operations ſuivantes de l'Arithmetique.

Premier Probleme.

Deux nombres étant donnez, connoître s'ils ſont premiers entr'eux ou compoſez.

Regles.

Diviſez le plus grand par le plus petit, & s'il reſte quelque chiffre aprés l'operation, poſez-les pour diviſeur du plus petit nombre donné, & continuez la diviſion de reſtant en reſtant, juſqu'à ce qu'il ne reſte plus rien ou l'unité ſeulement. Et ſi la diviſion eſt exacte les nombres ſont compoſez; au contraire ils ſont premiers entr'eux ſi l'unité reſte dans la derniere diviſion.

Exemples.

On demande ſi 124 & 216 ſont premiers ou compoſez entr'eux. Je diviſe 216 par 124 le reſtant eſt 92. Je diviſe 124 par 92, le reſtant eſt 32. Je diviſe 92 par 32, le reſtant eſt 28. Je diviſe 32 par 28, le reſtant eſt 4. Je diviſe 28 par 4 & il ne reſte rien, d'où je conclus que 124 & 216 ſont compoſez entr'eux.

Pareillement on demande ſi 727 & 514 ſont premiers entr'eux. La premiere diviſion de 727 par 514 donne pour reſtant 213: 514 par 213 donne 88: 213 par 88 donne 37: 88 par 37 donne 14: 37 par 14 donne 9: 14 par 9 donne 5: 9 par 5 donne 4: 5 par 4 donne 1 qui eſt la marque que 727 & 514 ſont premiers entr'eux.

PROBLEME II.

Trouver la plus grande commune meſure de deux nombres compoſez entr'eux.

REGLES.

1. Diviſez le plus grand nombre par le plus petit, & ſi la diviſion eſt ſans reſte, le plus petit nombre eſt lui-même la plus grande commune meſure des nombres propoſez.

2. Si la premiere diviſion n'eſt pas juſte, diviſez le plus petit nombre par le reſtant de la diviſion, & ainſi de ſuite de reſtant en reſtant comme au Probleme precedent & le dernier diviſeur ſera le nombre qui ſatisfera au Probleme.

EXEMPLES.

On demande le plus grand diviſeur commun de 60 & 20. 60 étant diviſé par 20 il ne reſte rien, & par conſequent 20 eſt le plus grand diviſeur de 60 & de 20 car il meſure 60, 3 fois & 20 une fois.

On demande le plus grand diviſeur commun de 216 & 144. la diviſion de 216 par 144 donne 72 pour reſtant & 144 diviſé par 72 ne donne aucun reſte, & par conſequent 72 eſt le plus grand diviſeur commun de 216 & de 144.

PROBLEME III.

Trouver le plus grand diviſeur commun de plus de deux nombres.

REGLES.

1. Rangez vos nombres indifferemment à la même ligne.

2. Par le Probleme precedent cherchez le plus grand diviſeur commun des deux premiers nombres.

3. Et par le même Probleme, cherchez encore la plus grande commune meſure de la derniere trouvée avec le nombre ſuivant & elle ſera la requiſe s'il n'y a que trois nombres.

4. Mais s'il y a plus de 3 nombres donnez cherchez avec le 4e nombre le plus grand diviſeur commun de la derniere commune meſure trouvée, & ainſi de ſuite tant que vous aurez de nombres, & le dernier diviſeur commun ſatisfera au Probleme.

EXEMPLE.

On demande le plus grand diviſeur commun des 4 nombres 24, 40, 64, 120, je les poſe ſur une même ligne.

24, 40, 64, 120

Je cherche le plus grand diviſeur commun de 24 & 40 l'operation me donne 8. je cherche en ſuite la plus grande commune meſure de 8 avec 64. l'operation donne encore 8 je cherche encore le diviſeur commun de 8 avec 120, & l'operation donne derechef 8, d'où je conclus que 8 eſt la plus grande commune meſure des 4 nombres donnez.

PROBLEME IV.

Trouver le plus petit nombre que deux autres puiſſent meſurer.

REGLES.

1. Si les nombres ſont premiers entr'eux leur produit eſt le nombre requis.

2 Si les nombres ſont compoſez cherchez le plus gra- diviſeur commun par le Probleme 2.

3 Diviſez lequel des nombres vous voudrez par le plu grand diviſeur trouvé.

4. Et multipliez l'expoſant de cette diviſion par le nombre qui n'a point été diviſé & le produit ſera le requis.

Exemples.

On demande le plus petit nombre que 7 & 11 puiſſent meſurer.

Premierement je cherche par le premier Probleme ſi 7 & 11 ſont des nombres premiers, & trouvant qu'ils le ſont, je les multiplie & le produit 77 eſt le plus petit nombre que 7 & 11 puiſſent meſurer.

On demande le plus petit nombre que 144 & 216 puiſſent meſurer.

Je cherche ſi 144 & 216 ſont compoſez entr'eux, & trouvant qu'ils le ſont par le premier Probleme. Je cherche par le 2e Probleme leur plus grande commune meſure, je trouve que c'eſt 72. Je diviſe 144 ou 216 par 72, & je trouve pour quotient 2 ou 3, ainſi multipliant 216 par 2, ou 144 par 3. le produit 432 qui reſulte de l'une ou de l'autre des multiplications, eſt le nombre requis.

Probleme V.

Trouver le plus petit nombre que puiſſent meſurer plus de deux nombres donnez.

Regles.

1. Si les nombres ſont premiers entr'eux leur produit eſt le requis.

2. Si les nombres ſont compoſez cherchez par le Probleme precedent le plus petit nombre que deux puiſſent meſurer:

3. Cherchez par les mêmes Regles le plus petit que ce dernier nombre puiſſe meſurer avec le troiſiéme nombre donné, & celui que vous trouverez ſatisfera au Probleme.

4. Mais s'il y a plus de trois nombres vous chercherez encore le plus petit nombre que le dernier trouvé puiſſe meſurer avec le quatriéme ou cinquiéme, &c. ce qui ſatisfera au Probleme.

EXEMPLE.

On demande le plus petit nombre que 8, 12 & 30 puiſſent meſurer. Je trouve que le plus petit que puiſſent meſurer 8 & 12 c'eſt 24. Je cherche enſuite le plus petit que puiſſent meſurer 24 & 30 & je trouve 120 qui ſatisfait au Probleme. Que ſi on ajoûte un quatriéme nombre par exemple 48, en cherchant le plus petit nombre que 120 & 48 puiſſent meſurer, on trouvera 2880 qui ſatisfait au Probleme.

CHAPITRE VIII.

Des operations qu'on appelle Preuves.

L'On diſtingue de deux ſortes de preuves, l'une à qui l'on a donné le nom de preuve de 9, parce que retranchant une ou pluſieurs fois le nombre de 9 des nombres propoſez & trouvez, on connoît ſi l'on a operé juſte par le moyen du reſtant, comme nous l'expliquerons dans la ſuite de ce Chapitre. L'autre preuve ſe fait par une operation contraire à celle que l'on a premierement faite, ainſi l'addition ſe prouve par la ſouſtraction; la ſouſtraction par l'addition; la multiplication par la diviſion, & la diviſion par la multiplication; la compoſition des puiſſances & des nombres par leurs reſolutions ou extractions de racines, & les extractions de racines par la compoſition des puiſſances ou des nombres.

REGLES de la Preuve de 9 dans l'Addition.

Retranchez autant de fois 9 qu'il ſe pourra des

nombres donnez, commençant par où il vous plaira & posez sur un petit trait le restant. Faites-en la même chose de la somme trouvée, & si le restant de la somme se trouve le même que celui des nombres ajoûtez, l'operation que vous aurez faite sera bonne.

EXEMPLE.

Soit donnée l'addition suivante & la somme toute trouvée.

479	5
568	——— preuve.
407	5
1454	

Premierement je parcours le premier nombre qui est 479 disant 4 & 7 sont 11 la preuve de 11 c'est 2 (c'est à dire retranchant 9 de 11 il reste 2, c'est ce que l'on entend par preuve, le restant aprez avoir retranché le 9.) Et comme 9 qui suit le 7 doit être retranché on le passe, ainsi venant au second nombre 568, je dis 2 & 5 sont 7, 7 & 6 sont 13; la preuve de 13 est 4, 4 & 8 sont 12 la preuve de 12 c'est 3. Je viens en suite au troisiéme nombre, disant 3 & 4 sont 7 & zero sont toujours 7 & 7 sont 14; la preuve de 14 c'est 5 que je pose sur le trait comme il est ci-dessus.

Secondement je viens à la somme disant 1 & 4 sont 5 & 5 sont 10 & 4 sont 14, la preuve de 14 c'est 5 que je pose sous le trait, & comme la preuve de la somme est égale à la preuve des nombres ajoûtez, je conclus que mon addition est bonne.

Preuve de l'addition par la soustraction.

1. Adjoûtez ensemble les chiffres du dernier rang & les retranchez du dernier chiffre de la somme ou des deux derniers s'il y a un chiffre avancé dans la

ſomme poſant le reſtant au deſſous.

2. Adjoûtez de même les chiffres de la colonne qui precede, & les retranchez de ceux qui repondent en même colonne dans la ſomme poſant au deſſous le reſtant ſous le chiffre moins avancé.

3. Continuez le même retranchement à chaque colonne ſucceſſivement juſqu'à la premiere, poſant exactement les reſtes au deſſous de chaque colonne, & s'il ne reſte rien à la premiere colonne, c'eſt une marque que l'addition a été bien faite.

EXEMPLE.

Soit donné la même addition ci-deſſus dont je veux faire la Preuve par Souſtraction.

```
  4 7 9
  5 6 8
  4 0 7
 -------
1 * * *
  1 2 0
```

J'adjoûte la derniere colonne, diſant 4 & 5 ſont 9 & 4 ſont 13 & les retranchant de 14 qui ſe trouve au bas dans la ſomme, je dis 13 de 14 reſte 1, j'efface 14 à la ſomme & poſe 1 au deſſous. Je fais le même à la ſeconde colonne, diſant 6 & 7 ſont 13, 13 de 15 que j'efface reſte 2 que je poſe au deſſous. Je trouve 24 à la premiere colonne, & je dis 24 de 24 ne reſte rien, je poſe zero au deſſous & mon addition eſt prouvée par la Souſtraction.

Preuve de 9 dans la Souſtraction.

Retranchez 9 autant de fois qu'il ſe peut du plus grand nombre donné & poſez le reſtant ſur un trait. Faites le même dans le petit nombre & la difference trouvée, & ſi le reſtant en eſt le même l'operation eſt bonne.

EXEMPLE.

de	223456	4
Souſtraire	89473	— preuve.
		4
	133983	

La Preuve du plus grand nombre donné eſt 4. La Preuve du plus petit nombre & du reſtant eſt auſſi 4 & par conſequent l'operation eſt bonne.

Preuve par l'Addition.

Adjoûtez le nombre ſouſtrait au nombre reſtant, & ſi la ſomme qui en provient eſt égale au nombre du quel on a ſouſtrait le petit nombre, l'operation eſt juſte.

EXEMPLE.

de	223456
Souſtraire	89473
	133983 reſtant
	223456 ſomme du reſtant & du petit nombre

Preuve de 9 dans la Multiplication.

Retranchez 9 du multiplicande autant de fois qu'il ſe peut & poſez la Preuve à côté gauche d'un petit trait. Faites le même au Multiplicateur & mettez la Preuve à côté droit du petit trait. Multipliez ces deux Preuves l'une par l'autre & du produit rejettez en tous les 9 poſant la Preuve au deſſus du trait. Enfin prenez la Preuve du produit en retranchant 9 & ſi elle eſt égale à celle qui eſt ſur le petit trait la multiplication eſt bonne.

EXEMPLE.

Multiplier 4 5 8 — 3
par 2 4 — 8—6
3

1 8 3 2
9 1 6

1 0 9 9 2

La Preuve du multiplicande eſt 8 que je poſe à côté gauche du petit trait. La Preuve du multiplicateur eſt 6 que je poſe à côté droit du petit trait. Je multiplie 8 par 6 dont le produit eſt 48. & la Preuve 3 que je poſe au deſſus du trait. Je cherche la Preuve du produit qui se trouve auſſi 3 d'où je conclus que ma multiplication eſt juſte.

Preuve par la Diviſion.

Diviſez le produit de vôtre multiplication par le multiplicande ou le multiplicateur, & ſi le quotient eſt égal à la racine qui n'a point ſervi de diviſeur l'operation eſt juſte.

Exemple de la Multiplication ci-deſſus.

Je diviſe 10992 par 458, comme les operations ci-deſſous le repreſentent. Le quotient qui en provient eſt 24, d'où je conclus que l'operation eſt bonne.

Diviſer ✗✗✗✗✗ (24

par 458

✗3
✗✗ (2 — 458
— 2
✗✗
✗✗ — 916 produit.

1832 (24	458
458	4
1832	1822 produit.

Preuve de 9 dans la Division.

Rejettez du diviseur tous les 9 & posez le restant à côté gauche du petit trait. Faites le même au quotient & posez la Preuve à côté droit. Multipliez ces deux Preuves l'une par l'autre, & du produit prenez-en la Preuve que vous poserez au dessus du trait. Et si la Preuve du dividende s'y trouve égale, l'operation est bonne.

EXEMPLE.

Dans la Division cy-devant le diviseur est 458, dont la preuve est 8; le quotient est 24, dont la preuve est 6, & leur produit 48, dont la preuve est 3. La Preuve du dividende 10992 est aussi 3 dont l'operation est bonne.

Preuve par la Multiplication.

Multipliez l'exposant par le diviseur, & si le produit est égal au dividende la Partition est bonne.

EXEMPLE.

Dans la Division ci-devant qui a servi de Preuve à la Multiplication ayant multiplié le diviseur 458 par l'exposant 24, le produit se trouve 10992, comme il a déja été prouvé dans la Multiplication ci-devant, & par consequent puisque 10992 est égal au dividende l'operation est bonne.

Preuve de 9 dans la composition des puissances, & leurs extractions.

Comme la composition des puissances n'est [illegible]

Multiplication d'un nombre par luy-même, il eſt évident que la Preuve s'en fait de même que dans la multiplication ; ainſi

Dans le quarré comme dans le multiplicande & le multiplicateur ſont le même. Ayant pris la Preuve de la racine & l'ayant multipliée par elle-même. Et pris du produit la Preuve. L'operation ſera bonne ſi la Preuve du nombre quarré eſt égale à la Preuve du produit de la Preuve de la racine par elle-même.

Dans le cube ſi elle eſt égale à la Preuve du produit de la preuve de la racine par ſon quarré & ainſi des autres puiſſances ſe ſouvenant combien de fois la racine a ſervi de multiplicateur.

Et puiſque l'extraction des racines n'eſt proprement qu'une diviſion où le diviſeur & le quotient ſont le même, il eſt clair que la Preuve ſe doit faire comme dans la Diviſion, mais on doit ſe ſouvenir combien de fois la racine doit être multipliée pour la puiſſance dont on extrait la racine.

Preuve de la compoſition des puiſſances par l'extraction de leurs racines, & de l'extraction des racines par la compoſition des puiſſances.

Si aprés avoir compoſé la puiſſance d'un nombre vous en extraïez la racine de même denomination que la puiſſance que vous avez compoſée, & que la racine qui en proviendra ſoit la même que celle dont vous avez compoſé vôtre puiſſance, il eſt infaillible que vôtre operation a été bonne.

De même ſi aprés avoir extrait la racine d'un nombre vous compoſez ſur cette racine la puiſſance de même denomination que la racine extraite. Il eſt hors de doute que l'operation aura été bien faite, ſi le nombre que vous aurez compoſé de la racine découverte eſt le même que celui dont vous en avez extrait la racine.

Je ne donne ici aucun exemple afin que j'abrege. Si cét abregé eſt un peu difficile à entendre voyez nôtre Arithmetique dans le Chapitre des Preuves où j'en ay parlé fort au long avec des exemples ſur chaque operation

CHAPITRE IX.

Regles des Fractions en general.

I. POUR diviſer un petit nombre par un plus grand en le reduiſant en fraction.

Poſez le plus petit nombre ſur un trait & le plus grand au deſſous & la fraction qui en reſulte eſt l'exposant de la diviſion.

EXEMPLE.

On demande de diviſer 5 par 12 ou à 12. Je poſe 5 ſur un trait & 12 au deſſous ce qui donne $\frac{5}{12}$, c'eſt à dire cinq douziémes pour quotient. Ainſi 30 diviſé par 1562 donne $\frac{30}{1562}$ c'eſt à dire trente, mil cinq cent ſoixante deuxiémes.

II. Le denominateur d'une fraction étant donné pour reduire un ou pluſieurs nombres donnez en fractions qui ayent pour denominateur le denominateur donné ſans rien diminüer de la valeur des nombres donnez.

Multipliez les nombres donnez par le denominateur propoſé & le produit qui en reſulte poſez-le pour numerateur au deſſus du denominateur, & vous aurez ſatisfait à la propoſition.

EXEMPLE.

Reduire en ſixiémes ou $\frac{}{6}$ les nombres 16, 18, 45. Et en $\frac{}{9}$ les nombres 25, 37, 63.

Je multiplie 16, 18, 45, par 6 & 25, 3763 par 9. Les produits qui reſultent du multiplicateur 6, je les poſe ſur une même ligne ſeparément, & ceux qui proviennent du multiplicateur 9 je les poſe de même ſur un autre trait ſeparément; & au deſſous de ce

produits je mets d'une part 6 pour denominateur & de l'autre 9 au deſſous des produits qu'ils ont compoſez: comme il eſt ici.

Multiplier	16,	18,	45
par	6	6	6
	96,	108,	270 produits.

Multiplier	25,	37,	63
par	9	9	9
	225.	333.	567.

Fractions.

96,	108,	270	225.	333.	567
6.	6.	6.	9.	9	9

III. Reduire en entiers une fraction dont le numerateur excede le denominateur.

Diviſez le numerateur par le denominateur & ſi la diviſion eſt exacte, l'expoſant & le nombre des entiers requis; mais s'il reſte quelques chiffres ils ſeront le numerateur de la fraction avec le même denominateur.

EXEMPLES.

On demande de reduire $\frac{60}{5}$ en entiers, je diviſe 60 par 5. L'expoſant 12 eſt ce nombre requis, c'eſt à dire que $\frac{60}{5}$ valent 12 entiers.

Mais ſi l'on propoſe de reduire $\frac{65}{12}$ en entiers aprés avoir diviſé 65 par 12, je poſe à côté du quotient qui eſt 5 le reſtant $\frac{5}{12}$ ce qui ſatisfait à l'operation.

Definitions.

Etant qu'une fraction peut-être exprimée en

plusieurs termes sans rien changer de leur valeur comme nous le demontrons dans nôtre Arithmetique. Par exemple $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ qui sont exprimées en divers termes & qui sont cependant de même valeur. Nous appellerons exposans d'une fraction les moindres termes qui puissent exprimer cette fraction. Ainsi dans l'exemple que nous venons de donner $\frac{1}{2}$ est l'exposant des fractions $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$, &c. parce que cette même fraction ne peut pas être exprimée en moindres termes que par $\frac{1}{2}$.

IV. Pour reduire une fraction à ses moindres termes ou ce qui est le même en trouver les exposans.

1. Si le numerateur & le denominateur de la fraction donnée sont des nombres premiers entr'eux ils sont eux-mêmes les moindres termes ou les exposans de la fraction.

2. Mais si le numerateur & le denominateur sont composez entr'eux, cherchez le plus grand diviseur commun de l'un & de l'autre terme suivant les regles du Chap. 7.

3. Divisez chacun des termes par le plus grand diviseur commun que vous avez trouvé & les quotiens seront les moindres termes qui exprimeront cette fraction; Sayoir le quotient du numerateur devenant numerateur, & celui du denominateur devenant le denominateur.

Exemples.

L'on demande les exposans de la fraction $\frac{2}{3}$. J'examine si 2 & 3 sont premiers entr'eux par le premier Probleme du chap. 7. & trouvant qu'ils le sont. Je conclus que 2 & 3 sont eux-mêmes les moindres termes de la fraction $\frac{2}{3}$.

Mais les nombres étans composez comme $\frac{20}{60}$, je cherche par le Probleme III. du Chap. VII. le plus grand diviseur commun de 20 & 60. il se trouve que c'est 20 luy-même. Ainsi divisant 20 par 20, j'ay 1

pour

pour numerateur, & diviſant 60 par 20 le quotient 3 devient le denominateur ainſi $\frac{12}{20}$ ſont reduits à $\frac{1}{3}$.

V. Reduire une fraction donnée aux termes d'une autre fraction s'il ſe peut.

Reduiſez la fraction donnée à ſes expoſans par l'article precedent. Diviſez le denominateur auquel vous voulez reduire vôtre fraction par l'expoſant du denominateur de la fraction donnée ; & ſi la diviſion eſt juſte, l'operation eſt poſſible ; mais s'il reſte quelque nombre, concluez qu'elle eſt impoſſible.

Si l'operation eſt poſſible, multipliez l'expoſant du numerateur de la fraction donnée par le quotient de la diviſion du nouveau denominateur, & le produit qui en reſulte poſé pour numerateur, on aura ſatisfait.

EXEMPLES.

Reduire $\frac{15}{20}$ en $\frac{}{7}$. Les expoſans de $\frac{15}{20}$ ſont par l'art. IV. de ce Chapitre, $\frac{3}{4}$: je diviſe le denominateur donné 9 par l'expoſant du denominateur 4, & connoiſſant que la diviſion n'eſt pas exacte, il n'eſt pas poſſible de reduire $\frac{15}{20}$ en $\frac{}{7}$.

Mais vous reduirez facilement $\frac{15}{20}$ en $\frac{}{77}$: car ſi vous diviſez 48 par l'expoſant 4 du denominateur 20, vous aurez 12 pour quotient juſte ; ainſi multipliant l'expoſant 3 du numerateur par le quotient 12, le produit 36 ſera le numerateur requis, ainſi $\frac{15}{20}$ ſeront reduits à $\frac{36}{77}$.

VI. donner un commun denominateur à deux fractions de differente valeur & denomination.

Multipliez le numerateur de chacune par le denominateur de l'autre ; les produits ſeront chacun le numerateur de la denomination commune.

Multipliez les denominateurs l'un par l'autre, & le produit ſera le denominateur commun.

EXEMPLE.

L'on demande de donner un commun denomina-

teur aux fractions $\frac{4}{6}$ & $\frac{9}{12}$. Je multiplie le numerateur 4 par le denominateur 12 le produit donne 48, que je pose ſous le numerateur 4. Je multiplie le numerateur 9 par le denominateur 6, & le produit 54 je le mets ſous le numerateur 9. Je multiplie le denominateur 6 par le denominateur 12, & le produit 72, je le poſe pour le denominateur ſous les numerateurs 48, & 54.

$\frac{4}{6} \times \frac{9}{12}$ multiplier 12 par 4 = 48; multiplier 9 par 6 = 54

$\frac{48}{72}$ $\frac{54}{72}$ multiplier 12 par 6 = 72

VII. Trouver le moindre commun denominateur que 2 fractions puiſſent avoir.

Cherchez les expoſans de chaque fraction par l'article 4 de ce chapitre.

Donnez-leur par l'article precedent un commun denominateur qui ſera le requis.

EXEMPLE.

On demande le moindre commun denominateur des fractions cy-deſſus. Par l'article 4 les expoſans de $\frac{4}{6}$ & de $\frac{9}{12}$ ſont $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ & par l'article ci-devant le denominateur commun des fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ eſt 12: ainſi la fraction cy-deſſus eſt reduite à commune denomination, & la moindre qu'il ſe puiſſe par $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$.

VIII. Donner un commun denominateur a plus de deux fractions de differente valeur & denomination.

Multipliez tous les denominateurs, & le produit ra le denominateur commun.

Multipliez chaque numerateur par tous les denominateurs des autres fractions, le produit de chacun ra le numerateur de chaque fraction.

EXEMPLE.

Donner un commun denominateur aux fractions.

1	3	4	5
3,	4,	5,	6.

Multip. 3 par 4	Multip. 1 par 4	3 par 3
Multip. 12 par 5	Multip. 8 par 5	9 par 5
Multip. 60 par 6	Multip. 40 par 6	45 par 6
360 commun denominat.	240 premier numerat.	270 secõd numerateur

Multip. 4 par 3	Multip. 5 par 3
12 par 4	15 par 4
48 par 6	60 par 5
288 3e numerateur.	300 4e numerateur.

Fractions reduites en commune denomination.

240 270 288 300

360. 360. 360 360

IX. Trouver le moindre commun denominat
par exemple des fractions ci deſſus en l'article 8.

Cherchez les moindres termes des fractions d
nées par l'article 4.

Donnez-leur en ſuite un commun denomina
par l'article precedent & vous aurez le requis.

Comme les fractions de l'article ci-devant, ſont
les-mêmes les moindres termes des fractions qu'
expriment, elles ne peuvent avoir de commun de
minateur moindre que celui de l'article precedent.

Mais ſi au lieu de $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ on propoſoit les fracti
$\frac{8}{12}$ $\frac{12}{15}$ $\frac{10}{12}$ $\frac{10}{12}$ aprés les avoir reduits à leurs expoſans,
ſont $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{6}$ vous trouverez le moindre comm
denominateur qui eſt 360 comme ci-deſſus.

CHAPITRE X.

Regles des fractions en particulier.

DEFINITIONS.

L'On diſtingue deux ſortes de fractions, les
qu'on appelle *ſimples* qui ſont celles qui reſul
de la premiere diviſion d'un tout comme ſont les
vantes $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{11}{12}$. Mais ſi une fraction eſt elle-même d
ſée en d'autres parties on l'apelle fraction de fracti
Ainſi par exemple $\frac{1}{3}$ eſt une fraction ſimple, ma
tier d'un tier eſt une fraction de fraction. Les fracti
de fractions s'expriment ainſi le $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dir
tier d'un tier. Les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, c'eſt à dire les d
tiers de trois quarts de cinq ſixiémes, ce qui mar
que $\frac{5}{6}$ ont été diviſez en $\frac{1}{6}$ dont on en prend $\frac{2}{3}$ en

ore ces $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{7}$ dont on prend $\frac{1}{7}$ ainſi l'on a les $\frac{1}{7}$ de $\frac{1}{4}$ le $\frac{1}{7}$ nous parlerons premierement des operations qui e font ſur les fractions ſimples, & au Chapitre ſuivant ous traiterons des fractions de fractions.

I. Pour adjoûter en une ſomme pluſieurs fractions imples.

Voyez ſi elles ont un commun denominateur, & en e cas la ſomme des numerateurs ſera le numerateur ous lequel vous poſerez le denominateur qui étoit ommun à toutes les fractions données.

Mais ſi les fractions données n'ont pas un commun enominateur, il faut leur en donner un par les arti- les 6, 7, 8 & 9. du chap. 9. & enſuite adjoûter les nu- erateurs de la denomination commune.

EXEMPLES.

Ainſi pour adjoûter enſemble les fractions $\frac{1161}{4444}$ j'ad- ûte ſimplement les numerateurs 3, 5, 6 & 1 dont la omme eſt 15 que je poſe pour numerateur & au deſ- ous 4 pour denominateur en cette ſorte $\frac{15}{4}$ qui expri- e la ſomme des fractions données.

Mais pour adjoûter les fractions $\frac{1145}{1456}$, je leur donne remierement un commun denominateur & les re- uits comme cy-devant à $\frac{240\ 270\ 288\ 300}{360}$ & en ſuitte ad- ûtant les numerateurs 240, 270, 288 & 300 la ſom- e de 1098 eſt le numerateur à qui je donne pour enominateur le commun 360, & les fractions don- ées ſe trouvent reduites à $\frac{1098}{360}$.

Que ſi vous voulez enſuite reduire la ſomme trou- e en entier, vous pratiquerez les Regles de l'article du chapitre precedent.

Et ſi l'on propoſoit d'adjoûter enſemble des entiers fractions avec entiers & fractions, vous adjoûterez parément les entiers & en ſuitte les fractions, qui ant reduites en entiers, vous donneront la ſomme e vous cherchez.

II. Pour ſouſtraire une fraction d'une autre frac- on voyez ſi elles ſont en même denomination, &

en ce cas ôtez le numerateur de la plus petite du numerateur de la plus grande, & posez le denominateur comme au dessous, & vous aurez satisfait.

Mais si les fractions n'ont pas un commun denominateur, il faut leur en donner un par les articles du chapitre precedent 6, 7, 8 & 9, & en suite operer comme nous venons de dire au commencement de cét article.

EXEMPLES.

Soustraire $\frac{8}{12}$ de $\frac{11}{12}$ — de 11 oter 8 — reste 3 qui est le numerateur

Difference $\frac{3}{12}$

Soustraire $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$, donnez-leurs un commun denominateur & reduisez vos fractions à $\frac{4}{12}$ & $\frac{3}{12}$ & $\frac{1}{12}$ sera la difference requise.

Que si l'on demandoit de soustraire entiers & fractions d'entiers & fractions, il faudroit soustraire separément les fractions des fractions, & les entiers des entiers; & si la fraction proposée n'est pas suffisante pour satisfaire à la soustraction, il faut emprunter un entier que l'on reduit aux fractions de la denomination commune par l'article 2. du chap. 9. & en suite diminuer le nombre des entiers d'une unité.

EXEMPLE.

de 3 4 $\frac{3}{6}$

Soustraire 2 5 $\frac{4}{6}$

$\frac{4}{6}$ ne peuvent pas être soustraits de $\frac{3}{6}$ ainsi j'emprunte un entier sur le 4 qui étant reduits en $\frac{6}{6}$ par l'article 2. du chap. 9. donne $\frac{9}{6}$ qui adjoûtez à $\frac{3}{6}$ font $\frac{12}{6}$ de quels je retranche $\frac{4}{6}$ le reliant est $\frac{8}{6}$ ainsi la soustraction

e trouve reduite comme il eſt ici.

de $34\frac{4}{}$
Souſtraire $25\frac{4}{6}$

$8\frac{5}{6}$ difference requiſe.

III. Pour multiplier une fraction par une autre fraction.

Multipliez le numerateur par le numerateur de l'autre fraction, ſon produit ſera le nominateur requis; & multipliant auſſi le denominateur par le denominateur ſon produit ſera le denominateur requis.

EXEMPLE.

Multiplier $\frac{1}{3}$ par $\frac{3}{4}$

Multip. le numerateur 3. Le denominateur 4
Par le numerateur 1. Par le denominateur 3

3 numerateur. 12 deno.

12 denominateur.

Mais pour multiplier entiers & fractions par entiers & fractions, il faut reduire les entiers en fractions chacune en la ſienne par l'article 2. du chap. 9. & en ſuite operer ſuivant les Regles ci-deſſus.

EXEMPLE.

Multiplier 4 & $\frac{5}{6}$ Par 3 & $\frac{4}{4}$
Le multiplicande reduit donne $\frac{29}{6}$
Le multiplicateur reduit donne $\frac{16}{4}$

Multipliez 29 Par 16

174
29

464

Multipliez 4 Par 6

24

$\frac{464}{24}$ produit requis.

Reduiſez en ſuite la fraction $\frac{464}{24}$ en entiers, & l'operation vous donnera 19 & $\frac{8}{24}$

IV. Pour diviſer une fraction par une autre fraction.

Reduiſez les fractions données à leurs moindres termes par l'article 4. du chap. 9.

Multipliez-les en croix le numerateur de l'une par le denominateur de l'autre.

Et le produit qui reſultera du numerateur du dividende par le denominateur du diviſeur, ſera le numerateur du quotient requis & l'autre produit en ſera le denominateur.

EXEMPLE.

Partager $\frac{2}{7} X \frac{1}{4}$ $\frac{8}{7}$ quotient.

Multipliez 2 numerateur du dividende par 4 denominateur du diviſeur & le produit 8, poſez-le pour le numerateur au quotient. Multipliez 3 le numerateur du diviſeur par 3 denominateur du dividende & le produit 9 poſez-le pour denominateur au quotient, & $\frac{8}{7}$ ſera le quotient requis.

Que ſi l'on propoſe de diviſer entiers & fractions par entiers & fractions, vous reduirez les entiers du dividende tout en fractions qui ayent le denominateur des fractions du dividende par l'article 2. du chap. 8. Vous ferez le même des entiers du diviſeur & la fraction étant reduite vous opererez ſuivant les regles cy-deſſus, & en ſuite reduirez la fraction du quotient en entiers par l'article 3. du chapitre precedent.

V. Pour élever une fraction à toutes ſes diverſes puiſſances.

Elevez d'une part le numerateur à toutes les puiſſances par le chap. 5.

Faites le même du denominateur, & vous aurez ſatisfait à la propoſition, comme il paroît dans les deux Exemples ſuivans, où $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$ ſont élevez juſqu'à la 7e puiſſance.

1re puiſſance.	2e puiſſance.	3e puiſſance.	4e puiſſance.	5e puiſſance.	6e puiſſance.	7e puiſſance.	
1	1	1	1	1	1	1	
2	4	8	16	32	64	128	&c.
3	9	27	81	243	729	2187	
4	16	64	256	1024	4096	16384	&c.

VI. Pour extraire les diverſes racines des fractions, cherchez par le chap. 6. les diverſes racines, tant du numerateur que du denominateur, & vous aurez le requis.

EXEMPLE.

La racine quarrée de $\frac{4}{64}$ eſt $\frac{2}{8}$ parce que 2 eſt la racine quarrée de 4 & 8, eſt la racine quarrée de 64.

Pareillement la racine cubique de $\frac{64}{125}$ eſt $\frac{4}{5}$ parce que 4 eſt la racine cubique de 64, & 5 eſt la racine cubique de 125.

VII. Pour approcher autant que l'on voudra de la juſte valeur des racines ſourdes.

1. Il faut extraire la racine du nombre propoſé, & poſer le reſtant ſur un trait.

2. Se propoſer de combien on veut en approcher. Par exemple que ce qui manquera de la racine exacte,

ſoit moindre que $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}$ ou $\frac{1}{1000}$, &c.

3. Adjoûtez aux chiffres reſtantes autant de tranches de zeros que vous en aurez conté dans la fraction de laquelle vous voulez le plus aprocher, ſavoir, pour 100, deux tranches de zeros, pour 1000, trois tranches & ce ſuivant la racine que vous voulez extraire à ce quarré 2 zeros à chaque tranche, au cube 3 &c.

4. Continuez l'operation ſur ces tranches pour chercher le reſte de la racine propoſée & vous aurez une racine approchante.

Exemple.

Approcher de la racine quarrée de 20, en ſorte que ce qui lui manquera ſoit moindre que ſa 100 partie.

Premierement j'extrais la racine la plus proche de 20 qui ſe trouve 4, & 4 de reſte.

Secondement comme je veux aprocher juſqu'à une centiéme, & que 100 contient 2 zeros j'ajoûte ſuivant la Regle 3e deux tranches de deux zeros à 4, & je trouve 40000 que je diviſe par tranches pour continuer l'operation comme elle eſt ici.

(1
x
88 (9
* 8 * * (1
Extraire la racine 2e de xø|øø|øø|447

xß 8* 87 100 racine approchée.
8

CHAPITRE XI.

Des fractions de fractions.

I. POur reduire une fraction de fraction à une fraction ſimple.

Multipliez tous les numerateurs de la fraction donnée d'une part, & tous les denominateurs d'une autre part, chaque produit posé en son lieu donnera la reduction.

EXEMPLE.

Pour reduire le $\frac{1}{7}$ de $\frac{1}{4}$ de $\frac{6}{7}$ à une seule fraction, je multiplie tous les numerateurs 1, 3, & 6, & le produit 18, je le pose pour numerateur ; je fais de même des denominateurs 3, 4, 7 & le produit 84, je le pose pour denominateur ce qui donne pour fraction simple $\frac{18}{84}$.

II. Le premier article supposé, il sera facile d'adjoûter, soustraire, multiplier, & generalement faire toutes sortes d'operations sur les fractions de fractiõs: car les fractions de fractions étant reduites à une simple, vous opererez suivant les Regles du chaptre 10e & neuviéme. Si l'on souhaite une plus ample explication & pratique, voyez nôtre Arithmetique au traité des fractions.

Je ne dis rien ici des fractions decimales pour ne pas être trop long dans cet abregé : ainsi voyez l'Arithmetique sur ce sujet.

CHAPITRE XII.

Des Regles de reduction.

DEFINITIONS.

I. On appelle ici reductions certaines operations qui changent certaines especes de plus grande ou plus petite valeur en d'autres. Par exemple des écus en livres, des livres en sols, des sols en deniers, &c.

Ces sortes de reductions peuvent être innombrables selon les diverses choses ausquelles on peut les appliquer ; mais elles regardent particulierement les mesures des choses necessaires à la vie que nous reduirons à six genres ; les monnoyes, les poids, les mesures,

du temps & du moûvement, les meſures des grandeurs, les meſures des corps fluides & liquides, & celles des corps ſecs.

Les monnoyes ſont differentes ſelon les divers païs ou Royaumes, celles de France ſont principalement les Loüis d'or ou Piſtoles, les écus & ſes diverſes parties. Les plus communes meſures des monnoyes ſont la livre, le ſol & le denier. Il y en a encore de moindres, comme l'obole, la maille, la pite, le piquet, &c. mais comme elles n'ont rien de precifément fixe, nous n'en ferons aucune mention. Le denier eſt la monnoye la plus reglée, & il en faut 12 pour faire un ſol; il faut 20 ſols pour faire une livre. Et ces trois eſpeces ne ſouffrent gueres de changement: mais toutes les autres changent de valeur ſelon la volonté du Prince, comme les écus & les Loüis-d'or. Ordinairement les écus valent trois livres, les piſtoles dix livres. Les Loüis-d'or changent de valeur, & les livres ſols & deniers & piſtoles ne ſubſiſtent plus dans cette valeur que dans le calcul, & n'ont point dans leur eſpeces: car nous n'avons point de monnoye de vingt ſols, ni de piſtoles de dix livres. On deſigne les deniers par ce ſigne ₰, les ſols par celui-ci ₰, & les livres par cette figure ℔ qui eſt un l jointe à un b.

Les eſpeces de poids ſont les ſuivans, le quintal peze 100 livres, la livre peſe deux marcs, le marc 8 onces, & l'once a diverſes meſures, elle peſe 8 gros, 16 eſteleins, 24 deniers 41 oboles, 82 felins & 576 grains. En Medecine les meſures ſont differentes, le plus petit poid eſt un grain d'orge, bien nourri, mediocrement gros, & qui n'eſt pas trop ſec; 10 de ces grains font une obole ou demi ſcrupule; le ſcrupule eſt compoſé de deux oboles ou 20 grains; la dragme de trois ſcrupules ou 60 grains; l'once de 8 dragmes, & la livre medicinale de 12 onces, qui ont chacune leurs notes & caracteres particuliers en medecine.

Si nous rappellons ce que nous avons dit dans nôtre Traité de Chronologie dans la premiere Partie de ce Tome, nous aurons la meſure des temps; j'y renvois le Lecteur.

Les meſures des grandeurs comprennent les lieües, pas, toiſes, perches, pieds, pouces, lignes, points. Les lieües ſont differentes en differens païs. La lieüe commune eſt de 3000. pas Geometriques. Le pas Geometrique de 5 pieds, & le pas commun de deux pieds & demi. La Toiſe royale eſt de 6 pieds, & celle des ouvriers en certains païs eſt de 7 pieds & demi. La perche eſt de 10 pieds ou 4 pas communs. Le pied eſt compoſé de 12 pouces, le pouce de douze lignes, la ligne de quatre points ou même de douze, ce qui eſt aſſez arbitraire. La ligne a été priſe ſur la largeur d'un grain d'orge ou d'un grain de froment, ſelon l'opinion de pluſieurs. Le pied eſt la meſure fixe qui regle toutes les autres; il eſt cependant different en divers lieux.

Les étoffes de laine, ſoye, filet, &c. ſe meſurent à l'aune ou au pan ou à la verge, &c. comme elles ſont differentes ſelon les lieux, il faut s'en inſtruire pour ſavoir leur meſure juſte par raport au pied qui eſt une meſure fixe.

Les ares, cercles & angles ſe meſurent par degrez, minutes, &c. comme nous l'avons expliqué au chapitre des angles, Partie premiere.

La pluſpart des corps ſecs de petit volume, comme les grains & autres choſes ſemblables ſe meſurent par bichet, boiſſeau, coupe, minot, ânée, &c. Ces meſures ſont differentes ſelon les païs. Il faut s'en propoſer une fixe ſur laquelle on puiſſe meſurer toute les autres. Par exemple reduire la meſure comme le boiſſeau ou le minot en pieds cubes ou en pouces cubes, & reduire toutes les autres à celle-là.

Les liqueurs ont auſſi leurs meſures de different noms, on les meſure par verres, ſeptiers, chopines, pots, pintes, ânées, tonneaux, muids, &c. il faut determiner la meſure du verre à tant de pouces cubiques & en ſuite toutes les autres meſures par rapport à celle-là.

II. Nous appellerons *reduction en plus* celles qui changent de grandes eſpeces en moindres. Par exem-

ple des écus en livres : & les reductions qui changent les moindres eſpeces en de plus grandes ſeront appellées *reduction en moins*. La raiſon que nous avons eu de leur donner ces noms, c'eſt que dans la reduction en plus le nombre augmente, & dans la reduction en moins le nombre diminüe. Ainſi quand on reduit les ſols en livres, la réduction eſt en moins, parce qu'il s'y trouve moins de livres que de ſols ; & lorſque les ſols ſont reduits en deniers, la reduction ſe fait en plus : car il s'y trouve beaucoup plus de deniers que de ſols.

Regles generales des reductions.

III. Examinez premierement ſi la reduction ſe doit faire en plus ou en moins, & ſi elles ſont de même genre, comme les eſpeces de monnoyes, les eſpeces de poids, &c.

Secondement ſi la reduction ſe doit faire en plus, multipliez le nombre des eſpeces que l'on veut reduire par le denominateur de celles en qui vous les voulez reduire, & le produit ſera le requis.

3° Si la reduction eſt en moins, il faut diviſer le nombre des eſpeces que l'on veut reduire par le denominateur de celles auſquelles l'on veut les reduire, & le quotient ſera le requis.

Exemples.

On demande de reduire en livres 55 loüis d'or, de 14 livres.

Comme la reduction des loüis d'or en livres ſe fait de moins en plus, & que le denominateur donné eſt 14, je multiplie 55 par 14, le produit qui eſt 770, eſt le requis de la reduction, ainſi 55 loüis d'or de 14 liv. valent 770 liv.

On demande combien il y a de minutes d'heures en une année.

Premierement je reduis les jours de l'année qui ſont 365, en heures multipliant 365 par 24 qui eſt le de-

nominateur des heures & le produit 11760, je le multiplie par le denominateur des minutes qui est 60 le produit donne 705600 minutes pour les 365 jours : mais comme nous avons remarqué cy-devant que l'année est de 365 jours 5 heures 49 minutes. Pour resoudre la question exactement, je multiplie encore les cinq heures de plus par 60 dont le produit est 300; ainsi adjoûtant d'une part 300 minutes pour les cinq heures, & 49 minutes qu'il y a de plus, la somme de 705600, plus 300, plus 49 qui est 705949 est le nombre des minutes qu'il y a en un an.

On demande de reduire en lieües 120000 pas geometriques ; la reduction se fait en moins, & par consequent il faut diviser 120000 pas geometriques par 1000 qui est le denominateur des pas pour une lieüe, le quotient 40 sera le requis.

Diviser ~~120000~~ (40 lieües.

par ~~30000~~
~~12000~~
1200

On demande de reduire en loüis de 14 livres la somme de 34565 livres; je divise le nombre 34565 par 14 le quotient sera 2468 loüis d'or & 13 livres de surplus.

Quelques Regles particulieres de reduction.

IV. Pour abreger les operations des reductions, on a accoûtumé dans celles qui sont le plus en usage de suivre les Regles cy-bas.

1. Pour reduire les livres en sols, on adjoûte un zero au nombre des livres donné, & on double le nombre qui en resulte.

EXEMPLE.

On veut reduire 245 livres en sols, j'adjoûte zero

à 245 ce qui donne 2450, qui étant doublé on a 4900 sols pour la resolution qu'on demande.

2. Pour reduire les livres en deniers, le plus court est de multiplier le nombre des livres par le denominateur 240 qui est ce qu'une livre contient de deniers cependant on suit ordinairement cette pratique; ajoûtez zero au nombre donné & doublez le nombre qui en provient; doublez derechef le produit qui en resulte, & posez ce même nombre une fois en avançant d'un chiffre, la somme de ces deux derniers est requis.

EXEMPLE.

Reduire 35 livres en deniers, j'adjoûte zero à 35, qui donne 350, qui étant doublé donne 700 que je double encore ce sont 1400 au dessous duquel je pose 700, avançant d'un chiffre: j'adjoûte ensemble 1400 & 7000 ce qui donne 8400 deniers.

3. Pour reduire les sols en livres, on retranche le chiffre des unitez qui reste pour des sols surnumeraires. Le nombre qui reste on en prend la moitié en divisant par 2, & le quotient est le requis des livres, si la division est exacte: mais si la division a un reste qui ne peut être que l'unité, on le prend pour 10. & on l'adjoûte aux sols qui ont été retranchez dans la colonne des unitez.

EXEMPLE.

Reduire 2456 sols en livres, retranchez le premier chiffre 6 en cette maniere 245|6 & le 6 sera pour les sols restans: Prenez la moitié de 245 vous aurez 122 & l'unité qui reste étant prise pour 10 sols & ajoûtée à 6 vous aurez 122 livres 16 sols pour vôtre reduction.

4. Pour reduire les sols en deniers, il faut doubler le nombre des sols & le poser une fois en avançant d'un chiffre, la somme sera le requis.

EXEMPLE.

EXEMPLE.

Je veux reduire 35 ſols en deniers ; je double 35 ; & e produit eſt 70, auquel j'adjoûte 35 ; en avançant l'un chiffre ; & la ſomme de 70 plus de 310, donne 420 ſols pour la reduction.

5. Pour reduire les deniers en ſols, on prend le tiers n diviſant le nombre donné par 3 ; en ſuite on prend e quart du quotient en le diviſant par 4 ; & le ſecond uotient eſt le requis.

EXEMPLE.

240 deniers combien font-ils de ſols ; le tier de 240 t 80, le quart de 80 eſt 20 ſols pour 240 deniers.

I. Pour reduire les deniers en livres ; on prẽd le $\frac{1}{4}$ du $\frac{1}{3}$, u ce qui eſt le même le $\frac{1}{12}$ du $\frac{1}{4}$ & le nombre qui en rovient étant des ſols, on les reduit en livres par la 3e egle de cet Article, ce qui n'a pas beſoin d'autre explication.

DEFINITIONS.

V. On appelle ici Addition des reductions celles ui ſe font pour trouver la ſomme de differentes eſpeces d'un même genre, en reduiſant celles de moindre aleur à celles qui valent plus. Par exemple l'Addition es livres ſols & deniers, celles des jours, heures & inutes, &c. c'eſt ce qu'on appelle Addition compoée : en voici les Regles generales.

1. Rangez chaque eſpece de même valeur en une même colonne, poſant à main droite celles de moinre valeur ; & à main gauche celles de plus grande valeur.

2. Commencez à adjoûter celles de moindre valeur, & reduiſez-en le nombre aux eſpeces ſuivantes, par les Regles generales ou particulieres de la reduction, poſant le reſte au bas de la colonne, & adjoû-

tant les especes reduites à la colonne suivante.

3. Parcourez chaque colonne de la même maniere, & posez le nombre qui provient de la derniere colonne sans aucune reduction, & vous trouverez la somme de vos especes reduites.

EXEMPLES.

On demande la somme des especes suivantes.

24 £	— 18 ß	— 4 ₰
198	— 00	— 11 ₰
542	— 14	— 0 ₰
766 £	— 13 ß	— 3 ₰

Premierement elles doivent être rangées comme vous le voyez dans l'exemple proposé : car les deniers sont en même colonne, & à droite, les sols en suite, & les livres les plus avancées, comme de plus grande valeur.

Secondement, je commence à adjoûter par les deniers, trouvant dans leur colonne 15 deniers, que je reduis à 1 sol & 3 deniers ; je pose les 3 deniers & retiens le sol pour la colonne suivante, dans laquelle je trouve 32 sols, & lui adjoûtant le sol que j'ay retenu, ce sont 33 sols que je reduis en livres, & c'est 1 livre 13 sols ; Je pose les 13 sols dans la colonne des sols, & retiens la livre, que j'adjoûte aux nombres des livres, dont la somme jointe avec celle que j'ay retenuë fait 276 livres ; & le tout 776 livres 13 sols 3 deniers, comme il est representé cy-dessus.

On demande combien font ensemble les especes suivantes.

3 ans	15 jours	8 heures	17 minutes.
48	65	17	50
25	140	19	53
40	35	14	48
××6	×57	80	×68
116	157	12	48

J'adjoûte enſemble les minutes dont la ſomme eſt 68 minutes que je reduits en heures par l'Article 3. & ſe trouve 2 heures & 48 minutes, je poſe au deſſous 48 minutes; & retiens les deux heures, que j'adjoûte avec la colonne des heures, où je trouve 60 heures, que je reduis en jours, & je trouve deux jours & 12 heures; je poſe au deſſous les 12 heures, & retiens les jours. Je continuë, adjoûtant ces deux jours avec eux qui ſe trouvent dans la colonne de jours où je trouve 257 jours, que je poſe au deſſous, dans l'une & autre ligne, parce que 257 jours ne ſuffiſent pas pour être reduits en années. Enfin j'adjoûte les années, & je trouve 116 années, 257 jours, 12 heures, 48 minutes.

Il eſt facile d'appliquer ces Regles en toutes ſortes de mesures & d'eſpeces.

VI. Pour ce qui eſt de la Souſtraction avec reduction, voici les Regles.

1. Rangez chaque eſpece de même valeur les unes ſur les autres, comme dans l'Addition.

2. Retranchez chaque eſpece de même valeur, de celle qui lui répond au deſſus.

3. Et ſi une eſpece n'eſt pas ſuffiſante, empruntez ſur la plus proche une unité, que vous reduirez à la denomination de la moindre. Obſervez enfin les Regles generales de la Souſtraction, & vous aurez ſatisfait à la propoſition.

EXEMPLES.

de	4562 ℔	18 ℔	5 ß
Souſtraire	425 —	19 —	8 ß
Reſtant	4136 —	18 —	9 ß

Je dis 8 deniers de 5 ne peut, j'emprunte un ſol qui vaut 12 deniers, qui avec les 5 ſont 17 deniers; ôtant donc 8 ß de 17, il reſte 9 ß que je poſe à la colonne des deniers. Je viens en ſuite à la colonne des ſols, & dis 19 ℔ de 17 (puiſque j'en ay ôté un ſol) ne peut; j'emprunte une livre qui vaut 20 ℔ qui avec les 17 ℔ font trente-ſept ſols, deſquels je ſouſtrais 19 ℔ & il me reſte 18 ℔ que je poſe au rang des ſols. Enſuite je viens aux livres, diſant 5 de 1 ne peut, j'emprunte une dixaine qui avec 1 font 11; 5 de 11 reſte 6; 2 de 5 reſte 3; 4 de 5 reſte 1, rien de 4 reſte 4, ainſi le reſtant eſt 4136 ℔ 18 ℔ 9 ß comme il eſt cy-devant repreſenté.

DEFINITIONS.

VII. Lorſque pluſieurs eſpeces de diverſes valeurs ſe multiplient l'une l'autre, & que l'on reduit en moins toutes celles qui font un plus grand nombre, cette operation peut être apellée multiplication avec reduction, comme par exemple ſi on multiplioit 4 toiſes, 5 pieds 9 pouces, par 8 toiſes 3 pieds, 10 pouces, pour ſavoir quel en ſeroit le produit. Mais cette operation ſe fait en deux manieres, car ou l'on multiplie les eſpeces d'un même genre, par exemple des toiſes, pieds, pouces, par des toiſes, pieds & pouces: ou l'on multiplie ſeulement les nombres des eſpeces d'un autre genre, comme ſi l'on demandoit combien 25 balots de marchandiſes à 18 ℔ 15 ℔ 6 ß le balot, coûteroient, ou bien ce que peſeroient 65 bales qui peſeroient chacune 35 marcs, 7 onces, 6 drachmes.

Regles pour multiplier des eſpeces d'un genre par les eſpeces d'un autre genre.

1. Multipliez le nombre donné pour multiplicande par chacune des eſpeces données du multiplicateur, commençant par les eſpeces de moindre valeur, & de plus grand nombre.

2. Reduiſez chacun des produits à l'eſpece qui la suit immediatement.

3. Adjoûtez tous vos produits, & la ſomme ſera le produit requis.

Exemples.

Combien coutent 25 balots de marchandiſes à 18 ℔ 15 ♁ 6 ß.

Je poſe le multiplicande & le multiplicateur, comme vous le voyez ici repreſenté.

Combien 25 Balots
à 18 ℔ 15 ♁ 6 ß

Multipliez 25 par 6 ß — 150 ß

Reduiſez 150 ß en ſols

Le tiers 50

Le ÷ du + 12 ♁ 6 ß

Multipliez 25 Par 15

125
25
375

Adjoûtez 12 ♁
387 ♁

Reduiſez 387 ♁ en livres 19 ℔ 7 ♁

Multipliez 25
Par 18

200
25

Adjoûtez 19 ℔ 7 ₰ 6 ₰

469 ℔ 7 ₰ 6 ₰

En ſuite je multiplie le nombre des Balots 25 par 6 ; le produit donne 150 ₰, & la reduction 12 ₰ 6 ₰. fais le même des ſols multiplians le nombre des Balo 25. par 15 ₰, le produit ſe trouve 375 ſols auſquels j' joûte les 12 ₰ de la premiere reduction ; Et la ſomm 387 ₰ je la reduits en liv. ce qui donne 19 ℔ 7 ₰, c fin je multiplie encore le nombre des Balots 25 p 18 ℔ & aux produits j'adjoûte les 19 ℔ 7 ₰ 6 ₰ q j'ay trouvé dans les premieres operations ; l'Additio donne 469 ℔ 7 ₰ 6 ₰ pour reſolution de la que tion.

REGLES abregées pour les ſols & deniers.

L'uſage a introduit certaines Regles dont on ſe pour abreger les operations precedentes, ainſi multiplie & reduit en même temps les eſpeces ; n pour les ſavoir, il faut connoître les parties aliquot aliquantes de la livre & du ſol.

Parties aliquotes de la livre.

La $\frac{1}{2}$ d'une livre qui eſt —— 10 ₰
Le $\frac{1}{4}$ qui eſt —— 5 ₰
Le $\frac{1}{5}$ qui eſt —— 4 ₰
Le $\frac{1}{10}$ qui eſt —— 2 ₰
Le $\frac{1}{20}$ qui eſt —— 1 ₰

Parties aliquantes de la livre.

Les $\frac{1}{10}$ qui ſont ——— 3 ₶
Les $\frac{1}{10}$ qui ſont ——— 6 ₶
Les $\frac{1}{20}$ ou le $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{10}$ ——— 7 ₶
Les $\frac{1}{5}$ ——— 8 ₶
Les $\frac{2}{10}$ ou le $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ ——— 9 ₶
Les $\frac{11}{10}$ ou le $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{10}$ ou le $\frac{1}{4}$ le $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{10}$ 11 ₶
Les $\frac{1}{4}$ ——— 12 ₶
Le $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ ——— 13 ₶
La $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ ——— 14 ₶
Les $\frac{1}{4}$ ——— 15 ₶
Les $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{10}$ ou les $\frac{16}{20}$ ou les $\frac{4}{5}$ ——— 16 ₶
Les $\frac{17}{20}$ ou la $\frac{1}{2}$ le $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{10}$ ——— 17 ₶
Les $\frac{9}{10}$ ou les $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{10}$ ——— 18 ₶
Les $\frac{19}{20}$ ou les $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ ——— 19 ₶

Pratique.

Pour multiplier par ſols, il faut prendre du multiplicande la partie aliquote qui repond au nombre des ols qui doit être le multiplicateur.

Exemples.

Pour 15 ₶ je cherche dans la Table & je trouve que s $\frac{1}{4}$ repondent à 15 ₶ & par conſeqent il faut prendre les $\frac{1}{4}$ du mutiplicande qui donnera des livres, & le eſtant demeurera en ſols. Ainſi pour ſavoir eombien 228 coupes de bleds couteront à 15 ₶, je prens les de 1228 qui ſe trouvent 921 ℔ au juſte. Pareillement, ſi on demande combien couteront 465 pots de vin à 3 ₶ le pot. Je cherche dans la Table quelle artie aliquote repond à 3 ₶, & il ſe trouve $\frac{1}{20}$, de ſorte qu'il faut prendre les $\frac{1}{20}$ de 465, & vous aurez 69 ℔ 5 ₶ pour la ſolution de la demande.

Mais pour plus grande facilité à trouver ces Parties liquotes, voici les regles qu'il faut tenir.

Pour la moitié, commencez par le dernier chiffre,

en le partageant en 2, & s'il reſte quelques unitez, elles vaudront autant de dixaines pour le chiffre ſuivant. Par exemple, pour prendre la moitié de 4632, je dis la moitié de 4 c'eſt 2 que je poſe au deſſous, la moitié de 6 c'eſt 3, que je poſe deſſous, la moitié de 3 c'eſt 1 & reſte une dixaine, qui jointe avec le 2 de la premiere colonne fait 12; ainſi diſant la moitié de 12 c'eſt 6, le nombre de 2316 eſt la moitié du propoſé.

	4632
La moitié	2316

Vous ferez le même pour le $\frac{1}{3}$ le $\frac{1}{4}$ le $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$ ou toute autre qui aura pour denominateur un chiffre ſimple. Par exemple le $\frac{1}{3}$ du nombre 1467. le dis le cinquiéme de 14 eſt 2 & reſte 4, le cinquiéme de 46 eſt 9 & reſte 1; le cinquiéme de 6 eſt 1 reſte 1, le cinquiéme de 17 eſt 3 & 2 qui reſte qui font $\frac{2}{5}$ il en eſt de même de tout autre nombre.

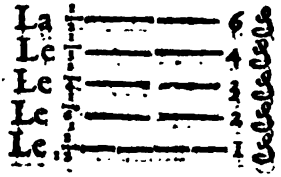
Pour le $\frac{1}{10}$ on coupe un chiffre ſeulement de la colonne des unitez & le chiffre retranché eſt le numerateur de la fraction de 10. Par exemple, le $\frac{1}{10}$ de 2563 eſt $256\frac{3}{10}$.

Pour le $\frac{1}{11}$ on prend la moitié du $\frac{1}{10}$.

Pour les $\frac{1}{7}$ on prend la moitié & la moitié de la moitié enſemble.

Pour le $\frac{1}{12}$ on prend le $\frac{1}{3}$ & le $\frac{1}{4}$ du tiers, ou, ce qui eſt le même, on prend le $\frac{1}{4}$ & le $\frac{1}{3}$ du quart.

Parties aliquotes du ſol.



Parties aliquantes du ſol.

Les $\frac{1}{11}$ ou le $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{7}$ ——— 5 ſ
Les $\frac{2}{11}$ ou le $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{4}$ ——— 7
Les $\frac{2}{3}$ ——— 8
Les $\frac{3}{4}$ ——— 9
Les $\frac{5}{6}$ ou la $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{7}$ ——— 10 ſ
Les $\frac{1}{11}$ ou la moitié, le $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{6}$ — 11 ſ

La pratique de ces Parties aliquotes eſt la même que cy-devant, & le reſultat devient des ſols. Exemple, combien 8216 fagots à 7 ſ le fagot, je prens pour 7 ſ le $\frac{1}{7}$ & le $\frac{1}{4}$ de 8216 ſuivant la table, & la ſolution ſe trouve être 4792 ℔ 8 ſ qui reduits en livres ſont 239 ℒ 12 ℔ 8 ſ, ceux qui voudront d'autres exemples & en d'autres genres, en trouveront en nôtre Arithmetique.

REGLES pour multiplier & reduire les eſpeces d'un même genre.

Nous remarquerons que toutes ſortes d'eſpeces de different genre peuvent être multipliées au ſens que nous venons de dire, ce qui eſt plûtôt multiplier les nombres de divers genres de choſes, que de multiplier les eſpeces de l'une par les eſpeces de l'autre: Mais quand il s'agit de multiplier une eſpece par une autre de même genre, à proprement parler cela ne ſe peut en tout genre. Par exemple, l'on peut bien multiplier des toiſes par des pieds, des pouces, des lignes & des points; mais on ne peut pas proprement parlant multiplier des livres par des ſols, ni par des deniers; parce qu'il n'y a que les nombres, & la grandeur qui puiſſent exactement ſe multiplier, & beaucoup de choſes qui y ont rapport, comme le mouvement la peſanteur, &c. cependant comme dans les proportions & rapports; on a beſoin de multiplier toutes ſortes de genres, l'un par l'autre; on peut dire en quelque maniere qu'il n'y

a rien qui ne ſoit en ce ſens capable de multiplication. Nous avons donné en nôtre Arithmetique une ample explication de ces divers genres : comme ici je ne pretens donner qu'un abregé, on ſe contentera des regles ſuivantes.

1. Reduiſez les eſpeces de plus grande valeur, toutes à la derniere eſpece qui aura le moins de valeur, tant au multiplicande qu'au multiplicateur.

2. Ces eſpeces reduites, poſez la ſomme de celles du mutiplicande pour multiplicande ; & la ſomme du multiplicateur pour multiplicateur, dont vous chercherez le produit.

3. Le produit trouvé, vous le reduirez en moins, & à l'eſpece qu'il vous plaira par les regles des articles precedens de ce même Chapitre.

EXEMPLE.

On veut multiplier 33 toiſes 4 pieds, 7 pouces, 8 lignes par 12 toiſes 3 pieds 5 pouces 9 lignes.

Premierement je reduits 7 pouces en lignes, multipliant 7 par 12, qui eſt 84 que je poſe ſous les 8 lignes pour en faire une addition. Secondement je reduits les pieds en lignes, multipliant 4 pieds par 144 lignes qui eſt le denominateur des lignes dans un pied. Le produit eſt 576 lignes, que je poſe au lieu de l'addition, ſous les autres lignes. Troiſiémement je reduis 33 toiſes en lignes, multipliant 32 par 864, qui eſt le denominateur des lignes dans une toiſe, le produit donne 28512 lignes que je poſe au lieu de l'addition avec les autres ; de ſorte que l'addition faite, il ſe trouve pour le multiplicande 29180 lignes.

Je fais de même au multiplicateur, & je trouve que 12 toiſes 3 pieds 5 pouces 9 lignes ſont 10869 lignes ainſi multipliant 29180 par 10869, je trouve pour le produit 317157420, qui étant diviſé par 746496 lignes quarrées qui compoſent la toiſe quarrée, il y a pour quotient 424 toiſes quarrées 643116 lignes quarrés reſtantes qui étant reduites en pieds qua-

diviſant 643116 par 20736, qui compoſent le pied quarré, il y aura pour quotient 31 pieds quarrez, & 300 lignes quarrées reſtantes; leſquelles encore reduites en pouces quarrez, diviſant le nombre des lignes reſtantes par 144 qui compoſent le pouce quarré, il y aura 2 pouces quarrez & 12 lignes quarrées; ainſi j'ay ſatisfait, & toute ma multiplication ainſi reduite, j'ay trouvé 424 toiſes 31 pieds quarrez 2 pouces quarrez, & 12 lignes quarrées. Voyez d'autres exemples dans l'Arithmetique.

VIII. Nôtre Arithmetique contient pluſieurs pratiques generales & particulieres de diviſer par reduction que l'on pourra voir: Je me contenteray ici de donner ici des Regles plus generales, & quelques exemples pour la diviſion qui repondent aux exemples precedens de la multiplication, ainſi nous diſtinguerons comme dans l'article precedent les divers genres, & les diverſes eſpeces.

REGLES de Diviſion en differens genres.

1. Diviſez le nombre de l'eſpece de plus grande valeur par le multiplicateur propoſé, le quotient donnera le nombre de la plus grande eſpece.

2. Reduiſez le reſtant à la ſeconde eſpece & luy adjoûtez ceux de même eſpece qui ſe trouve dans le dividende propoſé; & la ſomme qui en proviendra ſera diviſée par le nõbre des eſpeces du multiplicateur, & le quotient donnera des eſpeces ſemblables au dividende.

3. Continuez de reduire le reſtant, s'il y en a, aux autres eſpeces qui ſuivent, operant comme à la ſeconde Regle, tant qu'il y aura de diverſes eſpeces, & vous aurez le quotient total.

EXEMPLE.

Ay acheté pluſieurs Balots de marchandiſes, qui m nt coutez 469 ℔ 7 ß 6 ₰, il y en a vingt-cinq,

combien coûte chaque Balot.

Premierement je diviſe 469 ℔ par le nombre des balots 25, le quotient ſe trouve 18 ℔ pour chaque balot : mais comme il reſte de la diviſion encore 19 ℔ je les reduits en ſols, ce qui donne 380 ♂, auſquels j'adjoûte les 7 ♂ qui ſont au dividende propoſé ; & la ſomme 387 je la diviſe par le nombre des balots 25, ce qui donne pour quotient 15 ♂ ; & comme il reſte encore 12 ♂ je les reduits en deniers ; la reduction donne 144 ♃, auſquels j'adjoûte les 6 ♃ du dividende, & la ſomme 150 ♃ qui en provient, je la diviſe par le nombre des balots 25, ce qui donne pour quotient juſte 6 ♃ ; de ſorte que les 25 balots coûtent chacun 18 ℔ 15 ♂ 6 ♃. Cette operation ſert de preuve à la multiplication precedente dans les reductions, comme auſſi cette multiplication eſt une preuve de cette diviſion.

Regles pour diviſer en même genre.

Diviſer des livres, ſols & deniers par livres, ſols & deniers ou toiſes, pieds, pouces, &c. par toiſes, pieds, pouces, &c. c'eſt diviſer par des eſpeces de même genre, dont voici le Regles ; cependant on peut encore ſuivre les mêmes Regles ci-devant, comme nous le donnerons dans l'Exemple ſuivant.

1. Reduiſez vôtre dividende aux eſpeces de la moindre valeur, & le nombre qui en proviendra ſera le dividende.

2. Reduiſez auſſi le diviſeur aux moindres eſpeces, comme nous avons fait dans la multiplication de l'article cy-devant ; & le nombre qui en provient ſera le diviſeur, dont le quotient étant reduit au nombre de la plus grande eſpece & les ſuivantes, on aura ſatisfait à la propoſition.

EXEMPLE.

J'ay acheté plusieurs balots, qui m'ont coûté chacun 18 ℔ 15 ♁ 6 ß, & le tout 469 ℔ 7 ♁ 6 ß ; on demande combien il y avoit de balots, ou ce qui est le même, diviser 469 ℔ 7 ♁ 6 ß par 18 ℔ 15 ♁ 6 ß.

Premierement sans avoir égard ny aux sols ny aux deniers, je divise 469 ℔ par 18 ℔ ; le quotient me donne 25, & il reste 19 ℔, que je reduis en sols, & la reduction me donne 380 ♁, ausquels adjoûtant les 7 ♁ du dividende la somme est 387, dont il faut soustraire 25 fois 15 sols, ou ce qui est le même 375 sols, & le restant se trouve encore 12 ♁ que je reduits en ß & la reduction donne 144, ausquels adjoûtant 6 ß, la somme est 150 ß de qui je soustraits 6 fois 25 ß, ou ce qui est le même 150 ß ; ainsi il ne me reste plus rien, & le nombre 25 est veritablement le nombre des balots. Nôtre Arithmetique rendra raison de ces sortes d'operations.

Mais pour suivre les Regles que nous avons prescrites, il faut reduire 469 ℔ 7 ♁ 6 ß, en deniers, la reduction donnera 112650 ß que pose pour dividende, & reduisant même le diviseur 18 ℔ 15 ♁ 6 ß, la reduction donnera 4506 ß, & la division de 112650 ß par 4506 ß donnera au juste 25, qui est le nombre des balots.

Je ne donne point ici d'autres exemples pour abreger, on ne finiroit jamais ; il faut que l'esprit cherche de luy-même des exemples, & tâche d'appliquer les Regles. Je ne parle point non plus des compositions de puissances avec reduction ny de leurs extractions de racines. Il est facile de les trouver pour peu qu'on fasse usage de tout ce que nous avons dit jusqu'ici, en tout cas voyez l'Arithmetique.

CHAPITRE XIII.

DES REGLES DE PROPORTIONS & de Progreſſions en general.

1. *Pour la proportion & progreſſion Arithmetique:*

1. POur trouver le quatriéme terme d'une propor-tion arithmetique, les trois premiers étant con-nus.

Adjoûtez les deux moyens & de la ſomme ôtez-en le premier terme, & le reſtant ſera le requis.

EXEMPLE.

3, 5, 7, ſont proportionnels arithmetiquement, on demande un quatriéme terme, j'adjoûte 5 & 7 qui ſont les deux moyens, la ſomme eſt 12, de laquelle je ſouſtrais le premier terme 3, & le reſtant 9 eſt le quatriéme proprotionnel, ainſi 3, 5, 7, 9, ſont les quatre proportionnels.

2. Pour trouver le premier terme, il faut operer comme cy-deſſus, conſiderant le premier comme le quatriéme.

3. Pour trouver le troiſiéme terme proportionnel de quatre, les autres étans connus.

Adjoûtez les deux extrêmes, & de la ſomme retranchez-en le ſecond proportionnel, le reſtant ſera requis. Par exemple 3, 5, :, 9, étant donnez, on demande le troiſiéme proportionnel, qui ſoit moyen entre 5. & 9, j'adjoûte les extrêmes 3 & 9 qui ſont 12, dont retranchant le moyen 5, le reſtant 7 eſt le requis. C'eſt la même operation pour trouver le ſecond terme moyen entre quatre proportionnels, adjoûtant les extrêmes, & de la ſomme retranchant le troiſiéme proportionnel.

4. Entre deux termes proportionnels arithmetiquement trouver un moyen proportionnel.

Adjoûtez les deux termes donnez, & de la ſomme prenez-en la moitié qui ſera le requis. Par exemple on demande un moyen proportionnel entre 5 & 9 j'adjoûte 5 & 9 qui ſont 14, dont la moitié 7 eſt le moyen proportionel.

5. Les 2 premiers termes d'une progreſſion étant connus, continüer la progreſſion.

Souſtraiſez le premier terme du ſecond pour en ſavoir la difference, qui étant connüe ſera adjoûtée à chaque terme extrême pour en avoir un nouveau. Par exemple, pour continüer la progreſſion arithmetique 3, 7, je ſouſtrais 3 de 7 & la difference 4, étant adjoûtée au dernier terme 7 la ſomme 11, eſt le 3e terme, lequel ſi vous adjoûtez encore 4, vous aurez 15 pour 4e terme & 19, pour 5e terme, ainſi de ſuitte comme eſt ici repreſenté.

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35.

Mais ſi la progreſſion ſe fait en diminuant, vous ſouſtrairez le ſecond terme du premier pour en connoître la difference que vous ſouſtrairez du ſecond terme, & le reſtant ſera le troiſiéme duquel, ſi vous ſouſtraiſez encore la difference, vous aurez le reſtant pour quatriéme terme, & ainſi de ſuite comme dans cet exemple.

35, 31, 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3.

6. Et pour continuer la Progreſſion, n'ayant que le premier terme de connu, & la difference, il faut adjoûter au premier terme la difference. La ſomme ſera le ſecond terme, auquel adjoûtant encore la difference, on aura le troiſiéme terme, & ainſi de ſuite en croiſſant.

Mais la Progreſſion ſe doit faire en decroiſſant, il faut ſouſtraire la difference connuë du premier terme;

le reſtant ſera le ſecond, duquel retranchant encore la difference, on aura le troiſiéme terme, & ainſi de ſuite.

7. Le premier terme & la difference étant connus, trouver quel terme l'on voudra de la progreſſion.

Multipliez le denominateur du terme qui precede celui propoſé par la difference connüe, le produit ajoûté au premier terme donnera le requis.

Par exemple, on demande le 20 terme d'une progreſſion, dont le premier terme eſt 5 & la difference 4, je multiplie le denominateur 19 qui precede le terme 20e par la difference 4, le produit eſt 76, que j'ajoûte au premier terme 5, & la ſomme 81 eſt le terme que l'on demande.

Si la progreſſion étoit en diminuant, il faudroit ſouſtraire le produit du premier terme, & le reſtant ſeroit le requis. Par exemple l'on demande le 20e d'une progreſſion, dont le premier terme eſt 89 & la difference 4. Je multiplie comme cy-devant la difference par le denominateur 19, dont le produit eſt 76, que je ſouſtrais de 89, & le reſtant eſt 13 qui eſt le terme requis de la progreſſion propoſée.

8. Connoiſſant le premier & dernier terme d'une progreſſion, & le nombre des termes, trouver la difference.

Il faut ſouſtraire le premier terme du dernier & diviſer le reſtant par le denominateur des termes qui precede le dernier, le quotient ſera la difference requiſe.

Par exemple, je veux ſavoir quelle difference regne dans la progreſſion, dont le premier terme eſt 5 & le 20e terme, je ſouſtrais 5 de 81, le reſtant eſt 76 que je diviſe par le denominateur 19; & le quotient eſt la difference requiſe: mais ſi la progreſſion diminuoit, il faudroit ſouſtraire le dernier terme du premier.

9. La difference & les extrêmes connus, trouver le nombre des termes.

Souſtraire le plus petit terme du plus grand &

ez le reſtant par la difference connüe, le quotient ſera e nombre des termes, moins un.

Par exemple 5 eſt le premier terme 81, le dernier erme, 4 la difference. 5 ſouſtrait de 81 donne 76, que e diviſe par la difference 4; & le quotient eſt 19 auuel j'ajoûte 1, & la ſomme 20 eſt le nombre des ternes de la progreſſion.

10. L'un des extrêmes connus, le nombre des ternes, & la difference trouver l'autre extrême.

Par exemple; 81 eſt l'un des extrêmes connus; le ombre des termes eſt 20, & la difference 4; on deande le premier terme.

Je multiplie la difference 4 par le denominateur 19 e produit 76, je le ſouſtrais de 81, & le reſtant 5 eſt le remier terme que l'on demande.

Si la progreſſion diminuoit, il faudroit ajoûter 76 au ernier terme 5 pour avoir le premier 81.

11. Entre deux termes donnez trouver tant de oyens proportionnels arithmetiquement que l'on oudra.

Otez le moindre terme du plus grand, & diviſez le eſtant par la ſomme du denominateur des moyens roportionels plus un, le quotient qui en proviendra ra la defference, qui étant ajoûtée ou ſouſtraite du remier terme & de ceux qui le ſuivent formeront les rmes requis.

Exemple, 5 & 81 ſont les termes donnez; entre leſuels on demande 18 termes qui ſoient moyens proortionels. 5 ſouſtrait de 81 donne 76, qui étant diié par le denominateur des termes moyens, ſavoir 18, lus un qui fait 19, l'expoſant 4 eſt la difference que joûte à 5 pour avoir 9, & à 9 pour avoir 13, & ainſi e ſuite comme vous le voyez.

9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81.

12. La difference connuë, le nombre des termes, & un des extrêmes trouver la ſomme entiere de la proreſſion.

Cherchez par le nombre 10e l'autre extrême, ajoûtez les deux extrêmes ensemble, & la somme multipliez-la par la moitié des termes; le produit sera le requis, ou bien ce qui est le même, multipliés la moitié des extrêmes par le nombre des termes, & le produit sera le requis.

EXEMPLE.

5. est le premier terme d'une progression qui en a 20, & dont la difference est 4; on demande la somme des 20 termes. Premierement je cherche le dernier terme par le nombre 10, & je trouve 81, que j'ajoûte au premier terme 5, la somme est 86, que je multiplie par la moitié des termes 10, & le produit 860, est la somme que l'on demande.

13. Connoissant le premier terme, la somme entiere & la difference trouver le dernier terme, & le nombre des termes.

Vous trouverez le dernier terme par le nombre 7, ajoûtez les deux extrêmes, & divisez par leur somme celle des termes de la progressiō, dont vous doublerez le quotient pour le nombre requis. Par exemple, 5 est le premier terme, 4 la difference 860 la somme des termes; je cherche par le nombre 7e le dernier terme 81, que j'ajoûte à 5, & la somme 86 me sert de diviseur de la somme de 860, dont le quotient 10 étant doublé, la somme 20 est le nombre des termes requis.

14. Trouver chaque terme en connoissant la difference par le nombre des termes, & la somme entiere de la progression.

Divisez la somme totale par la moitié du nombre des termes; du quotient ôtez-en le produit de la difference par le nombre des termes moins 1, & la moitié du restant sera le moindre des extrêmes.

EXEMPLE.

La ſomme d'une progreſſion arithmetique eſt 860, e nombre des termes eſt 20, & la difference 4. Je di-iſe 860 par 10 qui eſt la moitié du nombre des ter-nes, le quotient eſt 86, duquel je ſouſtrais 76 qui eſt e produit de la difference 4 par le nombre des termes noins 1, ſavoir 19, le reſtant eſt 10, dont la moitié 5 ſt le plus petit des extrêmes, qui étant connû avec r difference, il eſt facile de trouver tous les autres par e nombre 7.

REGLES pour les proportions & progreſſions Geometriques.

1° Trouver le quatriéme terme d'une proportion roite, dont les trois premiers termes ſont connus.

Multipliez le ſecond terme par le troiſiéme, & divi-nt le produit par le premier terme, le quotient ſera le uatriéme terme que l'on demande.

EXEMPLE.

3, 6, 8, ſont les trois premiers termes d'une pro-ortion geometrique, droite ; on demande le quatriè-e, je multiplie 6 par 8, & le produit 48, je le divi- par 3 ; 16 eſt le quotient qui eſt le quatriéme ter-e.

Et ſi l'on demandoit le premier terme à trouver nnoiſſant les trois autres ; il faudroit multiplier le cond & troiſiéme par eux-mêmes, & diviſer le pro-uit par le dernier terme, dont le quotient ſera le pre-ier terme. Par exemple 6, 8, 16 ſont les termes con-us, on demande le premier ; je diviſe le produit de 6 ar 8 qui eſt 48, par le quatriéme terme 16, & le quo-ent 3 eſt le terme que je cherche.

2° Que ſi l'on demande le ſecond ou le troiſiéme

terme d'une proportion geometrique les autres étant connus.

Il faut multiplier le premier & dernier terme ensemble, & diviſer le produit par le terme qui eſt connu, le quotient donne le terme inconnu.

EXEMPLE.

3, 8, 16, ſont trois termes d'une proportion geometrique dont le ſecond eſt inconnu. Pour le trouver je multiplie le premier terme 3, par le dernier terme 16, le produit eſt 48, que je diviſe par le troiſiéme terme 8, & le quotient 6, eſt le ſecond terme requis.

Pareillement ſi l'on propoſe les trois termes 3, 6, 16, dont le troiſiéme terme eſt inconnu; je multiplieray le premier terme 3, & le dernier terme 16; le produit 48 étant diviſé par 6, le quotient 8, eſt le terme requis.

3° Si la proportion eſt reciproque pour trouver le quatriéme terme, il faut multiplier le premier terme par le troiſiéme, & le produit étant diviſé par le ſecond le quotient donnera le terme requis.

EXEMPLE.

Les trois termes 6, 3, 8, ſont les termes connus d'une proportion reciproque, dont on demande le quatriéme terme, je multiplie le premier terme 6, par le troiſiéme 8; & le produit 48 étant diviſé par 3, le quotient 16 eſt le quatriéme terme que l'on cherche.

On trouvera le premier terme d'une proportion reciproque en multipliant le ſecond par le dernier, & diviſant le produit par le troiſiéme, ainſi dans l'exemple propoſé de la proportion reciproque 6, 3, 8, je multiplie le ſecond terme 3 par le dernier terme 16; & ſon produit 48 étant diviſé par le troiſ

terme 8, le quotient 6 eſt le premier terme requis.

Mais ſi l'on demande le ſecond terme, il faut multiplier le premier terme par le troiſiéme, & ſon produit étant diviſé par le quatriéme, le quotient eſt le terme requis; de ſorte que multipliant le premier terme 6 de la proportion cy-deſſus, par le troiſiéme 8, le produit 48 étant diviſé par 16, donne 3, qui eſt le terme requis.

Et de même l'on trouvera le troiſiéme terme d'une proportion reciproque, en multipiant le ſecond terme par le quatriéme, & diviſant le produit par le premier terme; 3 multipliant par 16 donne 48, qui étant diviſé par 6 le quotient 8 eſt le terme de la proportion que l'on cherche.

Mais ſi dans la proportion reciproque le premier terme eſt au 3e, ce que le 4e eſt au 2e pour trouver le 1er terme, il faut multiplier les deux premiers & diviſer par le troiſiéme; pour trouver le troiſiéme terme, il faut multiplier les deux premiers & diviſer par le quatriéme; & pour trouver les 2 premiers termes multiplier les deux derniers & diviſer par l'une ou par l'autre des premiers.

4° Les deux premiers termes d'une progreſſion geometrique étant connus trouver un troiſiéme terme.

Multipliez le ſecond par luy-même, & le quarré étant diviſé par le premier terme le quotient ſera le troiſiéme proportionnel.

Exemple.

Les nombres 3 & 6 ſont les deux premiers termes d'une proportion continuë ou progreſſion geometrique; on demande le troiſiéme, je multiplie le ſecond terme 6, par luy-même, & ſon quarré 36, je le diviſe par le premier terme 3, & le quotient 12, eſt le troiſiéme terme que l'on cherche.

5° Si l'on veut continuer la progreſſion geometrique, vous trouverez le quatriéme terme, en multipliant le ſecond terme 6 par le troiſiéme 12, & le produit 72 étant diviſé par le premier terme 3, le quotient 24 eſt le quatriéme terme requis.

Autrement & pour continuer la progreſſion geometrique, connoiſſant les deux premiers termes de la progreſſion, cherchez le denominateur de la raiſon geometrique, en diviſant le ſecond terme par le premier; & le quotient qui en reſulte, multipliant chaque terme extrême d'une progreſſion, le produit ſera un nouveau terme; ainſi diviſant le terme 6 par 3, qui eſt le premier terme de la progreſſion propoſée, l'expoſant 2 ſera le multiplicateur qui donnera chaque nouveau terme: c'eſt pourquoy multipliant le ſecond terme 6 par 2, 12 ſera le troiſiéme terme, & multipliant 12 par 2, 24 ſera le quatriéme & multipliant 24 par 2, 48 en ſera le cinquiéme terme, & ainſi de ſuite, comme il eſt ici marqué.

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768.

6° Connoiſſant le premier & le ſecond terme d'une progreſſion geometrique pour trouver quel terme l'on voudra.

Diviſez le ſecond terme par le premier pour ſavoir le denominateur de la progreſſion: élevez ce denominateur à une puiſſance qui ait autant de degrez, moins deux, qu'il y a d'unitez dans le nombre, qui denomme le terme que l'on demande, & le produit multipliez-le par le ſecond terme, ce nouveau produit reſoudra la queſtion.

EXEMPLES.

Les nombres 3 & 9 ſont les deux premiers terme

d'une progreſſion geometrique,& on demande le cinquiéme terme.

Je diviſe par 3, & l'expoſant 3 eſt le denominateur de la progreſſion que je leve à la troiſiéme puiſſance, puiſque le denominateur 5 du terme 5e a cinq unitez, deſquelles il faut en retrancher 2, le produit qui en reſulte qui eſt 27, je le multiplie par le ſecond terme 9, & le produit 243 eſt le cinquiéme terme que l'on demande.

Mais ſi l'on demande le ſeptiéme terme de la même progreſſion, je multiplieray le denominateur 3 de la progreſſion, juſqu'à la cinquiéme puiſſance, puiſque 7 (denominateur du 7e terme) moins 2 donne 5, le produit donne 243, qui étant multiplié par le ſecond terme 9 le produit 2187 reſoût la queſtion.

7° Pour trouver un ou pluſieurs moyens proportionels entre deux termes donnez, qui ſeront les extrêmes d'une progreſſion geometrique.

Elevez le premier terme propoſé à une puiſſance, qui ait autant de degrez que l'on demande de termes moyens, multipliez le nombre qui en provient par le dernier terme, & du produit tirez-en la racine exprimée par le nombre des termes moins un, qui ſera le ſecond terme de la progreſſion, lequel étant connû vous continuerez la progreſſion ſuivant l'article 5e ci-deſſus.

Exemples.

On demande un moyen proportionnel entre 16 & 25, ainſi comme l'on ne demande qu'un moyen proportionnel, 16, eſt élevé à la premiere puiſſance, je le multiplie par 25, & du produit 400 j'en tire la racine

quarrée ou deuxiéme, parce que n'y ayant que 3 tér mes, le nombre deux exprime les termes moins un, & par conſequent la racine 20 eſt le ſecond terme, ou, le moyen proportionnel que l'on cherchoit.

Que ſi l'on demande cinq termes proportionnels & moyens entre 3, & 2187 ; j'éleve le premier terme 3 à la cinquiéme puiſſance exprimée par le nombre des termes moyens que l'on demande, & le produit 531441, donnera 9 pour ſa racine ſixiéme exprimée par le nombre des termes moins un, & par là j'ay trouvé le ſecond de la progreſſion, dont le denominateur 3 étant comme je trouve par l'article 5 les 7 termes de la progreſſion en cette ſorte.

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187.

8° Si l'on veut ſavoir la ſomme entiere d'une progreſſion connoiſſant le premier & dernier terme & le nombre des moyens retranchez du ſecond terme, que vous trouverez par l'article precedent, le premier & la difference conſiderez-la comme le premier terme d'une proportion geometrique, le premier terme de la progreſſion comme le ſecond terme de cette nouvelle proportion, & la difference du dernier terme au premier comme le troiſiéme terme, dont vous connoîtrez le quatriéme par l'article premier, vous luy adjoûterez le dernier terme, & la ſomme ſera la ſomme totale de toute la progreſſion.

EXEMPLE.

L'on demande la ſomme totale de la progreſſion ci devant. 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, & l'on ſuppoſe que l'on ſache ſeulement le premier & dernier terme 3, & 2187, & le nombre des moyens qui ſont cinq.

Premierement je cherche par l'article precedent

ſecond terme 9 ; duquel je retranche le premier terme 3, & la difference 6, je la place au premier lieu d'une proportion, & le premier terme 3, au ſecond lieu, & la difference du premier terme au dernier, qui eſt 2184, je la poſe au troiſiéme lieu. Ainſi multipliant 2184, par le ſecond terme 3, le produit ſe trouve 6552, qui étant diviſé par le premier terme 6, l'expoſant 1092 eſt le quatriéme terme requis, auquel j'adjoûte le dernier terme 2187, & la ſomme totale 3279, eſt la ſomme requiſe.

PROGRESSION Geometrique.

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187.

6, 3, : 2184. 1092
2187.

Somme totale de la 3279 progreſſion.

9° Si la progreſſion ſe fait en diminuant, & non pas en croiſſant comme dans tous les exemples cy-deſſus. Les 1, 2, 3, & 4 articles ſont tous les mêmes : mais pour continuer une progreſſion qui diminüe par le moyen du denominateur de la progreſſion, il faut diviſer le premier terme par le ſecond, & le quotient ſera le denominateur qui ſervira de diviſeur à chaque terme extrême, & le quotient ſera un nouveau terme de la diviſion.

EXEMPLE.

Les deux termes 16 & 8, ſont les 2 premiers termes d'une progreſſion qui diminuë, & l'on demande les autres termes à l'infini. Je diviſe le premier terme 16 par 8, le quotient eſt 2 qui eſt le denominateur de la

progreſſion, par lequel je diviſe l'extrême 8, & l'expoſant 4, eſt le troiſiéme terme ; je diviſe de la même maniere 4 par 2, & l'expoſant 2 eſt le quatriéme terme ; je diviſe 2 par 2 & 1, eſt le cinquiéme terme, qui étant encore diviſé par 2 donnera $\frac{1}{2}$ pour le ſixiéme, $\frac{1}{4}$ pour le ſeptiéme, & ainſi juſqu'à l'infini.

16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$.

10° Si la progreſſion diminuë & que connoiſſant le premier & le ſecond terme, & par conſequent le denominateur, on demande quel terme l'on voudra.

Elevez comme au 6e article le denominateur de la progreſſion à la puiſſance exprimée par le nombre moins 2 qui denomme le terme que l'on demande, & diviſant le ſecond terme de la progreſſion par cette puiſſance trouvée, le quotient ſera le requis.

EXEMPLE.

Pour trouver le 7e terme de la progreſſion dont les deux premiers termes ſont 64 & 32.

Ayant diviſé le premier terme 64 par le ſecond terme 32, le quotient qui en provient, eſt 2 pour le denominateur de la progreſſion, que j'éleve au degré 5 puiſque le nõbre qui exprime le 7e terme moins 2 eſt 5 ; je trouve que cette puiſſance eſt 32, je diviſe donc le ſecond terme 32, par la cinquiéme puiſſance de 2 qui eſt auſſi 32, & le quotient 1, eſt le ſeptiéme terme de la progreſſion, comme vous le voyez ici.

64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.

11° Et pour trouver des termes moyens entre deux termes donnez, lorſque la progreſſion diminuë. Vous obſeruerez les mêmes Regles de l'article 7.

EXEMPLE.

L'on demande trois termes proportionels entre 16 & 1. Je leve 16, à la troiſiéme puiſſance, & je trouve 4096, que je multiplie par le dernier terme 1 ; & le produit 4096 donne 8 pour la racine quatriéme, qui eſt le ſecond terme de la progreſſion que l'on demande.

Mais il ſera plus commode de lever le dernier terme 1 à la troiſiéme puiſſance denommée par le nombre des termes moyens, & multipliant le premier terme 16 par 1, & du produit 16, tirant la racine quatriéme, vous aurez 2 pour le quatriéme terme, qui étant pris pour le ſecond d'une progreſſion qui augmente, vous trouverez facilement tous les termes moyens par l'article 4.

12° La ſomme d'une progreſſion qui diminuë ſe trouvera en cette ſorte pourveu que l'on ſache le ſecond terme & les extrêmes.

On mettra au premier lieu d'une nouvelle proportion, la difference du premier terme au ſecond, & le ſecond terme de la progreſſion au ſecond terme de la nouvelle proportion, & la difference, du premier terme au dernier, dans le troiſiéme lieu de la proportion; & le quatriéme terme étant trouvé par le premier article, on luy adjoûtera le premier terme dont la ſomme ſera la ſomme que l'on demandoit.

EXEMPLE.

Pour trouver la ſomme totale des termes de la progreſſion, dont le premier terme eſt 2187, le ſecond 729, & le dernier terme 3. Je prens la difference de 2187 à 729, qui eſt 1458, que je poſe pour le premier terme proportionnel ; & en ſuite 729 pour le ſecond terme, & la difference de 3 à 2187, qui eſt 2184, pour le troiſiéme terme.

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3.

Nouvelle Proportion.

1458, 729, : 2184, 1092.

Et le quatriéme terme qui provient de cette proportion eſt 1092, qui contient la ſomme de tous les termes moins le premier, de ſorte que luy adjoûtant le premier terme 2187, la ſomme totale 3279 eſt la requiſe.

13° Et ſi les deux extrêmes ſont ſeulement connus, & le penultiéme, l'on conſiderera ce penultiéme comme le ſecond terme d'une progreſſion qui croit ou décroit, & les articles precedens donneront les autres termes, ce qui n'a pas beſoin d'exemples.

14° Mais ſi l'on ne connoît que les deux extrêmes, & le nombre des termes, il faut chercher le ſecond terme par l'article ſeptiéme, & ſuivre les Regles des articles precedens, lorſque ce terme ſera connu, ce qui n'a pas non plus beſoin d'exemples.

CHAPITRE XIV.

Regles de proportion en particulier.

Il y a certaines Regles de proportion à qui on a donné des noms particuliers, qui ſuivent cependant les Regles generales que nous avons données dans le Chapitre precedent; de ſorte qu'elles ne ſont à proprement parler que des applications à diverſes queſtions, des regles generales que nous avons données. Ces Regles ſont la Regle de trois tant directe qu'indirecte, la Regle de cinq ou Regle de trois double, tant directe qu'indirecte, la Regle conjointe, ou de compoſition, les Regles de Societé ou de Compagnies, les Regles d'alliage, d'intereſts, de fauſſes poſitions, & une infinité d'autres, qu'il ſera facile de trouver en ſachant celles que nous donnons ici. Nôtre Arithmetique inſtruit à fond de toutes ces differentes operations.

DEFINITIONS.

Nous appellerons *Regles de trois*, l'operation qui trouve un quatriéme nombre proportionnel de trois qui ſeront connus & propoſez. Et ſi la proportion eſt droite, en ſorte que le premier ſoit au ſecond ce que le troiſiéme eſt au quatriéme terme, la Regle ſera appellée *Regle de trois directe*. Mais ſi la proportion eſt reciproque, de ſorte que le premier terme ſoit au ſecond, comme le quatriéme eſt au troiſiéme, ou comme le premier au troiſiéme; ainſi le quatriéme au ſecond, la Regle ſera appellée *Regle de trois indirecte*.

Ces Definitions devroient ſuffire pour comprendre la difference de la Regle directe avec l'indirecte; mais comme les commençans ont de la peine à appliquer les definitions dans les diverſes queſtions que l'on peut former. Voici la marque la plus ſûre & la plus

intelligible qui m'ait parüe pour cette diſtinction.

Dans les Regles directes la proportion eſt toûjoûrs du plus au plus ou du moins au moins, c'eſt à dire, que ſi le troiſiéme terme augmente par deſſus le premier, le quatriéme doit auſſi augmenter par deſſus le ſecond. Par exemple, il eſt evident que ſi 100 ℔ donnent 5 l. d'interêts, 1000 ℔ qui ſeront le troiſiéme terme doivent donner 50 ℔ qui augmentent par deſſus le ſecond terme 5 ℔; & ſi le troiſiéme diminüe du premier, le quatriéme doit diminüer du ſecond. Par exemple, 1000 ℔ donnent 50 — d'interêts; 100 ℔ doivent donner 5 ℔, ainſi le quatriéme terme diminüe du ſecond à proportion que le troiſiéme diminüe du premier.

Mais dans les Regles indirectes la proportion va du plus au moins, ou du moins au plus, en ſorte que ſi le troiſiéme terme augmente ſur le premier, le quatriéme diminüe du ſecond; & ſi le troiſiéme diminüe du premier, le quatriéme augmente ſur le ſecond. Ou bien le premier & quatriéme terme ſont plus grands, ou plus petit que les moyens, en ſorte que ſi le troiſiéme terme eſt plus grand que le ſecond, le quatriéme eſt plus grand que le premier; & ſi le troiſiéme terme eſt moindre que le ſecond, le quatriéme eſt moindre que le premier, & les deux moyens enſemble plus petits ou plus grands que les extrêmes, ce que nous demontrerons clairement dans nôtre Arithmetique. Au contraire dans la directe, les termes ſont alternativement plus petits, & plus grands, ou plus grands & plus petits, ou bien ils ſont ſucceſſivement plus grands & plus petits, comme dans les progreſſions.

1° Pour la Regle directe il faut multiplier le troiſiéme terme par le ſecond, & le produit, le diviſer par le premier terme; le quotient de la diviſion ſera le quatriéme terme que l'on cherche.

EXEMPLES.

100 ℔ de principal donnent 5 ℔ d'interêts, on demande combien doivent rendre 2560 ℔, je diſpoſe la proportion en cette maniere.

Principal Interêt Principal Interêt

Si 100 ℔ donnent 5 ℔ combien 2560 ℔ ℟ 128 ℔

Et aprés avoir multiplié le troiſiéme terme 2560 par 5, qui eſt le ſecond terme, ſon produit 12800, je diviſe par le premier terme 100, & le quotient 128 ℔ ſatisfait à la queſtion.

On demande combien depenſeront 4565 perſonnes à raiſon de 120 ℔ par perſonne, je diviſe la proportion en cette ſorte.

Perſonne Dépenſe Perſonnes Dépenſes

Si 1 dépenſe 120 ℔ combien 4565 ℟. 547800 ℔

Et multipliant 4575 par 120, le troiſiéme terme par le ſecond, le produit 547800, étant diviſé par le premier terme 1, le quotient qui ſatisfait à la queſtion eſt 547800.

2° Pour bien diſpoſer la proportion, il faut poſer les eſpeces differentes, alternativement comme dans les exemples que nous venons de donner. L'on voit que chaque interêt ſuit ſon principal, & chaque dépenſe ſuit le nombre des perſonnes.

3° Dans les Regles indirectes, il faut diſtinguer exactement les termes, & voir en quelle maniere ſe trouve la proportion reciproque; car ſi le 4ᵉ terme que l'on cherche doit être au ſecond terme, comme le premier, au troiſiéme, en ce cas l'on multipliera les deux premiers termes & le produit ſera diviſé par le troiſiéme, dont le quotient ſera le quatriéme terme requis.

Mais ſi l'on demande que le quatriéme terme ſoit au troiſiéme, comme le premier eſt au ſecond; il faudra multiplier le premier & le troiſiéme terme, & diviſer le produit par le ſecond, comme nous l'avons remarqué au chapitre precedent. Voici un exemple de chacun.

4000 hommes en garniſon ont des vivres pour 60

jours, ſi l'on augmente la garniſon de 2000 hommes ſans diminuer la portion de chacun pour combien de temps auront-ils des vivres. Il eſt evident que cette proportion eſt indirecte, puiſqu'à proportion que le nombre des hommes augmentent les proviſions doivent diminuer, ainſi l'on cherche un quatriéme terme qui ſoit au ſecond ce que le premier eſt au troiſiéme, ainſi je diſpoſe ma Regle en cette maniere.

hommes	jours	hommes	jours
4000	60	6000	℟ 40

Et multiplie les deux premiers termes 4000 & 60 le produit eſt 240000, qui étant diviſé par 6000 donne au quotient 40 jours qui ſont le temps de la proviſion pour 6000, où l'on voit clairement qu'il y a même raiſon du premier terme 4000 hommes au troiſiéme 6000, que du quatriéme terme 40 jours au ſecond 60 jours.

On propoſe cet autre exemple. 2000 hommes dépenſent au Roy 120000 ℔, & il veut à preſent depenſer 360000 ℔, combien doivent-ils être d'hommes en même proportion; ayant rangé les trois termes comme ils ſont propoſez, je trouve cette diſpoſition.

hommes	depenſes	depenſes	hommes
2000	120000 ℔	360000 ℔	℟ 6000

Où je vois que les deux termes moyens ſont de même genre, & les extrêmes d'un autre genre; en ſorte que le quatriéme terme que l'on cherche doit être au troiſiéme ce que le premier eſt au ſecond; ainſi multipliant le premier terme 2000 hommes par le troiſiéme terme 360000 ℔ de depẽſe, le produit 720000000 étant diviſé par le ſecond terme 120000, le quotient eſt 6000 hommes que le Roy entretiendra pour 360000 ℔.

4° On appelle Regles de 5 ou Regles de trois doubles tant directes qu'indirectes, celles où l'on fait & propoſe en cinq termes deux Regles de trois. Par exemple 2000 hommes en 60 jours ont depenſé au Roy 120000 ℔; combien depenſeront 60000 hommes en 80 jours; cette Regle doit ſe reſoudre par deux Regles de trois ſimples & directes; en cette maniere, ſi 2000 hommes depenſent 120000 ℔, combien depenſeront 5000 hommes, la reponſe ſe trouvera par les Regles du premier article; 360000 ℔ pour 60 jours, ainſi continuant la ſeconde Regle, je dis ſi en 60 jours on depenſe 360000 ℔ combien depenſera-on en 80 jours, la reponſe ſera 480000 ℔ qui ſatisfont à la queſtion, & cette Regle eſt une Regle de trois double & directe, elle ſe diſpoſe en cette ſorte.

Hommes	jours	depenſes	Hommes	jours	depenſes.
2000	60	120000 ℔	6000	80	℞ 480000.

Mais ſi l'on propoſe en cinq termes deux Regles de trois indirectes, pour lors on appellera cette Regle, Regle de 5 ou de trois double indirecte. Par exemple, une perſonne a laiſſé à un amy la ſomme de 15000 ℔ pour diſtribuer à 1000 pauvres, & leur donner un mois durant 10 ſols par jour à chacun; & changeant d'avis, il prie ſon amy de diſtribuer ce même argent à 500 pauvres ſeulement, & de le leur diſtribuer en 20 jours; ce qui donne cette diſpoſition, ou le ſixiéme terme doit ſatisfaire à la queſtion.

Pauvres	jours	ſols	Pauvres	jours	ſols
1000	30	10	500	20	℞ 30

Je conſidere cette diſpoſition, & reconnoiſſant que la Regle va du moins en plus, je conclus qu'elle eſt indirecte, & la reſous en cette maniere.

Si 1000 pauvres ont 10 ℔, combien 500 ℞ 20 ℔

Si en 30 jours on a 20 ℔, combien en 20 jours ℞ 30 ℔

Et ſi la Regle ſe trouve compoſée d'une Regle directe, & d'une indirecte, on l'appellera mixte. Par exemple ſi 100 ℔ ont été gagnez en 5 jours par 10 hommes pour gagner 750 ℔ en 15 jours, combien faudra-il d'hommes? elle ſe reſoudra ſuivant les diſpoſitions cy-bas.

Si 100 ℔ 10 hommes 750 ℔ ℞ 75 hommes.

Si 5 jours 75 hommes 15 jours ℞ 25 hommes.

Definitions & Regles.

5° On appelle Regles de Compagnies celles, où pluſieurs Perſonnes aſſociées doivent payer ou rendre, ou gagner au prorata des ſommes de l'aſſociation, & du gain ou perte qu'ils ont fait. Par exemple quatre Marchands ont chargé un Vaiſſeau, le premier y a mis 45000 ℔ de marchandiſe, le ſecond pour 56000 ℔, le troiſiéme pour 64000 ℔, & le quatriéme pour 80000 ℔, le Vaiſſeau eſt venu à bon port, & ils ont gagnez la ſomme de 156000 ℔, combien chacun aura-il du gain au prorata de ſon argent. Cette Regle n'a rien de particulier, & c'eſt une Regle de trois, ſimple & directe, où l'on examine chaque ſomme en particulier pour avoir ſon gain particulier, en cette ſorte.

Diſpoſez toutes vos ſommes, & les adjoûtez, leur ſomme ſera le premier terme de la Regle de trois directe. Le gain ſera le ſecond terme, & chaque ſomme particuliere ſera un troiſiéme terme.

Gain 156000 ℔

45000 ℔ — 1er Marchand.
56000 — 2e Marchand.
64000 — 3e Marchand.
80000 — 4e Marchand.

Somme 245000 livres.

Si 245000 ℔ gaignent 156000 ℔ { 45000 / 56000 / 64000 / 80000 }

Le premier aura 28653 ℔ $\frac{15}{245}$ d'une livre.
Le second — 35657 ℔ $\frac{15}{245}$ d'une livre.
Le troisiéme — 40751 ℔ $\frac{3}{245}$ d'une livre.
Le quatriéme — 50938 $\frac{190}{245}$ d'une livre.

Gain total 156000

6° Mais si les Associez ont mis leur argent chacun pour different temps, la Regle sera appellée Regle de Compagnie à temps, & l'on operera de la même maniere, si ce n'est qu'il faut multiplier la mise d'un chacun par le temps qu'a servi son agent; & chaque produit sera la veritable mise d'un chacun, qu'il faudra additer ensemble, & la somme sera au premier lieu de la Regle de trois, le gain sera au second, & chaque produit separément seront mis au troisiéme lieu. Par exemple, trois Marchands se sont associez, le premier a mis 300. liv. pour 2 ans, le second 5000. liv. pour 4 ans, & le troisiéme 8000. liv. pour 6 ans, & ils ont gagné 25000. liv. combien est-ce de gain à chacun tant pour son argent que pour le tems qu'il l'a mis; je multiplie donc la premiere mise 3000. liv. par le nombre des années 2, le produit est 6000; le produit du second 20000; & le produit du 3e 48000.

6000 pour le premier Marchand.
20000 pour le second.
48000 pour le troisiéme.

Si 74000 donnent 25000. l. de gain { 6000 / 20000 / 48000

Le premier aura 2027. l. $\frac{1}{74}$ d'une livre.
Le second aura — 6756. l. $\frac{56}{74}$ d'une livre.
Le troisiéme — 16216 l. $\frac{16}{74}$ d'une livre.

Gain total 25000 livres.

Je n'ay point reduit les fractions des exemples cy-dessus en sols & deniers, parce qu'il est facile de le faire, suivant les Regles que nous avons données au Chapitre 12. pour reduire toutes sorte de valeur; je ne donne pas non plus un grand nombre d'exemples en d'autres genres, parce que nôtre Arithmetique en fournira suffisamment à ceux qui voudront s'instruire à fond de ces sortes de Regles. D'ailleurs je laisse encore ce qu'on appelle regles conjointes ou de composition, les Regles d'alliages, d'interêts, des comptes & autres semblables pour ne pas grossir ce Volume, je finis ce Traité par les regles de fausses positions.

DEFINITIONS & REGLES.

7° On appelle Regle de fausse-position, une hypothese ou supposition qui ait les conditions d'une question proposée pour venir à la connoissance de celle que l'on cherche. Par exemple, on demande quel est le nombre dont la moitié, le tiers & le quart font 13. Et pour découvrir ce nombre, on en suppose un qui ait moitié tiers & quart; comme 12, dont la moitié est 6, le tiers 4, & le quart 3, qui ensemble font la somme de 13, ainsi quoique 12 ne soit pas le nombre que l'on cherche, puisque sa moitié, son tiers & son quart ne font pas 39, il sert neanmoins pour découvrir celuy que l'on demande en faisant une Regle de

en cette ſorte ; ſi 13 viennent de 12, 39 de quel nombre viendront-ils ; le quatriéme terme de la proportion ſera 36, qui eſt le nombre requis : car 36 a pour moitié 18, pour tiers 12, & pour quart 9, qui, adjoûtez enſemble font 39, ſuivant la propoſition, d'où l'on voit que la fauſſe poſition, ou plûtôt la ſuppoſition du nombre 12 a fait decouvrir le nombre 36.

8° Mais il arrive ſouvent qu'une ſeule ſuppoſition ne peut pas reſoudre la queſtion : ainſi l'on ſe ſert de deux ſupoſitions, par le moyen deſquelles on vient à la connoiſſance de ce que l'on cherche : c'eſt ce qu'on appelle *Regles de deux fauſſes poſitions*, parce que les deux ſuppoſitions que l'on fait, ſont veritablement des nombres qui ſont faux, & qui ne ſatisfont point à la queſtion, en voici les regles & un exemple.

On ſuppoſe qu'une perſonne a donné 400 ℔ à 4 Pauvres, dont le premier a eu le double du ſecond ; le troiſiéme un quart moins que le ſecond ; & le quatriéme deux tiers moins que le troiſiéme ; ainſi l'on demande ce que chacun a eu.

1° Pour ſatisfaire à cette queſtion, il faut ſuppoſer pour le premier Pauvre un nombre tel que l'on voudra, & remplir en ſuite toutes les conditions de la queſtion ; & comme il arrive ordinairement que ce nombre ne ſe trouve pas celuy que l'on cherche, on écrit ce nombre avec ſa difference de plus ou de moins.

2° On fait une ſeconde ſuppoſition avec laquelle on pourſuit la queſtion dans toutes ſes circonſtances, & on marque ſa difference de plus ou de moins, comme cy-devant, s'il arrive que le nombre ſuppoſé ne ſatisfaſſe pas à la queſtion ; car il ſe pourroit faire que le hazard l'eût fait rencontrer tout d'un coup.

3° Ces 2 nombres ſuppoſez & leurs differences, il faut multiplier le premier nombre par la difference du ſecond ; & le ſecond nombre par la difference du premier poſant ſeparément leurs produits.

4° Si les differences excedent toutes deux ou que

toutes deux ſoient defectives, il faut ſouſtraire le plus petit produit du plus grand, & la moindre difference de la plus grande, & diviſer le reſtant des produits par le reſtant des differences; & le quotient qui en proviendra ſera le nombre requis.

5° Mais ſi l'une des differences excede, & que l'autre ſoit defaillante; en ce cas vous ajoûterez les deux produits d'une part, & les deux differences de l'autre; & la ſomme des produits étant diviſée par la ſomme des differences, le quotient ſera le nombre requis.

Supoſons donc que le premier Pauvre dans l'exemple cy-deſſus ait eu 56 ℔, & le ſecond aura eu par conſequēt 28 ℔; le troiſiéme qui a eu un quart moins que le ſecond aura eu 21 ℔, & le 4e qui n'aura eu que le tiers du troiſiéme, aura receu 7 liv. mais ces quatre nombres 56, 28, 21, & 7, ne font que 112. liv. & par conſequent le nombre ſuppoſé ne ſatisfait pas à la queſtion, puiſque l'on a diſtribué 400. liv. à ces quatre Pauvres; ainſi j'en prens la difference qui ſe trouve defaillante, de 288 que je poſe ſeparément.

Je fais en ſuite une ſeconde ſuppoſition pour le premier pauvre que ce ſoit, Par exemple 72. liv. le ſecond aura reçû ſuivant les conditions de la queſtion 36. liv. le troiſiéme 27. liv. & le quatriéme 9. liv. mais ces 4 nombres 72, 36, 27, 9, ne ſatisfont pas non plus à la queſtion: car leur ſomme ne donne que 144, ainſi il s'en manque 256 que l'on n'ait trouvé juſte, & cette difference eſt encore defaillante, je la poſe ſous la premiere, & multipliant le premier nombre 56 par la ſeconde difference 256, le produit 14336, je le poſe ſeparément; je fais le même du ſecond nombre 72 par la premiere difference, & ſon produit 20736, je le poſe ſeparément au deſſus du premier produit, puiſqu'il l'excede.

J'examine mes deux differences, & voyant que toutes deux ſont defaillātes, je ſouſtrais 14336 de 20736, le reſtant ſe trouve 6400, je ſouſtrais encore la moindre difference 256 de la plus grande 288, & le reſtant 32 me ſervira pour diviſer le reſtant des produits 6400

dont le quotient 200 eſt le nombre des livres qu'a reçû le premier Pauvre, comme la diſpoſition ſuivante le montre clairement.

Premiere Suppoſition.	Seconde Suppoſition.
56 premier Pauvre	72 —— 1e Pauvre
28 ſecond Pauvre	36 —— 2 Pauvre
21 troiſiéme Pauvre	27 —— 3 Pauvre
7 quatriéme Pauvre	9 —— 4 Pauvre
112 defectif.	144 defectif.

400	400
112	144
288 premiere difference.	256 2e difference.

56 donne moins de 288
72 donne moins de 256

20736 — 1e produit. 14336 — 2e produit.

de	20736	de	288
Souſtraire	14336	Souſtraire	256
	6400 — 1e reſtant.		32 — 2e reſtant.

Diviſer 6400 (200 — 1e Pauvre.

par xxxx 100. l. — 2 Pauvre.
xx 75. l. — 3 Pauvre.
25. l. — 4 Pauvre.

Somme totale diſtribuée 400 livres.

Suppoſons en ſecond lieu, que le premier Pauvre ait eu 208. liv. le ſecond aura reçû 104. l. le troiſiéme 78. l. le quatriéme 26. l. dont la ſomme donne 416, & par conſequent le nombre ſuppoſé eſt abondant, de 16.

Et prenant encore un nombre abondant, comme 220. l. pour le premier Pauvre, 112. l. pour le ſecond, 84. l. pour le troiſiéme, & 28. l. pour le quatriéme, la ſomme 448 eſt excedante, de 48.

Cela fait, je multiplie le premier nombre abondant 208, par la ſeconde difference ou excez 48, le produit ſe trouve 9984, & faiſant le même du ſecond nombre 224, par la premiere difference ou excez 16, le produit qui en reſulte eſt 3584. Je ſouſtrais ſuivant la Regle 4e cy-deſſus le petit produit 3584 du plus grand 9984, le reſtant ſe trouve 6400, j'en fais de même de la difference 16, de 48, & le reſtant 32 me ſert de diviſeur pour 9984, dont le quotient 200 eſt le veritable nombre qui convient au premier Pauvre.

Premiere Suppoſition.	Seconde Suppoſition.
208 —— 1e Pauvre.	224 —— 1e Pauvre.
104 —— 2 Pauvre.	112 —— 2 Pauvre.
78 —— 3 Pauvre.	84 —— 3 Pauvre.
26 —— 4 Pauvre.	28 —— 4 Pauvre.
416 nombre abondant de 16.	448 abondant de 48.

208 excede de 16

224 excede de 48

2e produit 3584 — 9984 1e produ

de 9984 plus grand produit.
Soustraire 3584 plus petit produit.

Restant 6400

de 48 plus grand excez.
Soustraire 16 moindre excez.

Restant 32

Diviser ~~6400~~ (200 liv.—1e Pauvre.

Par ~~3222~~
~~33~~

Enfin, si nous avions supposé pour 1r nombre 208; qui est abondant, & 56 d'autre part qui se trouve defaillant en suivant la cinquiéme Regle cy-dessus; c'est à dire, qu'aprés avoir multiplié le 1r nombre 208, par la difference défaillante 288, dont le produit est 59904; & encore multipliez le second nombre 56 par l'excez 16, dont le produit est 896; J'adjoûte les 2 produits 59904 & 896, d'une part & de l'autre, les deux differences 16 & 288; les sommes sont du côté des produits 60800, & du côté des differences 304; ainsi divisant la premiere somme qui est celle des produits, savoir 60800 par 304, qui est la somme des differences, le quotient 200. liv. pour le premier Pauvre est celuy que nous avions déja trouvé cy-devant & qui satisfait à la question. En voila suffisamment pour les premiers elemens des Mathematiques, nôtre Arithmetique contentera ceux qui en cherchent davantage, passons à l'Algebre.

QUATRIE'ME PARTIE.

Qui contient un Abregé des principales Operations de l'Algebre.

CHAPITRE I.

Des principes generaux pour les Operations de l'Algebre.

DEFINITIONS & PRINCIPES.

Il faut relire ou bien savoir ce que nous en avons dit à la seconde Partie.

NOus appellerons le *denominateur d'une grandeur*, soit positive ou defective, le nombre la lettre ou quelqu'autre signe semblable qui en designera la quantité. Par exemple + 10 + *a* ⊢ *b* + *x*.

Et si les grandeurs ont un même nombre ou même lettre ; nous dirons qu'elles ont un même denominateur quoiqu'elle n'ait pas le même signe de + ou de ⊢. Par exemple + 10 & + 10, ont un même denominateur, & de même + 10 ⊢ 10 ; ou + *a* & + *a* & ⊢ + *a* ⊢ *a*.

Adjoûter, multiplier ou composer des grandeurs positives, c'est augmenter la quantité des grandeurs par dessus le rien, ou ⊖, ou o & augmenter + soustraire, diviser & resoudre à ses racines des grandeurs positives, c'est veritablement diminuer à la quantité des grandeurs positives, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que le rien ou ⊖ ou o, ou quelque grandeur qui ajoûte au ⊖.

Adjoûter des grandeurs défectives, c'est toûjours retrancher du Rien, ou de ⊖ & o, & augmenter le ⊢

mais ſouſtraire des grandeurs defectives, c'eſt les adjoûter au ⊖ ou o, ou diminuer le moins ⊢.

Multiplier ou compoſer des grandeurs poſitives par des grandeurs poſitives, c'eſt augmenter le +.

Diviſer ou reſoudre en ſes racines des grandeurs poſitives, c'eſt retrancher du plus, & les quotiens ou racines ſont toûjours +.

Multiplier ou compoſer des grandeurs defectives par des grandeurs defectives ; c'eſt augmenter & donner +.

Diviſer ou reſoudre des grandeurs defectives par les grandeurs defectives, c'eſt encore donner aux quotiens & racines le ſigne de +.

Mais de multiplier, compoſer, diviſer ou reſoudre en ſes racines des grandeurs poſitives par des grandeurs defectives ; ou des grandeurs defectives par des grandeurs poſitives, c'eſt avoir des produits ou racines, qui ont le ſigne de ⊢.

Ces principes ſont expliquez fort clairement dans nôtre Algebre : ceux qui en voudront comprendre les raiſons & demonſtrations y auront recours. Je les y mis ici, afin que dans les difficultez qui peuvent naître, il ſoit plus facile de comprendre les Regles que nous donnerons ci-aprés.

CHAPITRE II.

Des Regles de l'Addition.

DEFINITIONS.

NOus appellerons *grandeurs numeriques* celles dont la quantité ſera exprimée par des nombres ſeulement, comme 10, 20, 50, 1000 : mais celles qui ſeront dénommées par des lettres, ſoit qu'elles ſoient connuës ou inconnuës, poſitives ou defectives, nous les appellerons grandeurs litterales, & ces grandeurs

litterales nous les conſidererons toûjours comme accompagnées de quelque nombre pour determiner combien de fois cette grandeur eſt priſe, & à quelle puiſſance elle eſt élevée ; ainſi la grandeur b par exemple ſera conſiderée, comme precedée de l'unité, en cette maniere 1b, ce qu'il faudra entendre de toutes les lettres qui ne ſeront point precedées de quelque nombre, comme c, d, e, f, c'eſt la même choſe que s'il y avoit 1c, 1d, 1e, 1f, & ſi la lettre qui exprime la grandeur, eſt élevée à quelque puiſſance, comme a^4 b^3 c^2, nous ſous-entendrons pareillement l'unité qui les precede, comme s'il y avoit $1a^4$ $1b^3$ $1c^2$. Et ſi le nombre qui precede la grandeur litterale ſurpaſſe l'unité ; c'eſt une marque qu'elle eſt priſe pour autant de fois que le nombre le deſigne par ſon expreſſion, ainſi 3b ou 4c marquent que b eſt pris trois fois, & c 4 fois, & de même $4bb$ ou $5c^4$ deſignent que le quarré de b eſt pris 4 fois, & la quatriéme puiſſance de c priſe cinq fois, ce qu'il faut tres-exactement obſerver.

D'ailleurs nous diſtinguerons encore les grandeurs incomplexes des grandeurs complexes : on appelle une *grandeur incomplexe* celle qui n'a qu'une ſeule & ſimple expreſſion, ſoit en nombre ſoit en lettre. Par exemple 10, 150, 30, 1550 ſont appellez des grandeurs incomplexes, & de même a, b, c, z, y, x, où il faut prendre garde qu'il y a grande difference entre ces manieres de parler une grandeur incomplexe, & un nombre incomplexe : car dans nôtre Arithmetique nous avons appellez nombres incomplexes ceux qui ne ſont exprimez que par un ſeul chiffre à quelque rang ou colonne qu'ils ſoient élevez, & les nombres complexes ſont ceux qui ſont exprimez par pluſieurs chiffres ; mais icy nous conſiderons une grandeur incomplexe, comme ſi ce n'étoit qu'un ſeul chiffre, lorſqu'elle eſt exprimée par un ſeul nombre total.

Mais les grandeurs complexes ſont celles que l'on exprime par pluſieurs denominateurs unis par les ſignes de plus & de moins ; ainſi $10 + 5$, eſt une grandeur numerique complexe, parce qu'elle eſt expri-

née par 10, & par 5 qui ſont unis par le ſigne +, & à cette même grandeur étoit exprimée par 15 ſeulement, elle ſeroit incomplexe. Pareillement a + b ou c ∼ d ſont des grandeurs complexes exprimées par les lettres a & b, & c & d, qui ſont liées par les ſignes + & ∼.

Regles generales.

1. + adjoûté a + ou ce qui eſt le même + & + donnent +.

2. ∼ adjoûté a ∼ ou ce qui eſt le même ∼ & ∼ donnent un plus grand ∼.

3. + adjoûté à ∼ ou ∼ adjoûté a + ou ce qui eſt le même + & ∼, ∼ & + ne donnent rien & ſe détruiſent entre les grandeurs de même denomination, & de même quantité. Par exemple + a & ∼ a ne font rien, & ∼ b + b ne font encore rien.

4 L'Addition des grandeurs, tant numerique que literales ſe fait ſeulement par la liaiſon des ſignes + & ∼, en quelque ſens qu'on les poſe ſoit à droite ou à gauche, deſſus ou deſſous, ainſi a + b, & b + a ou ∼ ſont toûjours la même choſe, & a ∼ b ou ∼ b + a, ou ∼ ſont toûjours la même expreſſion, & la même ſomme.

Regles particulieres.

Mais pour abreger les expreſſions, & pour les placer en l'ordre, on ſe ſert des Regles ſuivantes.

1. Si quelque grandeur ſe trouve pluſieurs fois avec un même ſigne, on ne l'écrit qu'une ſeule fois avec le même ſigne; marquant avant elle par un nombre, combien de fois elle a été priſe.

2. On poſe les premieres grandeurs connuës les premieres, ſelon l'ordre de l'Alphabet, commençant par a puis b, &c. & les grandeurs inconnuës de même, commençant par z, y, x.

3. Si quelque grandeur ſe trouve pluſieurs fois ſous les ſignes oppoſez, on ſuppoſe ſeparément combien

de fois elle ſe trouve ſous le ſigne + & ſous le ſigne −, & on marque ſeulement l'excez de l'un ou de l'autre.

4. Si la grandeur qui doit commencer ſe trouve defective, on la poſe aprés celle qui ſe trouve poſitive la plus proche, & on garde l'ordre des lettres, ſuivant la 2e Regle.

5. Si une grandeur litterale s'y trouve pluſieurs fois élevée à une même puiſſance, on ſuit la premiere Regle en poſant ſeulement le nombre qui exprime combien de fois elle s'y trouve élevée à cette puiſſance: mais ſi cette même grandeur ſe trouve élevée à diverſes puiſſances, on les diſtingue ſéparément, & on commence par la plus haute puiſſance. Voici des exemples qui éclairciront ces Regles.

6. Si les grandeurs ſont ſimplement numeriques, elles ſuivent les Regles de l'Addition ordinaire en Arithmetique.

Premier Exemple.

On demande d'adjoûter enſemble les grandeurs 10 a, b, c, d, 20, f, 30.

J'adjoûte les grandeurs litterales en cette maniere à + b + c + d + f, & enſuite je poſe les trois nombres 10, 20, 30 que j'adjoûte ſuivant les Regles de l'Arithmetique, la ſomme ſe trouve 60, que j'unis aux grandeurs litterales par le ſigne +, ainſi a + b + c + d + f + 60, ſont la ſomme propoſée.

Second Exemple.

On demande la ſomme des grandeurs ſuivantes.

$$\left\{\begin{array}{l} a + 3b \\ 5a + 2b \\ 2a + 4b + c \end{array}\right.$$

Somme $8a + 9b + c$

Je poſe premierement a, & je compte combien de ois il ſe trouve dans les grandeurs propoſées, il s'y rouve 8 fois, ainſi je poſe 8 devant a, je fais le ême à la grandeur b, que je trouve poſée 9 fois, uiſque les nombres qui la precedent le deſignent, eſt pourquoy je poſe + 9 b, puiſque tous les ſignes ont +, & enfin c ſe trouvant une fois ſeulement avec ſigne +, je le marque precedé du ſigne + & de tte maniere 8 a + 9 b + c expriment la ſomme des andeurs propoſées.

TROISIE'ME EXEMPLE.

$$\left\{\begin{array}{l} 6a + b + d + 2d + 3f \\ 9a + 7b + 4d + 6e. \end{array}\right.$$

$$15a + 8b + 7d + 6e + 3f \text{ Somme.}$$

J'aſſemble tous les a qui ſont le ſigne + & poſe a: je compte les b avec le ſigne + & je trouve +, & ne s'y trouvant point de c, je compte combien fois d ſe trouve ainſi je poſe 7 d precedé du ſigne + s'y trouve 6 fois, & f trois fois avec le ſigne + ſi la grandeur complexe 15 a + 8b + 7d + 6e + exprime la ſomme requiſe.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

$$\left\{\begin{array}{l} 6a + 3b - 2c + 4a - 7b \\ d - 5a + c - e + f \\ - f + c - 3a + 4d + 5b \end{array}\right.$$

Somme $2a + b * c. + 5d - e * f$

trement $2a + b + 5d - e.$

ans l'exemple propoſé je commence par la lettre a : je trouve poſée deux fois avec le ſigne +, & les x nombres 6 & 4 qui le precedent, de ſorte que ce

ſeroient 10a, ſi la même lettre ne ſe trouvoit point avec le ſigne ∽ : ainſi comm'elle ſe trouve auſſi 2 fois avec le ſigne ∽, & les nombres 5 & 3 je conclus que ∽ 8 a détruiſent + 8 a, & par conſequent il ne reſte plus que 2 a que je poſe au commencement de la ſomme : je fais le même à la lettre b, & je trouve d'une part + 8 b, & de l'autre ∽ 7 b, de ſorte qu'il reſte + b que je poſe aprés l'a ; & comme la lettre c ſe trouve deux fois poſitive, & 2 fois defective, elle s'évanoüit ce que j'exprime par une étoile, ſi je veux marquer que dans l'Addition les ſignes ſe ſont également détruits, & qu'elle eſt évanoüie : mais il eſt inutile de l'exprimer, ainſi continuant à la lettre d, puis e, puis la ſomme totale ſe trouve 2a + b * c + 5d ∽ e ou en ne faiſant point mention de c ni d'f qui ſe ſont évanoüies, la ſomme 2a + b + 5d ∽ e, ſera la requiſe.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

$$\begin{cases} \backsim\ 2a + 4c + 7a \backsim 3a \backsim d \\ +\ 8e \backsim 3a \backsim 4d + 2c \backsim 3a \\ +\ f + a \backsim b + 3c \backsim b + f \\ \backsim\ a + c + b + e + f \backsim a \end{cases}$$

11 c ∽ 5a ∽ b ∽ 5 d + 8e + 3f Somme

Dans ce 5e Exemple je trouve d'une part ∽ 13 a, de l'autre + 8 a, ce qui ſe reduit à ∽ 5 a, & par conſequent la grandeur a ſe trouve defective dans la Somme : c'eſt pourquoi je ne la poſe pas la premiere, ſuivant la Regle 4e, je fais le même de la grandeur b qui ſe trouve auſſi defective, y ayant d'une part ∽ 2 b & de l'autre + b, ce qui ſe reduit à ∽ b : ainſi par la même Regle, je la reſerve pour la poſer aprés la lettre c, me trouvant la lettre c poſitive, je commence à poſer 11 c ∽ 5 a ∽ b, & continuant les autres grandeurs par les Regles ci-deſſus la ſomme 11c ∽ 5a ∽ b ∽ 5d + 8e + 3f eſt la requiſe.

Si

Sixiéme Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a.^4 + x^2 - a. - z.^5 + 2a.^4 - 8b.^5 \\ + 6a.^4 - x^2 - z^5 - 3b.^5 + 4a.^4 - 6b.^5 \\ - 8u^5 + y.^6 - a.^4 + 5b^5 - x^2 + 4u.^5 \end{array}\right.$$

Somme $11\,a.^4 - 6b.^5 + 4u.^5 - 7x.^2 + y.^6 - 2z.^5 - a$

Ou bien $y.^6 - 2z.^5 + 11a.^4 - 6b.^5 + 4u.^5 - 7x - a$

Dans ce sixiéme exemple commençant par la lettre b, je la trouve positive & negative, & élevée à la quatriéme & à la premiere puissance, ainsi trouvant d'une part $13a^4$ & de l'autre $-2a.^4$ je reduis la somme à $11a.^4$ & reserve $+a$, de la premiere puissance pour le dernier article, je continuë de la même sorte dans les grandeurs b, u, x, y, z, & la somme se trouve $+11a.^4 - 6b.^5 + 4u.^5 + 7x.^2 + y.^6 - 2z.^5 - a$, ou bien si l'on veut ranger cette somme suivant l'ordre des puissances, en commençant par la plus élevée, on trouvera $y.^6 - 2z.^5 + 11a.^4 - 6b.^5 + 4u.^5 - 7x.^2 - a$, & ce sera toûjours la même somme, étant indifferent en quelque sens qu'on les range.

Septiéme Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} aabb + aacc - aabc + aabb - aabc \\ + bbcc - aabb + ccdd - ccb + aac - aab \\ + 2aabb + 3aacc - aabc + ccdd - ccb + aac \end{array}\right.$$

Somme $3aabb + 4aacc - 3aabc + 2aac + bbcc - 2bcc + 2ccdd.$

Ou bien $3aabb + 4aacc. + bbcc. + ccdd. - 3aabc. + 2aac - 2bcc.$

Dans cet exemple je commence par aabb, que je trouve quatre fois positivement, & une fois negativement, ainsi je pose 3aabb, & faisant le même dans

toutes les grandeurs où ſe trouve la lettre *a*, je trouve + 4aacc. − 3aabc + 2aac, & continuant de la même ſorte où ſe trouve la lettre b, je poſe + bbcc − 1bcc (car c'eſt la même choſe de mettre − 2ccb, ou bien − 2bcc) mais la lettre b étant la premiere je renverſe l'ordre − 2ccb en − 2bcc ; enfin je finis par la lettre c, en poſant + 2ccdd. Et comme il eſt indifferent de ranger chaque grandeur comme l'on veut, on peut ſuivre l'arrangement que nous avons mis au deſſus de la ſomme où nous avons gardé l'ordre des degrez les plus élevez. Et l'on ne doit pas être ſurpris ſi l'on ne ſepare pas ces diverſes lettres, parce que chacune de ces grandeurs, eſt multipliée l'une par l'autre, & que ce ſont divers produits, & divers puiſſances ou degrez dont on cherche la ſomme, puiſque (comme nous l'avons remarqué dans nos Definitions,) pour multiplier une grandeur litterale par une autre, on ne fait que les joindre à côté l'une de l'autre, ce que nous expliquerons plus amplement cy-aprés.

CHAPITRE III.

Des Regles de la Souſtraction.

Regles Generales.

1. + de + donne 0 dans les grandeurs de même quantité & denomination ; ou bien la quantité poſitive diminüe, & la quantité negative augmente.

C'eſt à dire que ſi de + *a* l'on retranche + *a* la difference ou le reſtant eſt 0 ; mais ſi de + 3*a* l'on retranche + 2*a*, pour lors la grandeur poſitive eſt reduite à + *a*, qui eſt la difference ou le reſtant de la Souſtraction ; & ſi de + 2*a*, on retranche + 4*a*, la grandeur ſera reduite à − 2*a*, parce qu'il s'en manque + 2*a* que la grandeur + 2a, ne contienne + 4a : ainſi − 2a eſt la difference de la Souſtraction ; & par conſequent

quantité negative augmente, & la positive s'évanoüit.

2. − de − c'est adjoûter + à −, & par consequent dans les grandeurs de même quantité & denomination la difference est 0.

C'est à dire, que retranchant − a de − a, c'est ajoûter + a à − a, & par consequent la difference de − a à − a est 0 a.

3. − de + donne + & +, c'est à dire que retranchant le − du +, c'est luy ajoûter & par consequent soustraire − a de + a, c'est adjoûter + a à + a, ce qui donne pour difference + 2a, & retrancher − 2a de + a, c'est adjoûter + 2a à + a, & par consequent la difference est + 3a.

4. + de − augmente le −, c'est à dire que retrancher + a de − a, c'est adjoûter − a à − a, & par consequent la difference en est − 2a, parce que retrancher + & adjoûter le − sont une même chose; de même que retrancher le −, & adjoûter + sont aussi la même chose, comme nous le demontrerons dans nôtre Traité de l'Algebre.

Regles particulieres.

1. La Soustraction des grandeurs, tant numeriques que litterales, se fait par la liaison des signes + & − suivant les Regles generales ci-dessus, observant de soustraire separément les nombres des nombres; & si les grandeurs litterales sont accompagnées de nombres, livre les Regles des nombres avec les signes + & − poser le denominateur designé par la grandeur litterale.

2. Si quelque grandeur se trouve posée plusieurs fois dans l'un ou l'autre membre de la Soustraction, il faut en abreger l'expression par les Regles de l'Addition.

3. faut garder l'ordre des lettres & des puissances, nt connües que des inconnües pour une plus grande facilité.

4. Il faut que l'excez commence plûtôt par une grandeur positive que defective.

PREMIER EXEMPLE, pour les grandeurs incomplexes.

Pour soustraire $+b$ de $+a$, j'écris $a-b$, pour soustraire $-b$ de $-a$; j'écris $b-a$, pour soustraire $-b$ de $+a$ j'écris $+a+b$, & pour soustraire $+b$ de $-a$; j'écris $-a-b$. Ces Exemples sont des expressions simples des Regles generales ci-dessus, ce que je ne crois pas devoir vous expliquer davantage, en tous cas voyez le Traité de l'Algebre.

SECOND EXEMPLE dans les grandeurs complexes.

De	18a + 30b
ôter	16a + 12b
Restes	2a + 18b

Dans cet Exemple, il est facile de voir que retranchant 16a de 18a, il reste 2a, & que de 30b en retranchant 12b, il reste 18b.

TROISIE'ME EXEMPLE.

De	−14a − 12b
ôter	− 6a − 4b
Restes	− 8a − 8b

Puisque moins retranché de moins, c'est veritablement adjoûter ou diminuer les moins, qui ne vaut que $-6a$, étant retranché de $-14a$, le restant est $8a$, ou ce qui est le même adjoûtant $+6a$, à $-14a$ ce restant sera toûjours $-8a$, & par consequent $-b$ retranché de $-12b$, donne $-8b$.

Quatrie'me Exemple.

De + 20a + 15b
ôter − 14a − 12b

Reſtes + 34a + 27b

Et comme le moins retranché du plus, c'eſt adjoûter + à + ôter − 14a de + 20a, c'eſt adjoûter + 14a à + 20a, & ôter − 12b de + 15b, c'eſt adjoûter + 12b à + 15b, ainſi les reſtans ſont + 34a + 27b.

Cinquie'me Exemple.

De − 22a − 17b
ôter + 14a + 13b

− 26a − 30b

Le + retranché, c'eſt augmenter le − & par conſequent retrancher + 14a de − 12a, c'eſt adjoûter − 14a à − 12a, & retrancher − 13b de − 17b, c'eſt adjoûter auſſi − 13b à − 17b, ainſi les reſtans ſont − 26a − 30b.

Sixie'me Exemple.

De 13a + 6b + 12c
ôter 10c − 8a + 1b + 3b + 12a − 6c

Reſtes 9a + 2b + 8c

Pour faire cette Souſtraction, je commence par la lettre a, & trouvant que je dois retrancher − 8a + 12a, de 13a, j'adjoûte premierement 8a 13a, puis me retrancher − 8a de 13a, c'eſt les adjoûter à 13a, ainſi de 21a j'en retranche 12a, ce qui donne pour le reſta[illegible] je pourſuis par la lettre b, où je trouve que [illegible] retrancher + 1b + 3b de 6b, c'eſt à dire 4b de 1b, [illegible] conſequent reſtent 2b. Et venant à la lettre

c, je trouve qu'il faut retrancher 10c − 6c de 12c, c'eſt à dire 10c − de 18c ou 4c de 12c, ce qui donne pour reſte + 8c.

Septiéme Exemple.

De	$12aa + 15b.^{3} - 17c.^{6}$
ôter	$7aa - 12b^{3} + 6c.^{6}$
Reſtes	$5aa + 27b.^{3} - 23c.^{6}$

Il faut operer dans la Souſtraction des puiſſances, comme en celle des grandeurs du premier degré, ainſi pour ſouſtraire 7aa de 12aa, j'écris 5aa, & pour ſouſtraire − 12b.³ de + 15b.³, j'écris 27b.³ : car retrancher le moins c'eſt l'ajoûter pareillement: j'écris 23c.⁶ pour retrancher + 6c.⁶ de − 17c.⁶, car retrancher le plus, & adjoûter le moins, c'eſt la même choſe.

Avertissement.

Vous remarquerez qu'ordinairement on donne pour Regle de Souſtraction, de changer en − chacun des ſignes + & en + chacun des ſignes − de la grandeur qu'on ôte écrivant conſecutivement les grandeurs comme dans l'Addition. Par exemple, pour ôter la grandeur b + c *de la grandeur* a, *l'on écrit* a − b − c, *& pour ôter la grandeur* a − b *de la grandeur* d − bc *on écrit* d − c − a + b. *cette Regle plus abregée que celle que nous avons donnée, mais auſſi elle eſt plus obſcure, parce qu'on ne voit pas d'abord pourquoy l'on change les ſignes, ce qui paroît comme evident dans les Regles que nous avons données, & que nous demontrerons dans nôtre Traité de l'Algebre.*

CHAPITRE IV.

De la Multiplication.

Regles Generales.

1. Multipliant + par + le produit donne +. Par exemple, multipliant + *a* par + b, le produit doit donner + *ab*.

2. Multipliant − par − le produit donne + : Par exemple, ſi vous multipliez − *a* par − *b* le produit ſera + *ab*.

3. La Multiplication de + par − donne − au produit : ainſi + *a* multiplié par − *b* ſon produit ſera − *ba*.

4. Pareillement ſi l'on multiplie − par + le produit donnera − : Par exemple − *a* multiplié par + *b* donne − *ab*.

De ces quatre Regles generales que nous demontrerons en ſon lieu, on a formé ce principe general de la Multiplication à l'égard des ſignes, + par +, & − par − donnent + au produit : & + par − ou − par + donnent − au produit.

5. La multiplication des lettres ſe fait en les joignant l'une à l'autre : ainſi pour multiplier *a* par *a*, on ſe contente d'écrire *aa* ; & de même pour faire la multiplication de *a* par *b*, on écrit *ab*, pour multiplier *aa* par *x*ζ, on écrit *aax*ζ, & ainſi de toutes les autres grandeurs ſoit connuës ou inconnuës.

6. La multiplication des nombres qui denomment la quantité d'une même grandeur ſe fait ſuivant les Regles de l'Arithmetique: c'eſt pourquoi 10 *x* multipliez par 20 *b* donnent 200 *xb*, ce qui eſt aſſez clair.

Regles Particulieres

De la Multiplication.

1. Mettez vôtre multiplicande au deſſus du multipli-

cateur, & ſi les grandeurs ſont incomplexes, vous n'aurez qu'à joindre les lettres qui les expriment, pour multiplier a par x, je poſe a au deſſus d'x, & aprés avoir tiré une ligne au deſſous, je joins a à x, ce qui donne le produit d'a par x, en cette maniere.

Multiplicande	a
Multiplicateur	b
Produit	ab

2. S'il y a des nombres & des ſignes differens ou ſemblables dans la Multiplication des grandeurs incomplexes, vous ſuivrez les Regles generales ci-deſſus tant pour les ſignes que pour les nombres. Multiplier $+a$ par $-2b$, je poſe pour produit $-2ab$, pour multiplier $-4xx$ par $12zz$, j'écris au produit $-48xxzz$.

3. Dans les grandeurs complexes, il faut poſer ſéparément le multiplicande au deſſus du multiplicateur comme dans la Regles 1e, ſans avoir égard à l'arrangement des grandeurs incomplexes qui forment la grandeur complexe : mais chacune doit être accompagnée du ſigne & du nombre qui luy convient, ainſi pour multiplier $a+b-c+d$ par $x+z$; je diſpoſe les racines de la multiplication en cette ſorte.

Mutiplicande	$a+b-c+d$
Multiplicateur	$x+z$

4. Les racines étant diſpoſées, il faut multiplier ſéparément chaque grandeur incomplexe du multiplicateur par chacune du multiplicande ayant égard aux ſignes & aux nombres, ſuivant les Regles generales. Ainſi dans l'exemple cy-deſſus, il faut multiplier ſéparément la grandeur z par d par c par b & par a, ou ce qui eſt indifferent par a par b par c par d, ayant égard aux ſignes $+$ & $-$ de chaque grandeur, & aux nombres qui les accompagne, il faut autant faire la grandeur x par les grandeurs a, b, c, d.

5. Les produits de chacune des grandeurs du multiplicateur par chacune de celles du multiplicande se posent separément selon qu'ils se découvrent, ayant toûjours égard aux signes & aux nombres; ainsi pour multiplier les grandeurs cy-dessus, je commence premierement par la lettre z, posant dz, cz, bz, az, puis ayant égard aux signes, je dis $+z$ par $+z$ donne $+dz$ & $-c$ par $+z$ donne $-cz$: $+b$ par $+z$ donne $+bz$, enfin $+a$ par $+z$ donne $+az$, & continuant de même à la lettre x, le produit des grandeurs proposées se trouve de cette sorte.

Multiplier $a+b-c+d$
Par $x+z$

$az+bz-cz+dz$
$ax+bx-xc+xd$

Produit $az+ax+bz+bx-cz-cx+dz+dx$

6. Tous les produits incomplexes étant trouvez par les Regles cy-dessus, on en fait un produit total, que l'on range suivant l'ordre des lettres, tant connües que inconnües; cependant on pourroit s'en dispenser, sans qu'il y eût aucune erreur dans l'operation. Voicy plusieurs exemples qui donneront plus de lumieres.

PREMIER EXEMPLE.

Multiplier $a+b+c+d$
Par x

Produit $ax+bx+cx+dx$

Je multiplie x par a par b par c par d; disant le produit de a par x est ax: & comme le signe $+$ est le même dans le multiplicande & dans le multiplicateur, j'écris simplement au commencement ab, continuant l'operation je dis plus b par $+c$ donne $+bc$ que j'écris

en ſuite, de même $+c$ multiplié par x donne $+cx$ que j'écris au deſſous, & enfin $+d$ par x donne $+dx$; ainſi le produit des grandeurs propoſées, eſt comme vous le voyez ci-deſſus $ax+bx+cx+dx$.

Second Exemple.

Multiplier $-a-b-c-d$
Par $-z-x$

Pour faire cette multiplication je multiplie premierement $-x$ par chacune des grandeurs du multiplicande : diſant $-x$ par $-d$ donne $+dx$ ſuivant la ſeconde Regle generale. Et $-c$ par x donne $+cx$. $-b$ par $-x$ donne $+bx$. a par x donne $+ax$, ce qui donne la diſpoſition ſuivante.

Multiplier $-a-b-c-d$
Par $-z-x$

$ax+bx+cx+dx$

Et continuant à multiplier par la grandeur defective $-x$; je dis $-a$ par z donne $+az$ & $-b$ par $-z$ donne $+bz$, & $-c$ par $-z$ donne $+cz$, enfin $-d$ par $-z$ donne $+dx$, ainſi mon operation eſt finie, ce qui donne la diſpoſition ſuivante.

Multiplier $-a-b-c-d$
Par $-z-x$

$+ax+bx+cx+dx$
$+az+bz+cz+dz$

Produit total $ax+az+bx+bz+cx+cz+dx+dz$

TROISIE'ME EXEMPLE.

Multiplier a − b + c
Par y − v

Je dis + *a* par *v* donne par la troiſiéme Regle generale − *av*. & − *b* par − *v* donne + *bv*. + *c* par − *v* donne − *cv*. enſuite venant à la ſeconde grandeur y, je dis *a* par *y* donne *ay*. − *b* par *y* donne − *by*, & + *c* par *y* donne + *cy*, comme vous le voyez ici repreſenté.

Multiplier a − b + c
Par y − v

− av + bv − cv
ay + by + cy

Produit total ay − av + bv − by + cy − cv

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Multiplier a − b + c
Par a + b − c

− ac + bc − cc
ab − bb + bc
aa − ab + ac

Produit aa * − bb + 2bc − cc

Dans cet exemple multipliant *a* − *b* + *c* par − *c*, je trouve les produits − *ac* + *bc* − *cc*. & enſuite multipliant par + *b* l'on a les produits *ab* − *bb* + *bc*. enfin multipliant *a* − *b* + *c* par *a* l'on a les produits *aa* − *ab* + *ac*, qui étans adjoûtez, ſuivant les Regles du Chapitre ſecond, le produitt total eſt *aa* − *bb* + 2*bc* − *cc*. où l'on s'apperçoit que les produits inegaux − *ab* + *ab* ſe détruiſans, & de même − *ac* + *ac*

ils s'évanoüiſſent ce que nous avons repreſenté par cette petite étoile au produit total.

Cinquieme Exemple.

Multiplier $aa - ab + bb$
Par $x + y$

$aay - aby + bby$
$axx - abx + bbx$

Produit $axx - abx + aay - aby + bbx + bby$

Dans cet exemple où la grandeur a eſt élevée à la ſeconde puiſſance b de même, & ab le produit de a par b il n'y a pas plus de difficulté que dans les autres operations : car aa par y donne aay & $-ab$ par y donne $-aby$, & bb par y donne $+bby$, il en eſt de même de la grandeur x par tout le multiplicande $aa - ab + bb$ voici d'autres exemples dans des grandeurs élevées à diverſes puiſſances.

Multiplier $a^3 + aab + b^3$
Par $a3 - aab + b.^3$

$a3b3 + aab4 + b.^6$
$- a5b - a4bb - aab4$
$a6 + a5b + a3b3.$

Produit $a6 * - a4bb + 2a3b3.* + b^6$

L'on voit dans cet exemple que multipliant $a3$ par $b3$, le produit eſt $a3b3$. & aab par $b3$. eſt $aab4$. & $b3$ par $b3$ eſt neceſſairement $b6$: car multipliant les lettres il ſuffit de les joindre, & avoir égard aux ſignes par les Regles generales de ce Chapitre, le reſte de l'operation ne ſouffre aucune difficulté : voici un exemple ſimplement en caracteres.

Multiplier $a4 - a3b + b3$.
Par $x^4 - z^3$

$$- a4z3 + a3bz3 - b3z3$$
$$a4x4 - a3bx4 + b3x4$$

Prod. $a4x4 - a4z3 - a3bz3 - a3bx4 + b3x4 - b3z3$

SIXIE'ME EXEMPLE.

Multiplier $2ab + 3bb$
Par $4ax - 6bb$ 4

$$- 12ab3 - 18b4.$$
$$8aabx + 12abbx$$

Produit $8aabx + 12abbx - 12ab3. - 18b4$

Cet Exemple n'a rien de difficile, car aprés avoir multiplié les lettres par les lettres, il faut multiplier les nombres par les nombres, & les signes par les signes, ainsi multipliant ab par $- bb$ le produit est $- ab3$, & multipliant 2 par 6 le produit est 12, & par consequent le produit de $2ab$ par $- 6bb$ est $- 12ab3$, il en est de même des autres produits, ce qui paroît assez clair pour ne pas étendre ces Exemples plus au long.

AVERTISSEMENT.

Mais il faut bien se souvenir de la difference qu'il y a entre ces expressions algebriques $4d$ & $d4$; lorsque le chiffre est devant ou aprez la lettre (ce que nous avons déja remarqué ailleurs) car $4d$ signifie que la grandeur d est prise 4 fois, ainsi supposant que d valût 3, $4d$ vaudroit 12; mais $d4$ signifie que d est élevé à la 4e puissance, ainsi dans la supposition que nous venons de faire que d vaille 3 $d4$ vaudroit 81.

CHAPITRE V.

De la compoſition des Puiſſances.

AVERTISSEMENT.

COmme la compoſition des Puiſſances n'eſt proprement qu'une multiplication, il n'y a qu'à ſuivre les Regles, tant generales que particulieres que nous avons données au Chapitre precedent. Et ſi la grandeur propoſée pour racine eſt beaucoup complexe, ſe ſervir des Tables que nous avons données dans l'Arithmetique pour la compoſition & reſolution des Puiſſances; mais pour plus grande facilité nous donnerons icy quelques Exemples aprés que nous aurons formé la Table en caracteres algebriques nous propoſant de lever la grandeur complexe $a+b$ juſqu'à la 10e Puiſſance.

Multiplier	1
Par	$a+b$
Premiere Puiſſance	$1a+1b$ produit.
Multiplier	$1a+1b$
Par	$1a+1b$
	$ab+bb$
	$aa+ab$
2e Puiſſance	$aa+2ab+bb$ Produit.

Multiplier aa + 2ab + bb
Par a + b

aab + 2abb + b3
a3 + 2aab + abb

3e Puiſſance a3 + 3aab + 3abb + b3 produit

Multiplier a3 + 3aab + 3abb + b3
Par a + b

a3b + 3aabb + 3ab3 + b4
a4 + 3a3b + 3aabb + ab3

4e Puiſſ. a4 + 4a3b + 6aabb + 4ab3 + b4 produit

Multiplier a4 + 4a3b + 6aabb + 4ab3 + b4
Par a + b

a4b + 4a3bb + 6aab3 + 4ab4 + b5
a5 + 4a4b + 6a3bb + 4aab3 + ab4

5e P. a5 + 5a4b + 10a3bb + 10aab3 + 5ab4 + b5 pr.

[illegible]a5 + 5a4b + 10a3bb + 10aab3 + 5ab4 + b5
[illegible]ar a + b

[illegible]+a5b + 5a4bb + 10a3b3 + 10aab4 + 5ab5 + b6
+b6a6 + 5a5b + 10a4bb + 10a3b3 + 5aab4 + ab5
[illegible] + b6
6e P. a6 + 6a5b + 15a4bb + 20a3b3 + 15aab4 + 6ab5

Cette Table des Puiſſances ſe forme premierement
i multipliant l'unité par *a* + *b*, le produit forme la 1e
uiſſance ou Racine lineaire, & ce produit étant mul-
plié par luy-même, le produit *aa* + 2*ab* + *bb* eſt la 2e
uiſſance ou quarré ; & en multipliant ce dernier pro-
uit par la même racine *a* + *b*, on a la 3e puiſſance ou
be, telle qu'on l'avoit ci-deſſus dans l'operation, &

continuant ainſi de ſuite, on aura enfin la Table ſuivante qui exprime la même choſe que celle dont nous avons parlé, & donné l'uſage dans l'Arithmetique au Chapitre de la compoſition des Puiſſances.

Premier Exemple.

Pour le quarré ou 2e Puiſſance.

On demande le quarré de la racine ſuivante $bb + 2bc + 6bd + 4cc$.

Et premierement je conſidere les deux premieres grandeurs incomplexes, ſavoir $bb + 2bc$, comme ſeparées des deux autres; & ſuivant le ſecond parallele & les Regles que nous avons données en Arithmetique, je trouve que pour avoir le quarré complexe de $bb + 2bc$, il faut ſuivant la Table prendre le quarré, premierement de bb + le quarré de $2bc$ + deux fois le produit de bb par $2bc$, ainſi que le deſigne le ſecond parallele $aa + 2ab + bb$ dans la Table cy-devant; c'eſt pourquoy je n'ay qu'à multiplier ſuivant les Regles du Chapitre precedent, premierement bb par $bb + 2bc$ par $2bc$, & enfin bb par $2bc$, qu'il faut doubler pour avoir le quarré $b4 + 4bbcc + 4b3c$.

Racine bb + 2bc.

4bbcc le quarré de 2bc.
b4 le quarré de bb
2b3c le prod. de bb par 2bc
2b3c le même produit.

Quarré b4. + 4b3c + bbcc

Cela fait, je conſidere la grandeur complexe $bb + 2bc$, comme une ſeule grandeur dont j'ay déja trouvé le quarré; ainſi luy adjoûtant la troiſiéme grandeur incomplexe + 6bdd de la racine propoſée j'opere comme ſi ce n'étoit que 2 racines incomplexes, c'eſt pour-

qu

TABLE DES PUISSANCES.

a	b	Premiere puiſſance.					
aa	bb	2ab	deuxiéme puiſſance.				
aaa	bbb	3aab	3abb	troiſiéme puiſſance.			
a4	b4	4a3b	4ab3	6aabb	quatriéme puiſſance.		
a5	b5	5a4b	5ab4	10a3bb	10aab3	cinquiéme puiſſance.	
a6	b6	6a5b	6ab5	15a4bb	15aab4	20a3b3	ſixiéme puiſſance.

uoy ſuivant le ſecond rang de la même Table, je cherche le quarré premierement de + 6*bd* qui eſt 36 *bbdd*, & enſuite les 2 produits de *bb* + 2 *bc* par + 6*bd*, ce qui donne 12*b*3*d* + 24*bbcd*, & par conſequent *b*4 + 4*b*3*c* + 4*bbcc* + 12*b*3*d* + 24*bbcd* + 36*bbdd*, ſont le quarré de la racine complexe *bb* + 2*bc* + 6*bd*, comme on le void dans cette diſpoſition.

racine bb + 2bc + 6bd

b4 + 4b3c + 4bbc quarré de bb + 2bc.
36bbdd quarré de 6bd.
6b3d + 12bbcd prod. de bb + 2bc par 6bd
6b3d + 12bbcd le même produit.

b4 + 4b3c + 4bbcc + 12b3d + 24bbcd + 36bbdd q.

Pourſuivant mon operation je conſidere la racine complexe *bb* + 2*bc* + 6*bd* comme une ſeule racine à laquelle j'ajoûte la derniere racine incomplexe + 4*cc*; c'eſt pourquoy il ne me reſte plus ſuivant la même Table qu'à chercher le quarré de + 4*cc* qui eſt 16*c*4. & 2 fois le produit de la racine *bb* + 2*bc* + 6*bd* par la derniere grandeur + 4*cc*. qui ſont 8*bbcc* + 16*bc*3 + 48 *bcd*, leſquels adjoûtez au quarré de la grandeur *bb* + 2 *bc* + 6*bd* donneront le quarré requis *b*4 + 4*b*3*c* + 4*bbcc* + 12*b*3*d* + 24*bbcd* + 36*bbdd* + 8*bbcc* + 16*bc*3 + 48*bccd* + 16*c*4; ou par abregé *b*4 + 4*b*3*c* + 12*bbcc* + 4*b*3*d* + 24*bbcd* + 36*bbdd* + 16*bc*3 + 48*bccd* + 16*c*4. comme le repreſente la diſpoſition ſuivante.

Et s'il ſe trouvoit encore une cinquiéme grandeur, il faudroit conſiderer ces quatre premieres grandeurs comme une ſeule grandeur : ainſi luy adjoûtant la cinquiéme, il faudroit en prendre le quarré par la multiplication ordinaire, & enſuite 2 fois le produit des quatre premieres grandeurs par la cinquiéme, ce qui ſe fait encore par la multiplication ordinaire dont nous avons donné les Regles au Chapitre precedant.

Racine propoſée bb + 2bc + 6bd + 4cc

b4 + 4b3c + 4bbcc + 12b3d + 24bbcd + 36bbdd
Quarré de la racine bb + 2bc + 6bd.
16c4. Le quarré de la racine 4cc.
4bbcc + 8bc3 + 24bccd produit de bb + 2bc + 6bd par la derniere grandeur + 4cc.
4bbcc + 8bc3 + 24bccd le même produit.

b4 + 4b3c + 12bbcc + 12b3d + 24bbcd + 36bbdd
16bc3 + 48bccd + 16c4.
Somme totale & quarré de la racine propoſée.

Second Exemple.

Pour la troiſiéme Puiſſance.

On propoſe de trouver la troiſiéme Puiſſance de la grandeur complexe $aa + 2bc + 3ac$.

Il faut premierement conſiderer les deux premieres grandeur $aa + 2bc$ comme ſeparées de la troiſiéme grandeur + 3ac, & chercher le cube de ces deux grandeurs par l'uſage de la Table cy-devant au Parag. 3e, où l'on trouve $a3 + 3aab + 3abb + b3$, c'eſt à dire qu'il faut prendre le cube de l'une & l'autre grandeur, + 3 fois le produit du quarré de chacune par l'autre grãdeur; ainſi pour avoir le cube de $aa + 2bc$, il faut multiplier aa par luy-même, & ſon produit $a4$ encore par aa ce qui donne ab pour le cube aa. Pareillement, il faut prendre le cube de $2bc$ en le multipliant premierement par luy-même; ce qui donne $4bbcc$, & enſuite le produit par $2bc$ qui donne $8b3c3$ pour le cube de 2bc, & multipliant le quarré de aa par $2bc$, l'on aura $2a4bc$, que l'on multipliera par 3, ce qui donnera $6a4bc$. Et multipliant encore le quarré de 2bc, ſavoir, $4bbcc$ par aa, il'on aura $4aabbcc$ qui ſera le produit du quarré de 2bc par la premiere grandeur a, & ce produit étant poſé trois fois, l'on aura pour le cube de $aa + 2bc$ la grandeur $ab + 6a4bc + 12aabbcc + 8b3c3$, comme le repreſente cette diſpoſition.

Racine $aa + 2bb$

$a6$ — 3e Puiſſance de aa
$8b3c3$ — 3e Puiſſance de 2bc
$2a4bc$ — Produit du quarré de aa par 2bc.
$2a4bc$ — même produit
$2a4bc$ — même produit
$4aabbcc$ - Produit du quarré de 2bc par aa.
$4aabbcc$ - même produit
$4aabbcc$ - même produit.

Somme $a6 + 6a4bc + 12aabbcc + 8b3c3$ cube ou troiſiéme Puiſſance.

Conſiderant enſuite la grandeur complexe $aa + 2bc$ comme une ſeule grandeur je luy ajoûte la troiſiéme grandeur propoſée $+ 3ac$, operant de la même maniere ſur ces deux grandeurs ; ainſi je cherche premierement le cube de la grandeur $+ 3ac$ qui ſe trouve $27a3c3$ que j'ajoûte au cube de la grandeur complexe $aa + 2bc$ que nous avons trouvé dans l'operation precedente. Je cherche enſuite le produit du quarré de $aa + 2bc$ qui eſt $a4 + 4aabc + 4bbcc$ par $+ 3ac$, je trouve que c'eſt $3a5c + 12a3bcc + 12abbc3$, que je poſe 3 fois & faiſant le même du quarré de $5ac$ qui eſt $9aacc$ par la même grandeur $aa + 2bc$ je trouve le produit $9a4cc + 18aabc3$, que je poſe trois fois, & leur ſomme eſt le cube requis de la racine propoſée $aa + 2bc + 3ac$, comme le repreſente le calcul ſuivant.

Racine aa + 2bc + 3ac

a6 + 6a4bc + 12aabbcc + 8b3c3 . le cube de la grandeur aa + 2bc

27a3c3 le cube de la grandeur 3ac

3a5c + 12a3bcc + 12abbc3 produit du quarré de la 1e par la 2e

3a5c + 12a3bcc + 12abbc3 même produit

3a5c + 12a3bcc + 12abbc3 même produit.

9a4cc + 18aabc3 produit du quarré de la 2e par la premiere

9a4cc + 18aabc3 même produit

9a4cc + 18aabc3 même produit.

Somme a6 + 6a4bc + 12aabbcc + 8b3c3 + 9a5c + 36a3bcc + 36abbc3 + 27a4cc + 54aabc3 + 27a3c3. cube ou 3e puiſſance requiſe.

Troisie'me Exemple.

Pour la quatriéme Puiſſance.

Si l'on veut continuer de lever la grandeur propoſée dans l'exemple ci-deſſus juſqu'à la quatriéme puiſſance: il faudra ſe ſervir de la même metode, ſeparant premierement les deux grandeurs *aa* + 2bc, dont on prendra la quatriéme puiſſance ſuivant le quatriéme rang parallele de la table cy-devant où l'on trouve $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$; ainſi j'éleve premierement la grandeur *aa* à la quatriéme puiſſance, & je trouve a8, que je poſe au lieu de l'Addition, pareillement j'éleve 2*bc* à la quatriéme puiſſance, & je trouve $16b^4c^4$ que je poſe au ſecond lieu de l'addition. Je multiplie enſuite le cube de *aa* ou a^6 par la grandeur 2*bc* & je trouve 24*abc* que je quadruple, & le produit 96*abc* je le poſe pour les quatre produits du cube de la premiere par la ſeconde au lieu de l'Addition. Je multiplie encore le quarré de *aa* par le quarré de 2*bc*, c'eſt à dire a4 par $4bbcc$, & le produit $4a^4bbcc$, je le

ſextuple ce qui donne $24a4bbcc$, que je poſe au lieu de l'addition. Enfin je cherche le produit du cube de $2bc$, ou ce qui eſt le même $8b3c3$ par la grandeur aa, & je trouve $8aab3c3$ qui étant quadruplé, je poſe $24aab3c3$ au lieu de l'addition, dont la ſomme eſt la 4e puiſſance de la grandeur $aa+2bc$.

Racine $aa+2bc$

$a8$ ——— 4e Puiſſance de la premiere grandeur.
$16b4c4$ — 4e Puiſſance de la 2e grandeur.
$8a6bc$ — Les 4e produits du cube de la 1e grandeur par la ſeconde.
$24a4bbcc$ Les 6e produits du quarré de la premiere par le quarré de la ſeconde.
$24aab3c3$ Les 4e produits du cube de la premiere par la ſeconde.

Somme $a8+8a6bc+24a4bbcc+24aab3c3+16b4c4$ qui eſt la 4e puiſſance de la racine $aa+2bc$.

Cette operation achevée je ne conſidere plus la grandeur $aa+2bc$ que pour la premiere grandeur, dont j'ay déja trouvé la quatriéme puiſſance: ainſi lui ajoutant la grandeur $+3ac$ j'opere comme ci-devant. Je prens donc premierement la quatriéme puiſſance de la grandeur $3ac$ qui eſt $81a4c4$ que je poſe au lieu de l'addition; Secondement je multiplie le cube de la premiere grandeur par la ſeconde, c'eſt à dire le cube de $aa+2bc$ par $3ac$, ou ce qui eſt le même $a6+6a4bc+12aabbcc+8b3c3$ par $3ac$ le produit eſt $3a7c+18a5bcc+36a3bbc3+24ab3c4$ que je quadruple, & poſe ce qui en provient au lieu de l'addition. Troiſiémement je cherche le produit du quarré de $aa+2bc$ par le quarré de $3ac$, c'eſt à dire de $a4+4aabc+4bbcc$ par $9aacc$, ce qui donne $9a6cc+36a4bc3+36aabbc4$, que je poſe 6 fois, ou bien que je multiplie par 6 & ce qui en provient je le mets au lieu de l'addition. Enfin je cherche les produits du cube de $3ac$ par la premiere grandeur $aa+2bc$, c'eſt à dire $27a3c3$ par $aa+2bc$, & je trouve $27a5c3+54a3bc4$ que je quadruple, & le produit je le poſe au lieu de l'addition, comme on le verra ci-aprés.

Racine $aa + 2bc + 3ac$

$a8 + 8a6bc + 24a4bbcc + 24aab3c3 + 16b4c4$
Qui eſt la 4e puiſſance de la 1e grandeur $aa + 2bc$
$81a4c4$ Qui eſt la 4e puiſſance de la 2e grandeur $3ac$
$122a7c + 72a5bcc + 144a3bbc3 + 96ab3c4$ qui ſont
[les 4 produits du cube de la 1 grandeur par la 2e
$54a6cc + 216a4bc3 + 216aabbc4$ qui ſont les 6 pro-
[duits du quarré de la 1 grandeur par le quarré de la 2
$108a5c3 + 216a3bc4$ qui ſont les 4 produits du cube
[de la 2 grandeur par la 1.

So $\left\{\begin{array}{l} a8 + 8a6bc + 24a4bbcc + 24aab3c3 + 16b4c4 \\ + 122a7c + 72a5bcc + 144a3bbc3 + 96ab3c4 \\ + 54abcc + 216a4bc3 + 216aabbc4 + 108a5c3 \\ + 216a3bc4 + 81a4c4 \text{ qui ſont la quatriéme} \end{array}\right.$
[puiſſance de la racine propoſée.

On trouve un plus grand nombre d'exemples dans nôtre Traité entier de l'Algebre, il y en a ici bien ſuffiſamment pour ceux qui ne ſont que commencer.

CHAPITRE VI.

De la Diviſion ou Partition.

Regles Generales.

1° Diviſant + par + l'expoſant donne + Par exemple diviſant + 8 par + 4 l'expoſant donne + 2.

2° Diviſant − par − l'expoſant donne +. − 8 diviſé par − 4 donne + 2.

3° Diviſant + par − l'expoſant donne − :+ 8 diviſé par − 4 donne pour l'expoſant − 2.

4° Diviſant − par + l'expoſant donne encore − ainſi la diviſion de − 8 par + 4 donne au quotient − 2.

D'où l'on forme ce principe general de la diviſion + diviſé par + ou − par − donne +: & + diviſé par − ou par + donne −.

5. La diviſion des nombres qui determinent les quantitez des grandeurs literales ſuit les Regles de l'Arithmetique, de ſorte qu'il faut toûjours faire attention à trois choſes, premierement aux ſignes + & − ſuivant les quatre Regles ci-deſſus; ſecondement aux nombres en les diviſant par les Regles de l'Arithmetique, troiſiémement aux lettres en ſuivant les Regles ci-aprés.

6. La Diviſion des lettres s'exprime par un petit trait entre la lettre qui exprime le dividende, & celle qui exprime le diviſeur; celle-ci étant toûjours poſée ſous la lettre du dividende, & cette expreſſion en eſt l'expoſant. Par exemple pour diviſer a par b on poſe a ſur b en cette ſorte $\frac{a}{b}$ ainſi $\frac{a}{b}$ eſt l'expoſant de la diviſion d'a par b, & ab par cd donne pour expoſant $\frac{ab}{cd}$.

7. Mais ſi le diviſeur eſt exprimé par des lettres qui ſoient conteniües dans le dividende, l'on ſe contente de les effacer dans le dividende, & le reſtant en eſt l'expoſant. Pour diviſer ab par a, on écrit au lieu du quotient ſimplement b, où l'on efface l'a du dividende, adc par da donne pour expoſant c, abd par abd donne 0 à l'expoſant $abcd$ par ac donne bd. a^3bbc+ par $aabc^3$ donne au quotient abc.

8. Et ſi le diviſeur contient quelques lettres compriſes dans le dividende, & quelques autres qui n'y ſoient pas compriſes, l'on retranche les lettres ſemblables qui ſont au dividende & au diviſeur, & les autres ſont poſées ſous un trait; ainſi $abcd$ diviſé par abx donne $\frac{cd}{x}$ & a^5ccdd diviſé par a^3cde donne $\frac{a^2cd}{e}$, & ainſi de toutes autres grandeurs incomplexes.

Regles particulieres de la Diviſion.

1. Si les grandeurs ſont incomplexes tant au dividende qu'au diviſeur, vous ſuivrez ſeulement les Re-

gles generales cy-deſſus : mais ſi l'un & l'autre, le dividende & le diviſeur ſont complexes, poſez vôtre dividende ſeparément, & le diviſeur dans un petit cercle à côté pour y faire attention quand il ſera neceſſaire, & au deſſus vous placerez l'expoſant. Par exemple, ſi on propoſoit de diviſer $ac + ad$ par $c + d$, je les diſpoſerois en cette ſorte.

$$\text{Dividende } ac + ad \begin{cases} a \text{ expoſant.} \\ c + d \text{ diviſeur.} \end{cases}$$

2. Ayez toûjours égard aux trois choſes que nous avons dites aux Regles generales, ſavoir aux ſignes, aux nombres & aux lettres, & en ſuite retranchez du dividende le diviſeur autant de fois qu'il ſe pourra, poſant au quotient le reſultat de chaque operation ; & s'il reſte quelque grandeur qui ne puiſſe pas être diviſée exactement, vous en ferez une fraction, comme nous le dirons cy-aprés.

3. Diviſez premierement la premiere grandeur du dividende par la premiere du diviſeur, & en ſuite poſez l'expoſant en ſon lieu. Secondement vous multiplierez le quotient par le diviſeur, & le produit ſera retranché du dividende, poſant au deſſous le reſtant s'il y en a.

4. Vous continuerez d'operer de la même ſorte ſur le nouveau reſte, & une troiſiéme fois ſur un autre reſte s'il y en a ; enfin cette reïteration ſe fera juſqu'à ce que vous ayez parcouru toutes les grandeurs du dividende. Voici pluſieurs exemples qui éclairciront ces Regles.

Premier Exemple.

On demande de diviſer $ac + ad$ par $c + d$, je les diſpoſe comme ci-devant en cette maniere.

$$\text{Dividende } ac + ad \begin{cases} a \text{ expoſant.} \\ c + d \text{ diviſeur.} \end{cases}$$

Et je dis l'expoſant de ac premiere grandeur du divi-

dende par c premiere grandeur du diviſeur eſt a, j'écris donc a au lieu de l'expoſant, & multipliant tout le diviſeur $c + d$ par a le produit $ac + ad$ je le ſouſtrais de $ac + ad$, ainſi ne reſtant rien je conclus que a eſt l'expoſant de la Diviſion propoſée.

Du dividende $ac + ad$ { a expoſant. Multiplier $c + d$
Souſtraire $+ ac + ad$ { $c + d$ diviſeur. Par a

Reſtant $0 + 0$ $ac + ad$

Second Exemple.

Pour diviſer $ax + bx + az + bz$ par $x + z$, je diſpoſe en même ſorte le dividende & le diviſeur.

Dividende $ax + bx + az + bz$ { a
$x + z$ diviſeur.

Je dis enſuite ax premiere grandeur du dividende, étant diviſé par x l'expoſant eſt a, ainſi je poſe a au lieu de l'expoſant comme vous le voyez cy-deſſus. Je multiplie enſuite tout le diviſeur $x + z$ par l'expoſant a, & le produit $ax + az$ étant ſouſtrait du dividende $ax + bx + az + bz$, il reſte $+ bx + bz$ pour l'operation ſuivante.

De $ax + bx + az + bz$ { $a + b$ expoſant.
Souſtraire $ax + az$. { $x + z$ diviſeur.

Reſtent $bx + bz$.

Je dis pour commencer la ſeconde operation ſur le reſtant qui eſt $bx + bz$, l'expoſant de bx par x eſt b que je poſe au lieu de l'expoſant avec le ſigne $+$ comme vous le voyez cy-deſſus ; & multipliant toute le

diviſeur $x+z$ par b le produit $bx+bz$ je le ſouſtrais du reſtant $bx+bz$, ainſi ne reſtant rien aprés la ſouſtraction je conclus que $a+b$ eſt un expoſant juſte de la grandeur $ax+bx+az+bz$ par $x+z$.

De	$bx+bz$	$*+b$
Souſtraire	$bx+bz$	$x+z$
Reſtant	$0+0$	

Troisie'me Exemple.

Pour diviſer la grandeur $az+ax+bx+bz+cz-cx$ par $z-x$, ayant diſpoſé les grandeurs comme nous avons remarqué, je cherche l'expoſant de az premiere grandeur du dividende par z premiere grandeur du diviſeur, & je poſe a au quotient; je multiplie tout le diviſeur $z+x$ par $+a$, & le produit $az-ax$, je le ſouſtrais du dividende, de ſorte qu'il ne me reſte que $bx-bz+cz-cx$, ſur qui je fais une ſeconde operation.

De	$az-ax+bx-bz+cz-cx$	a
Souſtraire	$az-ax$	$z-x$
Reſtant	$*\quad *\quad bx-bz+cz-cx$	

Dans cette ſeconde operation je cherche l'expoſant de la premiere grandeur du reſtant bx par la ſeconde du diviſeur $-x$ d'autant que z ne peut pas diviſer bx, ou bien je prens la grandeur $-bz$ que je diviſe par $+z$, il n'importe laquelle on prenne, toutes deux ont le même effet, & donne le même quotient $-b$ car bx par $-x$ donne $-b$, & $-bz$ par $+z$ donne pareillement b pour quotient, ainſi multipliant b par $z-x$ ou $-x+z$, le produit ſera $bx-bz$, qui étant ſouſtrait des grandeurs $bx-bz$, le reſtant ſe trouve $cz-cx$ pour une 3e operation.

De * * bx − bz + cz − cx { * − b + c
Souſtraire bx − bz { z − x

Reſtant * * * * , cz − cx

J'opere ſur ce reſtant de la même maniere que ci-devant : ainſi je dis, l'expoſant de *cz* par z eſt + c que je poſe au quotient comme vous voyez ci-deſſus, je pouvois également prendre − *cx* pour la diviſer par − *x*, & en ce cas j'aurois également pour quotient + *c*, ainſi multipliant + *c* par le diviſeur cz − cx, le produit donne cz − cx, qui étant retranché du reſtant au dividende il reſte ⊖, ainſi la diviſion eſt finie, & ſans fraction, comme vous voyez le tout ici repreſenté.

De * * * * cz − cx { * * + c { a − b + c quotient total.
Souſtraire cz − cx { z − x

Reſtant ⊖ + ⊖

Dans cet Exemple l'on voit que l'ordre des grandeurs dans le dividende ou dans le diviſeur ne ſert de rien : car on peut commencer par laquelle des grandeurs du dividende que l'on veut, & par quelque grandeur du diviſeur que l'on voudra, pourveu que les grandeurs que l'on prend dans l'un & dans l'autre puiſſe le diviſer.

Mais ſi j'ajoûtois au dividende propoſé une grandeur qui ne peut ſe diviſer par z − x, il eſt evident qu'il en faudroit faire une fraction, Par exemple, ſi l'on propoſoit à diviſer la grandeur ſuivante *az* − *ax* + *bx* − *bz* + *cz* − *cx* + *dy* par le même diviſeur z − *x*, il eſt evident qu'aprés avoir trouvé l'expoſant *a* − *b* + *c*, le reſtant *dy* ne pouvant être diviſé par z − x, il en faut faire une fraction en cette ſorte $\frac{dy}{z-x}$, ainſi l'on aura pour expoſant juſte la grandeur a − b + c $\frac{dy}{z-x}$.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Diviſer $a^3 - b^3$ par $a - b$, je dis a^3 diviſé par a donn
aa au quotient, je multiplie donc le diviſeur $a - b$ p
aa, & le produit $a^3 - aab$ étant retranché du divide
de, il reſte $aab - b^3$, car

du dividende $a^3 - b^3$ { $aa + ab$
Souſtraire $a^3 - aab$ { $a - b$

Reſtant $* + aab - b^3$

a^3 peut être retranché de a^3, & il s'évanoüit, m
retrancher $- aab$ de $- b^3$, c'eſt ajoûter aab à $- b^3$
par conſequent le reſtant $+ aab - b^3$ ſur qui j'ope
de nouveau, diſant l'expoſant de aab par a eſt ab, a
multipliant le diviſeur $a - b$ par $+ ab$ le produit
$aab - abb$ que je ſouſtrais du reſtant cy-deſſus, &
trouve un nouveau reſte $+ abb - b^3$, comm'il eſt i
repreſenté : car ſouſtraire aab de aab, il reſte $\ominus$ &
conſequent il s'évanoüit: mais ſouſtraire $- abb$ de $-$
c'eſt ajoûter $+ abb$ à $- b^3$, ainſi le reſtant eſt $+ abb$
b^3 qui demande une nouvelle operation.

De $* + aab - b^3$ { $aa - ab$
Souſtraire $+ aab - abb$ { $a - b$ diviſeur.

Reſtant $* * abb - b^3$

Je continüe à diviſer le reſtant $abb - b^3$ par le diviſ
$a - b$, & je trouve que abb diviſé par a donne pour
poſant bb, ainſi multipliant le diviſeur $a - b$ par bb
trouve le produit $abb - b^3$ qui étant ſouſtrait du
nier reſtant il reſte $\ominus$ ainſi ma diviſion eſt finie, &
quotient total eſt $aa + ab + bb$: on en ſera convain
ſi on multiplie l'expoſant $aa + ab + bb$ par $a - b$: ca
produit donnera ſeulement $a^3 - b^3$, parce que les
tres s'évanoüiſſent.

De ** abb − b3 } * *bb { aa + ab + bb exposant total.
Souſtraire abb − b3 } a − b {

⊖ ⊖

Voicy quelques exemples ſemblables, que je propoſe ſeulement en caracteres Algebriques.

Diviſer a3 − 3aab + 3abb − b3 { Expoſant aa − 2ab + bb
ôter a3 − aab
Reſtant * − 2aab + 3aab − b3 { a − b diviſeur
ôter − 2aab + 2abb
Reſtant * + 2abb − b3
ôter + 1abb − b3
Reſtant ⊖ ⊖

{ Multiplications
a − b
aa premier quotient
a3 − aab produit.
a − b
− 2ab. 2 quotient.
+ 2aab + 2abb produit
a − b
+ bb
abb − b3 produit.

Diviſer a3 + b3 { Expoſant aa − ab + bb
ôter a3 + aab
Reſtant * − aab + b3 { a − b diviſeur
ôter − aab − abb
Reſtant * + abb + b3
abb + b3
Reſtant ⊖ ⊖

{ a + b
aa. premier quotient.
a3 + aab premier produit.
a + b
− ab. ſecond quotient.
− aab − abb ſecond produit.
a + b
bb. 3. quotient.
abb + b3 troiſiéme produit.

CINQVIE'ME EXEMPLE.

On propoſe de diviſer z6 − 1224 − 10022 − 144 par zz − 18.

Pour cela je diſpoſe le dividende & le diviſeur comme cy-devant aux Exemples propoſez; & enſuite je dis z6 divisé par zz donne z4 au quotient, que je multiplie par le diviſeur zz − 18, & le produit z6 − 18z4 je le ſouſtrais du dividende, ce qui donne la diſpoſition ſuivante.

Dividende.	Exposant.
$z6 - 12z4 - 100zz - 144$	$z4$
ôter $z6 - 18z4$	$zz - 18$ diviseur,

Restant* $+6z4 - 100zz - 144$.

Je continuë l'operation sur le restant, & je dis $+6z4$ divisé par zz donne 6 pour le nombre & zz pour les lettres, de sorte que le quotient est donc $+6zz$, que je pose au lieu du quotient, & que je multiplie par le diviseur $zz - 18$, le produit qui en resulte est $6z4 - 108zz$, que je soustrais du dividende, & me donne la disposition suivante.

$6z4 - 100zz - 144$	$z4 + 6zz$
ôter $6z4 - 108zz$	$zz - 18$.

Restant* $+8zz - 144$

Continuant de la même maniere je dis $8zz$ divisé par zz donne $+8$, je pose donc $+8$ au quotient, & l'ayant multiplié par le diviseur, le produit qui en resulte $8zz - 144$, je le soustrais du dividende, & il ne reste rien, de sorte que $z4 + 6zz + 8$ est le quotient requis.

$8zz - 144$	$z4 + 6zz + 8$
ôter $8zz - 144$	$zz - 18$

Restant 0 0

AVERTISSEMENT.

Ie crois que ces exemples suffisent pour peu que l'on veüille se donner de la peine, & que l'on soit attentif, on trouvera dans les Exemples proposez toutes les difficultez qui peuvent se trouver dans les divisions, Il faut seulement se souvenir de ne pas se

ndre dans le calcul, & ſur tout dans les ſouſtractions: mais és toutes les ſouſtractions il ſe trouve quelque reſtant qui ne ſe diviſer par le diviſeur prepoſé, on en fera une fraction emple, ſi on propoſoit à diviſer z6 − 12z4 − 100zz − + yy *par* zz − 18, *l'on trouveroit au quotient* z4 + + 8, *& le reſtant* + yy *qu'il faudroit poſer à côté ſur it trait, & le diviſeur deſſous en cette maniere* $\frac{yy}{zz-8}$ *comme le voyez cy-deſſous.*

z6 − 12z4 − 100zz − 144 + yy { z4 + 6zz + 8 [+ $\frac{yy}{zz-8}$; zz − 8

er z6 − 18z4

---

ant * + 6z4 − 100zz − 144 + yy
ôter 6z4 − 108zz

Reſtant * + 8zz − 144 + yy
ôter 8zz − 144

Reſtant * * yy qui ne peut ſe diviſer.

CHAPITRE VII.

De l'extraction des Puiſſances.

Regles Generales.

DAns l'extraction des racines, quelles qu'elles ſoient, il faut obſerver pour les ſignes les mêRegles que dans la Diviſion.

. S'il ſe trouve des nombres qui precedent les ndeurs litterales, il faut encore ſuivre les mêmes gles que celles de l'Arithmetique pour en extraire racines.

. Si la grandeur eſt incomplexe pour la racine rrée, vous prendrez la moitié du denominateur la puiſſance; pour la racine cubique vous en prenz le tier; pour la quatriéme le quart, & les expo-

ſans qui en reſulteront ſeront les racines quarrée cu-
bique quatriéme, & ainſi de toute autre puiſſance
telle que l'on voudra par exemple pour prendre la ra-
cine quarrée de aa vous aurez a ; pour avoir celle de
b4, vous prendrez bb qui partage b4, pour prendre la
racine quarrée de z6 vous aurez z3, & pour la racine
cubique de a3 vous aurez a qui diviſe le denomina-
teur de la puiſſance ; & aa eſt la racine cubique de a6
bb la racine cubique de b6 ; & pour la racine quatri-
me a eſt celle de a4, & bb celle de b8 & cc la racine
de c10 xx la racine ſixiéme de x12, ce qui eſt facile à
comprendre : car pour faire le quarré de a, il faut ſe-
lement poſer ac, & pour le cube a3, & pour la 4e puiſ-
ſance a4, & ainſi de toute ſorte de puiſſances.

4. Si la grandeur eſt complexe vous choiſirez par-
mi les incomplexes celle dont vous pourrez plus fa-
lement extraire la racine propoſée que vous poſerez
au quotient avec le ſigne qui lui convient.

5. La racine que vous aurez trouvée ſera élevée à
la puiſſance la plus proche de celle dont vous cher-
chez la racine, & ce produit étant multiplié par le
denominateur de la racine, ce nouveau produit ſera
poſé au lieu du diviſeur.

6. Vous chercherez dans les divers produits des
grandeurs incomplexes celle qui pourra être diviſée
au juſte par le diviſeur que vous avez trouvé, & le
quotient étant poſé avec ſon ſigne à côté de la pre-
miere racine incomplexe trouvée. Vous cherche-
tous les produits qui conviennent à la puiſſance, de
vous cherchez la racine par le moyen de la Table
devant de la compoſition des puiſſances +, la puiſ-
ce qui convient à la racine que vous avez trou-
nouvellement, & tous ces produits ſeront ſouſtra
de ceux qui leurs repondent, & le reſtant poſé
deſſous pour une nouvelle opération.

7. S'il faut continuer la recherche d'une nouv
racine vous conſidererez celles que vous avez
trouvée comme ſi ce n'en étoit qu'une, & l'ay
élevée (comme nous avons dit au nombre) à la

ance la plus proche de celle dont vous cherchez la acine, & enſuite multiplié le produit qui en reſulte ar le denominateur de la racine que vous cherchez, e nouveau produit ſera le diviſeur qui donnera au uotient une nouvelle racine.

8. Vous chercherez enſuite dans les grandeurs reſtantes celle qui pourra être diviſée par ce nouveau iviſeur, & le quotient qui en proviendra ſera celuy ue l'on cherche pour racine, dont vous chercherez ous les divers produits avec les deux premieres raciens conſiderées comme une ſeule ſuivant la table de ecompoſition des puiſſances au rang qui convient à racine que vous cherchez, & tous ces produits étant ouſtraits des grandeurs reſtantes vous aurez achevé operation, s'il ne reſte plus rien.

9. Que s'il reſtoit encore quelques grandeurs ſuffantes pour faire une quatriéme operation, vous onſidererez toutes les racines trouvées comme une ule racine operant de la même maniere que nous ons dit ci-deſſus aux nombres 7 & 8 : Mais ſi la randeur reſtante ne peut pas ſuffire à une nouvelle peration; c'eſt une marque que la racine eſt ſourde, e que vous marquerez; comme nous le dirons cyprés par le ſigne qui convient à la racine.

10. Il arrive ſouvent que tout d'un coup vous ouverez la racine requiſe en conſiderant les granurs ſimples qui ſont exprimées dans celle que vous ous êtes propoſée, ce que vous connoîtrez, ſi aprés s avoir poſez ſeparément avec leurs ſignes, vous en ourſuivez la puiſſance qui leur convient, & qu'elle onne un même produit. Voici des exemples qui laireiront ces Regles.

Premier Exemple.

On demande la racine quarrée de $xx + 2xxx + xx$. remierement je conſidere ſuivant la dixiéme Regle ue la grandeur propoſée n'eſt compoſée que des roduits de la grandeur x & x; c'eſt pourquoy me

propoſant de poſer $z + x$ pour la racine quarrée, j'éleve par les Regles du Chapitre cinquiéme $z + x$ à la deuxiéme puiſſance, & trouvant que le produit qui en reſulte eſt le même que celuy que je m'étois propoſé, je conclus que $z + x$ eſt la racine requiſe.

Il en ſeroit encore de même ſi on propoſoit de trouver la racine quarrée de $z4 + 2zzxx + x4$: car conſiderant $z4$ comme un quarré, & en prenant la racine $zz +$ la racine xx du quarré $x4$. J'écris au quotient $zz + xx$ que j'élevé enſuite à la deuxiéme puiſſance, & trouvant que le produit qui en reſulte eſt le même que je m'étois propoſé, je conclus que $zz + xx$ eſt la racine quarrée de $z4 + 2zzxx + x4$.

Second Exemple.

On propoſe d'extraire la racine quarrée de $aa + 2abc + bbcc + 6ad + 6bcd + 9dd$.

Je conſidere comme cy-devant que la grandeur propoſée eſt compoſée des lettres a, b, c, d, ainſi me propoſant ces quatre grandeurs pour racines, je les éleve à la ſeconde puiſſance; mais ne trouvant pas que le produit qui en reſulte ſoit le même que celui que je m'étois propoſé, je cherche la racine par les autres Regles cy-deſſus.

Ainſi conſiderant le quarré aa, j'en prens la racine quarrée a, que je poſe au lieu du quotient, ſuivant la quatriéme Regle, & j'efface le quarré aa. Et par la 5 Regle j'éleve cette racine a à la puiſſance la plus proche de aa, c'eſt à dire la premiere puiſſance ou $1a$ que je double, puiſque 2 eſt le denominateur de la racine que je cherche, ainſi je poſe $2a$ pour diviſeur.

	$aa + 2abc + abcc + 6ad + 6bcd + 9dd$	
ôter	aa	} a racine
Reſtant	$* 2abc + bbcc + 6ad + 6bcd + 9dd$	} $2a$ diviſ.

Par la ſixiéme Regle je diviſe $2abc$ par $2a$, & le quo

ent qui en provient, ſavoir bc je le poſe pour ſecon-
e racine à côté de la premiere avec le ſigne $+$, &
herchant dans la table de la compoſition des puiſ-
nces je trouve au ſecond Parallele que les produits
: la ſeconde puiſſance ſont $2ab+1bb$, c'eſt à dire deux
is le produit de la premiere par la ſeconde, & le
uarré de la ſeconde racine. Ainſi je multiplie ma ſe-
ɔnde racine bc par la racine a & le produit abc par 2,
: qui donne 2abc ; je prens enſuite le quarré $bbcc$ de bc,
ſouſtrais l'un & l'autre du reſtant ci-deſſus, comme
eſt ici repreſenté.

$$\begin{array}{l} 2abc+bbcc+6ad+6bcd+9dd \\ 2abc+bbcc \\ \hline \text{reſtant} \quad * \quad * \quad 6ad+6bcd+9dd \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a+bc+3d \\ 2a \end{array} \right.$$

Et comme il reſte une troiſiéme operation je dou-
e les 2 racines trouvées $a+bc$ ce qui donne $2a+2bc$
ur diviſeur. Ainſi je dis $6ad$ étant diviſé par $2a$ le
otient eſt $3d$, je poſe donc $3d$ avec le ſigne $+$ pour
iſiéme racine, & multipliant $3d$, par le diviſeur $2a$
$2bc$ le produit qui en reſulte eſt $6ad+6bcd$, je prens
core le quarré de $3d$ qui eſt $9dd$, & ſouſtraits ces
is produits du reſtant ci-deſſus, ou ne reſtant rien je
nclus que mon operation eſt finie, & que la racine
opoſée eſt $a+bc+3d$.

$$\begin{array}{l} 6ad+6bcd+9dd \\ 6ad+6bcd+9dd \\ \hline \text{reſtant} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a+bc+3d \text{ racine requiſe.} \\ 2aa+2ac+2bc \end{array} \right.$$

Troisiéme Exemple.

Pour trouver la racine quarrée de $16aa-24ab+9bb$.
$-40ac-48ad+30bc+25cc+36bd-60cd+36dd$.

Premierement je cherche la racine quarrée de 16aa, c'eſt à dire premierement du nombre 16 qui eſt 4, & enſuite de aa qui eſt a, ainſi je poſe 4a au lieu du quotient, & ſouſtrais 16aa de 16aa ce qui donne la diſpoſition ſuivante.

16aa − 24ab + 9bb + 40ac − 48ad − 30bc + 25cc + 36bd − 60cd + 36dd	expoſant 4a diviſeur 8a

ôter 16aa

Reſtant * − 24ab + 9bb + 40ac − 48dd
− 30bc + 25cc + 36bd − 60cd + 36dd.

Secondement je double la racine 4a & le produit me ſert de diviſeur, je le poſe comme vous voyez deſſus, & en ſuite je diviſe − 24ab par 8a le quotient des nombres donne 3, & le quotient des lettres donne b, de ſorte que j'écris au lieu du quotient − 3b, parce que la diviſion ſe fait de − par +, & multiplie − 3b par 8a le diviſeur j'ay − 24ab pour les deux produits de 4a premiere racine par − 3b ſeconde racine, élevant la ſeconde racine − 3b à la ſeconde puiſſance j'ay + 9bb. Je ſouſtrais enſuite − 24ab + 9bb du reſtant cy-deſſus, & je trouve un nouveau reſtant, comme eſt ici repreſenté.

− 24ab + 9bb + 40ac − 48ad − 30bc + 25cc + 36bd − 60cd + 36dd	expoſant 4a − 3b diviſeur 8a

ôter − 24ab + 9bb

R. 40ac − 48ad − 30bc + 25cc + 36bd − 60cd + 36

Troiſiémement conſiderant les racines 4a −

omme une ſeule racine je la double, ce qui me donne
n nouveau diviſeur $8a - 6b$. Et diviſant $+40ac$ par
premiere grandeur $8a$ du diviſeur $8a - 6b$, je trouve
our quotient du nombre 40 par 8, 5; & c pour quo-
ent de la diviſion ac par a avec le ſigne $+$ de ſorte
ue j'écris pour nouvelle racine au lieu du quotient
$+5c$, & pourſuivant les produits de cette racine par
double de la premiere racine, ou le nouveau divi-
ur, je trouve $+40ac - 30bc$: Et pour le quarré de
$+5c$, $+25cc$, ainſi je ſouſtraits du reſtant ci-deſſus
s produits $+40ac - 30bc + 25cc$, ce qui donne un
ouveau reſtant.

oac − 48ad − 30bc + 25cc
+ 36bd − 60cd + 36dd
ter 40ac − 30bc + 25cc

4a − 3b + 5c
8a − 6b diviſeur.

eſtant − 48ad + 36bd − 60cd + 36dd.

Quatriémement je pourſuis une nouvelle racine
ns ce nouveau reſtant : ainſi je double les trois ra-
nes trouvées $4a - 3b + 5c$ ce qui donne pour divi-
ur $8a - 6b + 10c$; & diviſant la premiere grandeur du
ſtant qui eſt $- 48ad$ par la premiere du diviſeur, qui
t $8a$ le quotient donne $6d$ avec le ſigne $-$ ainſi je po-
cette nouvelle racine $- 6d$ au lieu du quotient. Je
ultiplie en ſuite cette nouvelle racine par tout le di-
ſeur, ou ce qui eſt le même par le double des trois
cines precedentes, & je trouve $- 48ad + 36bd - 60$
, auſquels ajoûtant le quarré de 6d qui eſt la nou-
lle racine; je ſouſtrais du reſtant cy-deſſus $- 48ad$
$+ 36bd - 60cd + 36dd$, & il ne reſte rien, ce qui
arque mon operation finie.

$- 48ad + 36bd - 60cd + 36dd$
ter $- 48ad + 36bd - 60cd + 36dd$

exposant total.
$4a - 3b + 5c - 6d$
dernier diviſeur.
$8a - 6b + 10c$

eſtant 0 0 0 0

QUATRIE'ME EXEMPLE.

On propoſe de trouver la racine cube de $ab + 6a4b$ $+ 12aabbcc + 8b3c3 + 9a5c + 36a3bcc + 36abbc3 + 27$ $4cc + 54aabc3 + 27a3c3$.

Premierement j'extrais la racine cube de ab, qui eſt veritablement un cube : je pourrois auſſi prendre la grandeur $8b3c3$, ou $27a3c3$ qui ſont des veritables cubes ; car il n'importe par laquelle on commence, mais on ne pourroit pas commencer par aucune autre. Mais puiſque $a6$ eſt la plus commode de toutes, je prens ſon cube qui eſt aa que je poſe au lieu du quotient, & ſouſtrais le cube $a6$ de la grandeur $a6$ ce qui donne le reſte ſuivant.

$a6 + 6a4bc + 12aabbcc + 8b3c3 + 9a5c$ $+ 36a3bcc + 36abbc3 + 27a4cc + 54aa$ $bc3 + 27a3c3$.	expoſant aa diviſeur $3a4$

ôter $a6$

Reſtant $*6a4bc + 12aabbcc + 8b3c3 + 9a5c + 36a3$ $[cc + 36abbc3 + 27a4cc + 54aabc3 + 27a3c3$

Secondement j'éleve la racine aa à la ſeconde puiſſance qui eſt la plus proche de la troiſiéme, dont on cherche la racine, & ainſi le quarré $a4$, je le multiplie par le denominateur de la racine propoſée qui eſt 3, ce qui donne pour premier diviſeur $3a4$, que je poſe en ſon lieu comme vous le voyez ci-deſſus. Je cherche enſuite dans la table des puiſſances le rang parallele de la troiſiéme puiſſance où je trouve $3aab + 3abb + 1b3$ qui me marque les divers produits de la ſeconde racine par la premiere & ſon cube. Ainſi je cherche premierement ma ſeconde racine diviſant la grandeur 6 $4bc$ par le diviſeur $3a4$, ce qui donne pour quotient $2bc$ que je poſe au lieu du quotient pour ſeconde ra

cine. Vous remarquerez que j'ay plûtôt pris $6a4bc$ pour dividende qu'aucune des grandeurs ſuivantes, parce que le diviſeur $3a4$ y eſt dans la plus haute puiſſance que dans tous les autres ce qui m'eſt deſigné par la ſeconde cellule $3aab$ du troiſiéme rang parallele de la table des puiſſances. Cela fait, je cherche les divers produits de cette nouvelle racine par la premiere, & ainſi multipliant $2bc$ nouvelle racine par le triple du quarré de aa premiere racine, j'ay premierement $6a4bc$, & quarrant la racine $2bc$ qui eſt $4bbcc$, je le multiplie par la racine aa ce qui donne $4aabbcc$, qui étant pris trois fois donne en ſecond lieu $12aabcc$. Et enfin élevant la nouvelle racine $2bc$ à la troiſiéme puiſſance j'ay en troiſiéme lieu le produit $8b3c3$. Je ſouſtrais donc les trois produits trouvez, ſavoir $6a4bc+12aabbcc+8b3c3$, du reſtant cy-deſſus, & je trouve un nouveau reſte, comme il eſt icy repreſenté.

$6a4bc+12aabbcc+8b3c3+9a5c+36abbc3+27a4cc+54aabc3+27a3c3$ expoſant.

ôt. $6a4bc+12aabbcc+8b3c3$ } $aa+2bc$ diviſeur.

Reſtant $9a5c+36abbc3+27a4cc+54aabc3+27a3c3$ } $3a4$.

Troiſiémement je cherche un nouveau diviſeur pour découvrir une nouvelle racine : & pour cela je conſidere les deux racines trouvées comme une ſeule racine que j'éleve au quarré ce qui donne $a4+4bbcc$ que je triple. Ainſi le nouveau diviſeur eſt $3a4+12bbcc$ par lequel je diviſe $9a5c$, parceque nulle grandeur des reſtantes ne contient la racine trouvée à une plus haute puiſſance. De ſorte que le quotient $3ac$ qui provient eſt la troiſiéme racine que je cherche, je la poſe en ſon lieu, & enſuite je cherche les divers produits de chacune des racines. Et premierement du quarré de $aa+2bc$ par l'autre racine $+3ac$ ce qui donne $3a5c+12abbc3$. qui étant multipliez par 3 donnent $9a5c+36abbc3$, ou ce qui eſt le même je multiplie la ra-

cine trouvée par le diviſeur $5a4+12bbcc$, ce qui donne les mêmes produits $9a5c+36abbc3$. En ſecond lieu j'éleve la nouvelle racine $+3ac$ à ſon quarré qui eſt $9aacc$, que je multiplie par les premieres racines $4a+12bc$, ce qui donne $9a4cc+18aabc3$, qui étant triplez produiſent $27a4cc+54aabc3$. Enfin j'éleve la derniere racine à la troiſiéme puiſſance, & je trouve $27a3c3$, de ſorte que je dois retrancher du reſtant cy-deſſus les cinq produits $9a5c+36abbc3+27a4cc+54aabc3+27a3c3$, ce qui étant fait comme il ne me reſte rien mon operation eſt finie.

$9a5c+36abbc3+27a4cc$ $+54aabc3+27a3c3$	expoſant total.	
	$aa+2bc+3ac$	diviſeur.
	$3a4+13bbcc$	

ôter $9a5c+36abbc3+27a4cc+54aabc3+27a3c3$.

Reſtant 0 0 0 0 0

On auroit tout d'un coup trouvé la racine propoſée en cherchant les trois cubes des trois racines, ſavoir $a6.+8b3c3+27a3c3$, car leurs racines étant trouvées, ſavoir $aa+2bc+3ac$, on trouveroit en-cherchant la troiſiéme puiſſance, les mêmes produits que ceux que nous venons de découvrir. L'on voit dans cet Exemple de quelle maniere il faut operer pour des racines de plus grande denomination, nous n'en propoſons pas d'Exemples, parce qu'il eſt bon de ſe les propoſer ſoy-même élevant quelque grandeur complexe à telle puiſſance que l'on voudra par les Regles du Chapitre V. & enſuite du produit en cherchant la racine. Il eſt bon encore de relire ce que nous avons dit des extractions des racines dans nôtre Arithmetique cy-devant.

Je ne parle pas icy de la compoſition des grandeurs litterales en divers degrez, parce qu'il n'y a pas d'autres Regles à ſuivre que celles de la multiplication: car pour compoſer une grandeur de cinq degrez par les

grandeurs simples a,b,c,d,e, il suffit de les joindre pour voir le produit $abcde$. Et si c'étoit une grandeur complexe que l'on voulût élever à un plus haut degré en la multipliant par une ou plusieurs lettres, il suffit de les multiplier par les lettres proposées. Par Exemple, pour composer la grandeur $abcd+xzvt$ par r,s, il suffit de joindre rs, & de multiplier $abcd+xzvt$ par rs ce qui donnera $abcdrs+xzvtrs$, ce qui est tres-clair.

CHAPITRE VIII.

Des mêmes operations en Algebre que celles que nous avons traité au Chapitre VII. de nôtre Arithmetique.

DEFINITIONS.

NOus appellerons des *grandeurs simples*, celles qui seront exprimées par une seule lettre comme a,b,d, &c. & celles qui seront composées de plusieurs seront nommées *grandeurs composées* cõme les produits b, cde, $fghi$, nous dirons que les grandeurs simples sont *premieres entr'elles*, parce qu'elles n'auront point de commun diviseur. Et de même les grandeurs composées seront premieres entr'elles qui n'ont point de commun diviseur; ainsi ab & cd sont premieres entr'elles, parce qu'elles n'ont aucun diviseur qui les puisse mesurer; au contraire les grandeurs ab, ac, ad sont composées entr'elles parce qu'elles ont un commun diviseur a car si vous divisez ab par a le quotient sera b, & si vous divisez ac ou ad par a le quotient sera c ou d.

1. De là, il est tres-facile de connoître si les grandeurs sont premieres entr'elles ou non: car si elles ont quelque lettres communes elles sont composées, & si elles n'en ont aucune, ce sont des grandeurs premieres entr'elles.

AVERTISSEMENT.

Mais il faut bien prendre garde qu'il y a grande difference entre dire, que les grandeurs litterales ſont premieres entr'elles, parce qu'elles n'expoſent point à l'eſprit de commun diviſeur, & dire que les grandeurs reelles qu'elles repreſentent ſont premieres entr'elles : Car la grandeur litterale ab *& la grandeur litterale* cd *qui ne repreſentent point à l'eſprit de diviſeur, comme peuvent repreſenter des grandeurs qui ſoient commenſurables entr'elles. Par exemple, ſi pour* a *nous ſuppoſons* 4 *& pour* b 3, *le produit* ab *ſera* 12, *& ſi pareillemẽt on ſupoſe pour* c *la valeur & pour* d 6, *le produit* cd *ſera* 30, *où vous voyez que* 12 *&* 30 *ne ſont pas premiers entr'eux, puiſqu'ils peuvent être meſurés par* 6.

2. Pour trouver le plus grand diviſeur commun des grandeurs litterales, il n'y a qu'à examiner dans chaque produit toutes les lettres qui s'y trouvent également, & le produit de ces lettres eſt le plus grand diviſeur commun de ces grandeurs.

EXEMPLES.

On demande le plus grand diviſeur commun de grandeurs *abc*, *acd*, premierement je vois que la grandeur *a* ſe trouve dans l'une & dans l'autre, ainſi pour m'en ſouvenir j'écris au deſſous de chacune *a* ; je vois encore que *c* ſe trouve dans l'une & dans l'autre, ainſi je poſe *c* au deſſous de chacune, & multipliant *a* par *c*, je conclus que le produit *ac* eſt le plus grand diviſeur commun que *abc* & *acd* puiſſent avoir.

abc, acd,
a c ac.
a c diviſeur commun.

Par même raiſon *a*3 *bbd* eſt le plus grand diviſeur de grandeurs *a*5 *bbcd*, a3 b3 dde, & *mn* eſt le plus grand di

viſeur commun des grandeur $abmn$; $oqqx + x$; $qmno$ & cdm ; $nnq + zx$; $m2n$, ce qui eſt tres-facile de connoître quelque nombre de grandeur que l'on propoſe.

3. L'on doit conclure de ce que nous venons de dire que chaque grandeur ſimple ou litterale qui ſe trouve dans pluſieurs grandeurs eſt un des plus petits diviſeur commun que ces grandeurs puiſſent avoir, & que tous les divers produits qu'elles peuvent former ſont des diviſeurs moyens de ces mêmes grandeurs, puiſque le produit total de ces grandeurs communes eſt le plus grand diviſeur. Nous donnerons dans nôtre traité d'Algebre les Regles pour trouver tous les produits que peuvent former pluſieurs grandeurs ſimples, tant égales qu'inégales.

AVERTISSEMENT.

On peut en Algebre comme en Arithmetique propoſer des Preuves à chaque operation ce qui ſera tres-facile de faire, ſi on ſe ſouvient que nous avons dit en Arithmetique que les operations oppoſées ſe ſervent reciproquement de Preuves. Ainſi l'Addition ſe prouvera par la Souſtraction ; & la Souſtraction par l'Adition ; la Multiplication par la Diviſion, & la Diviſion par la Multiplication ; La compoſition des puiſſancees par l'extraction des racines par la compoſition des puiſſances ; Enfin la compoſition des grandeurs par leur reſolution ; & la reſolution d'icelles par leur compoſition.

CHAPITRE IX.

Des fractions Algebriques.

1. COmme les grandeurs premieres entr'elles ne peuvent ſe diviſer pour en marquer la diviſion, on les poſe l'une ſur l'autre, & celle qui eſt deſſus en eſt le dividende, & la deſſous le diviſeur, ce qui répond au numerateur & denominateur en Arithmeti-

que ainſi $\frac{b}{c}$ marque, comme nous l'avons déja remarqué au Chapitre VI. que b eſt diviſé par c, ce que nous appellerons fraction de grandeur litterales ou algebrique; ainſi $\frac{ab+cd-xz}{ut+qm+rs}$ eſt encore une fraction litterale, & on en peut former tout autant que l'on voudra de ſemblables.

2. De même qu'en Arithmetique une fraction peut être exprimée en pluſieurs termes ſans rien changer de ſa valeur auſſi en algebre une fraction peut être exprimée d'une infinité de manieres ſans rien changer à la valeur: Et de même que l'on exprime une fraction differemment en multipliant le numerateur & le denominateur d'une fraction par un même nombre, ou en le diviſant par une commune meſure auſſi en algebre, ſi on multiplie une fraction par quelqu'autre grandeur que ce ſoit ou qu'on la diviſe par quelqu'un de ſes diviſeurs communs, toutes ces expreſſions ne changent rien à la valeur, ainſi la fraction $\frac{b}{c}$ eſt exprimée par $\frac{ab}{ac}$ ou $\frac{xb}{xc}$ ou $\frac{xxb}{xxc}$ ou $\frac{d4b}{d4c}$ &c.

DEFINITIONS.

3. Auſſi nous dirons qu'une fraction algebrique eſt reduite à *ſes expoſans, ou aux moindres termes* qui ſera exprimée par les grandeurs les plus ſimples, qui pour cette raiſon en ſeront appellez les expoſans comme $\frac{b}{c}$ de toutes les expreſſions cy-deſſus.

4. Pour exprimer une grandeur en fraction de denomination donnée ſans rien changer de ſa valeur, vous n'avez qu'à multiplier la grandeur donnée par le denominateur donné. Par exemple, pour reduire la grandeur b en fraction par le denominateur c, je multiplie b par c, & l'expreſſion $\frac{bc}{c}$ ne diminuë rien de la valeur b: ainſi $\frac{bcd}{cd}$ $\frac{b24}{24}$ ſont de differente denomination ſans rien changer à la valeur de b.

5. Pour reduire une fraction à ſes expoſans, il faut diviſer le numerateur & le denominateur par leur plus grand diviſeur commun. Par exemple, ſi vous

diviſez *abcd* & *bcde* par leur plus grand diviſeur commun *bcd* vous aurez au lieu de la fraction $\frac{abcd}{bcde}$ cette expreſſion ſimple $\frac{a}{e}$ qui contient les expoſans de la fraction $\frac{abcd}{bcde}$.

Mais ſi le numerateur & le denominateur de la fraction propoſée n'ont point de commune meſure, ils ſont eux-mêmes les expoſans ou les termes les plus ſimples de la fraction propoſée; ainſi $\frac{abcd}{xxyu}$ eſt l'expreſſion la plus ſimple de cette même fraction.

6. Pour donner un commun denominateur à deux fractions de differente valeur & denomination, il faut ſuivre les mêmes Regles de l'Arithmetique, c'eſt à dire qu'il faut multiplier le denominateur de chacune par le denominateur de l'autre; & le produit de chaque multiplication ſera le numerateur de chaque fraction, & pour trouver le commun denominateur on multiplie le denominateur de l'une par le denominateur de l'autre. Par exemple pour donner un cõmun denominateur aux fractions $\frac{a}{x}$ & $\frac{b}{y}$ je multiplie *a* par *y* ce qui donne *ay*, je multiplie enſuite *b* par *x* ce qui donne *bx*, & multipliant *x* par *y* le produit *xy* eſt le denominateur commun.

Fractions propoſées $\frac{a}{x} \times \frac{b}{y}$ $\quad \frac{ay}{xy} \quad \frac{bx}{xy}$ -- equivalentes.

7. Et pour donner le moindre commun denominateur on reduit la fraction à ſes expoſans par l'Article V. auſquels on donne un commun denominateur. Par exemple pour trouver un commun denominateur & le moindre qui ſe puiſſe entre les fractions $\frac{acdef}{xcdeft}$ & $\frac{bghil}{ygmil}$ je reduis ces fractions données à leurs expoſans, qui ſont les fractions $\frac{a}{x}$ & $\frac{b}{y}$ auſquelles donnant le commun denominateur *xy* comme dans l'exemple cy-deſſus xy eſt le moindre denominateur commun que puiſſent avoir les fractions propoſées $\frac{acdef}{xcdeft}$ & $\frac{bghil}{ghiny}$.

8. Pour trouver un commun denominateur à pluſieurs fractions ſans changer leur valeur. Il faut mul-

tiplier le numerateur de chacune par tous les dénominateurs des autres, chaque produit ſera le numerateur de chacune : & le produit de tous les denominateurs ſera le denominateur commun.

Par exemple, pour donner un denominateur commun aux fractions $\frac{a}{z}\ \frac{b}{y}\ \frac{c}{x}$ je multiplie le numerateur a par les denominateurs des autres fractions y & x, ce qui donne ayx pour le premier numerateur, multipliant de même les autres numerateurs b & c par z,x, & zy. L'on a pour numerateur bzx & czy & le denominateur commun ſera le produit des trois denominateurs zyx.

Fractions propoſées.	a / z	b / y	c / x	équivalentes	ayx / zyx	bzx / zyx	czy / zyx

9. Et pour donner à pluſieurs fractions le moindre denominateur commun qu'elles puiſſent avoir, il faut les reduire aux moindres termes, à qui l'on donne par les Regles de l'Article 8. un denominateur commun.

Par exemple pour donner aux fractions ſuivant le moindre denominateur commun qu'elles puiſſent avoir $\frac{adefg}{defgz}\ \frac{bhilm}{hilmy}\ \frac{cnopq}{nopqx}$ je les reduits aux moindres termes, qui ſont les fractions ſuivantes $\frac{a}{z}\ \frac{b}{y}\ \frac{c}{x}$ auſquelles le denominateur commun eſt zyx ſuivant l'Article VIII.

10. Pour ajoûter en une ſomme pluſieurs fractions, il faut leur donner un denominateur commun ſi elles ne l'ont pas déja, & la ſomme des numerateurs ſera la requiſe. Pour ajoûter $\frac{a}{z}$ & $\frac{b}{z}$ & $\frac{c}{z}$ je me contente d'ajoûter les numerateurs en cette ſorte $a+b+c$ & poſe au deſſous le denominateur z, ce qui donne la fraction ſeule $\frac{a+b+c}{z}$: mais ſi les fractions n'ont pas un denominateur comme je leur en donne un, ſuivant le nombre 8, & enſuite ajoûtant les numerateurs comme en ces Exemples $\frac{a}{z}\ \frac{b}{y}\ \frac{c}{x}$ dont les equivalentes ſont $\frac{ayx}{zyx}\ \frac{bzx}{zyx}\ \frac{czx}{zyx}$, j'ajoûte $ayx+bzy+czy$ à qui je poſe le commun denominateur zyx en cette ſorte $\frac{ayx+bzx+czy}{zyx}$.

11. Pour ſouſtraire une fraction d'une autre fraction : il faut les mettre en même denomination, & ouſtraire le numerateur du numerateur : ainſi pour ouſtraire $\frac{a}{z}$ de $\frac{b}{z}$ j'écris $\frac{b-a}{z}$ & pour ſouſtraire $\frac{b}{z}$ de $\frac{a}{y}$ je lonne un commun denominateur zy aux fractions, e qui forme cette expreſſion $\frac{by}{zy}$ $\frac{az}{zy}$ ainſi $\frac{az-by}{zy}$ ſatisait à la propoſition. Et ſi les fractions ſont plus comoſées ce ſera toûjours la même methode : car ſi l'on ropoſe de ſouſtraire $\frac{a-c}{d+c}$ de $\frac{a+b}{c+d}$ je donne un commun enominateur aux fractions propoſées ce qui donne s expreſſions ſuivantes $\frac{ac-ad+de-ce}{cd-dd+ce-de}$ & $\frac{ad+ac+db+be}{cd-dd+ce-de}$, & our ſolution de la propoſition, celle qui ſuit pour ifference.

$$\frac{ac-ac+2ad+db-de+be+ce}{cd-dd+ce-de}$$

12. Pour multiplier une fraction par une autre : faut multiplier le numerateur par le numerateur, & denominateur par le denominateur, & chaque prouit poſez l'un ſur l'autre. Par exemple pour multiplier $\frac{a}{z}$ par $\frac{b}{x}$ je multiplie a par b ce qui donne ab & par x ce qui donne zx, & la fraction $\frac{ab}{zx}$ eſt le produit ue l'on demande $\frac{abc}{z}$ par $\frac{efg}{y}$ donne $\frac{abcefg}{zy}$

13. Pour diviſer une fraction par une autre : multipliez le numerateur du dividende par le denominaur du diviſeur, & le produit ſera le numerateur du otient : multipliez pareillement le numerateur du iviſeur par le denominateur du dividende, & le roduit ſera le denominateur du quotient.

Par exemple pour diviſer $\frac{a}{z}$ par $\frac{b}{x}$ je multiplie a par , & le produit ax je le poſe pour numerateur du otient je multiplie enſuite b par z & le produit bz tant poſé pour denominateur du quotient la fracon $\frac{ax}{bz}$ ſatisfait à la queſtion.

$$\text{Diviſer} \frac{a \diagdown\diagup b}{z \diagup\diagdown x} \text{par} \frac{a\dot{x}}{bz} \text{quotient}$$

14. Pour élever une fraction à telle puiſſance que l'on voudra, il faut élever la grandeur du numerateur à la puiſſance propoſée, & en faire de même de la grandeur qui exprime le denominateur, ainſi pour élever $\frac{a}{z}$ à ſon quarré, je poſe $\frac{aa}{zz}$, & pour l'élever à la troiſiéme puiſſance je poſe $\frac{a^3}{z^3}$, & ainſi de tout autre. Par exemple $\frac{b^9}{x^9}$ marque que la fraction $\frac{b}{x}$ eſt élevée à la neuviéme puiſſance.

15. Et comme la reſolution des puiſſances ſuit la maniere de les compoſer pour extraire la racine tel le que l'on voudra de quelque fraction, il faut extraire la racine du numerateur & celle du denominateur, ayant égard aux ſignes & aux nombres, ſuivant les Regles generales que nous avons données cy-deſſus. Par exemple, pour extraire la racine quarrée de la fraction $\frac{aa}{zz}$, j'extrais la racine quarrée de aa qui eſt a & celle de zz qui eſt z, ainſi la racine quarrée de la fraction propoſée eſt $\frac{a}{z}$. Il eſt inutile de donner des exemples plus compoſez, puiſqu'il n'y a rien de plus difficile que ce qui ſe trouve dans l'extraction des puiſſances dans les grandeurs entieres à que je renvois le Lecteur.

AVERTISSEMENT.

16. *Comme il arrive ſouvent que les grandeurs dont on cherche les racines ne peuvent point ſe reſoudre, on exprime ces ſortes de racines par certains ſignes qu'on appelle radicaux, & qui ont le même effet que ſi veritablement on avoit extrait les racines de ces grandeurs : car de même que l'on exprime la diviſion d'une grandeur par une autre, en les diviſant d'un trait, auſſi pour exprimer les racines, on ſe ſert des ſignes ſuivans.*

$\surd$ Exprime la racine quarrée, ainſi cette expreſſion $\surd bc$ marque la racine quarrée du produit bc. Va

marque

marque la racine quarrée du nombre 30, & $\sqrt{bc+10ax-4xy}$ marque la racine quarrée de la grandeur complexe $bc+10az-4xy$.

$\sqrt{c}$ ou $\sqrt{3}$ exprime la racine cubique ou troiſiéme de quelque grandeur que ce ſoit, numerique ou litterale, incomplexe ou complexe, en cette maniere $\sqrt{c.40}$. pour exprimer la racine cubique de 40.

Et $\sqrt{c}$ ou $\sqrt{3}$ de $4bc+cz-18xx$ marque la racine cubique de la grandeur $4bc+cz-18xx$.

$\sqrt{\sqrt{}}$ ou $\sqrt{4^e}$ eſt l'expreſſion de la racine 4^e

$\sqrt{\sqrt{c}}$ ou $\sqrt{c\sqrt{}}$ eſt l'expreſſion de la $\sqrt{6}$.

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$ ou $\sqrt{8^e}$

$\sqrt{c\sqrt{c}}$ ou $\sqrt{9^e}$, & ainſi à l'infini. Il eſt plus commode d'exprimer ces ſortes de racines en cette maniere $\sqrt{}\ \sqrt[3]{}\ \sqrt[4]{}\ \sqrt[5]{}\ \sqrt[6]{}$, *&c.* pour exprimer la racine quarrée, 3e 4e *&c.*

17. L'on peut joindre des entiers aux fractions en toutes les operations cy-deſſus, Addition, Souſtraction, &c. Mais en ce cas il ſuffira de reduire les entiers en fractions de même denomination, & operer enſuite ſuivant les Regles cy-deſſus. Et s'il eſt plus commode comme dans l'Addition & Souſtraction, operer ſeparément ſur les entiers, & enſuite ſur les fractions. Par exemple, s'il faut ajoûter les grandeurs $ab+cd-az+bz+\frac{ac}{xy}$ & $ac+dc-bc+\frac{ad}{xy}$; j'ajoûte premierement les grandeurs $ab+cd-az+bz+ac+dc-bc$. Secondement je donne un commun denominateur aux fractions $\frac{ac}{xy}$ & $\frac{ad}{xy}$ qui forme cette expreſſion $\frac{acyy}{xyyy}$ & $\frac{adxy}{xyyy}$ ainſi Addition totale ſera $ac+cd-az+bz+ac+dc-bc$ $\frac{cyy+adxy}{xyyz}$. Pour la Souſtraction il en faut faire de même.

Mais ſi l'on propoſe de multiplier $\frac{az}{yz}+ab-c$ par $\frac{bz}{xy}+bd$, je reduis premierement les fractions en même denomination, ce qui forme cette expreſſion $\frac{azzx}{xyyz}$ $\frac{bzxy}{xyyz}$ laquelle je reduis les entiers $+ab-c$ en multipliant par le denominateur $xyyz$ chaque membre $ab-c$, ce qui donne pour premiere fraction $-\frac{abxyyz-cxyyz}{xyyz}$, & multipliant de la même maniere bd par $xyyz$, le produit donne $\frac{bdxyyz-bdxyyz}{xyyz}$, ainſi multipliant le numerateur

de l'une par le numerateur de l'autre Ce qui donne l'expreſſion $abbx3y3z+abbdxxy4zz+abdxy3z3+abxxyyzz-bcdxxyy4zz-bcx3y3z$. Et enfin multipliant le dominateur par le denominateur toute la fraction eſt reduite à

$abbx3y3z+abbdxy4zz+abdxy3z3+abxxyyzz-b$
$[bbcx3y3zz-bcx3y3z$

$y4xxzz.$

Que s'il faloit multiplier ſimplement une grandeur litterale par une fraction, il ſuffit de reſoudre la grandeur litterale en fraction, ce qui ſe fait en poſant l'unité au deſſous du trait en cette ſorte $\frac{a}{1}$ ou bien reduiſant la grandeur litterale à la denomination de la fraction propoſée. Par exemple, ſi on propoſe de multiplier a par $\frac{x}{b}$ je reduis a à la fraction de la denomination de x en le multipliant par x, ce qui donne ax pour numerateur, & x pour denominateur: ainſi multipliant ax par b & x par luy-même, on aura $\frac{abx}{bx}$ pour le produit de la fraction propoſée, ou $\frac{ab}{x}$ ſi on la reduit à ſes expoſans. De même ſi l'on ſe ſert de l'expreſſion cy-deſſus $\frac{ab}{x}$ & qu'on la multiplie par la fraction $\frac{b}{x}$ on aura $\frac{abb}{xx}$ qui eſt la même que cy-deſſus $\frac{ab}{x}$

Il en eſt de même de la diviſion & des autres operations, il n'y a qu'à reduire les entiers en fractions comme l'on voudra, & ſuivre les Regles generales cy-deſſus.

18. De la même maniere qu'il y a des fractions de fractions dans les nombres, on peut en ſe ſervant des nombres trouver des fractions de fraction dans les grandeurs litterales en cette maniere $\frac{1}{4}$ de $\frac{b}{x}$ pour exprimer le quart de b diviſé par x. Et en ceci, il n'y a nulle difficulté pour ajoûter, ſouſtraire, &c. parce que de la même maniere que nous avons dit en Arithmetique que l'on reduit une fraction de fraction à une ſimple, en multipliant le numerateur par le numerateur, & le denominateur par le denominateur, il ſuffit d'avoir une fois la fraction ſimple, & ſuivre toutes

les Regles que nous avons données cy-dessus. Par exemple pour reduire à une fraction simple $\frac{1}{2}$ de $\frac{b}{3}$ je multiplie le numerateur 1, & le numerateur b, ce qui donne $1b$, & multipliant le denominateur 4 par le denominateur x; le produit est $4x$, & la fraction reduite $\frac{b}{4x}$.

19. Nous remarquerons encore que souvent on extrait des racines de racines; & qu'on les joint souvent à des nombres entiers. Par exemple, l'on peut demander la racine cubique de z, plus la racine quarrée de x; c'est à dire, considerant z & la racine quarrée de x comme une seule grandeur, on en demande la racine cubique: Ce que l'on exprime en posant le signe radical $\surd$ devant la lettre x, & un trait au dessus en cette maniere $\overline{\surd x}$, & en suite l'on exprime par le signe radical $\sqrt[3]{}$ la racine que l'on demande unissant le tout par un trait au dessus, comme vous le voyez icy en plusieurs exemples.

$$\sqrt[3]{\text{de } z+\surd x} \qquad \sqrt[5]{zz+x} - \sqrt[3]{y+xx}$$

$$\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}b+\tfrac{1}{3}c} - \sqrt[5]{\tfrac{1}{5}z+\tfrac{1}{3}x}$$

Le premier exemple represente la racine cubique de la grandeur complexe $z+$ la racine quarrée de x. Le second exemple marque la racine cinquiéme de la grandeur totale $zz+x-$ la racine 3e de $y+xx$; & la 3e qui est en fraction, represente la racine quatriéme du quart de $b+$ la moitié de $c-$ la racine cubique du cinquiéme de $z+$ le tiers de x.

Et si l'on demandoit la racine de quelque grandeur, qui eût été divisée par la racine de quelque autre grandeur, elle s'exprimeroit ainsi

$$\frac{c-d}{\surd a4+b4}$$

Ce qui signifie que la grandeur $c-d$ a été divisée

par la racine quarrée de $aa+bb$, & ainsi de toutes autres expressions semblables qu'il est facile de connoître aprés ce que nous avons dit.

CHAPITRE X.

Des Proportions & Progressions.

LEs Operations Algebriques à l'égard des proportions & progressions n'ont pas d'autres Regles que celles que nous avons données dans l'Arithmetique; ainsi il est facile de satisfaire à toutes les questions, pourveu que l'on ait bien compris les operations des Chapitres precedens. Je me contenteray de raporter icy quelques exemples pour faire voir comme il est facile d'apliquer les Regles que nous avons données en Arithmetique sur les grandeurs litterales.

1. On demande de trouver un quatriéme terme d'une proportion Arithmetique trois termes étant connus.

Voyez les mêmes questions au Chap. 15. de l'Arithmetique.

$\therefore a, b, c.$

Et premierement on suppose les trois termes a,b,c, dont on cherche le quatriéme. J'adjoûte les deux moyens $b+c$, desquels je soustrais le premier terme a, & la grandeur complexe $b+c-a$ satisfait à la question.

$\therefore a, b, c, b+c-a,$

Secondement on propose de trouver le premier, les trois derniers étant donnez. J'adjoûte b & c termes moyens ce qui donne $b+c$; j'en soustrais le quatriéme $b+c-a$, & la difference donne $+a$ pour premier terme.

Troisiémement le premier terme, le second & le quatriéme étant donnez, trouver le troisiéme. J'ad-

joûte les extrêmes $a+b+c=a$ ou ce qui eſt le même par abreviation $b+c$, d'où je ſouſtrais le ſecond b & le reſtant c eſt le requis.

Et s'il faloit trouver le ſecond terme, il faudroit ſouſtraire le troiſiéme c de la ſomme $+b+c$ & le reſtant b ſeroit le requis.

Par cette voye on continueroit la progreſſion arithmetique: car ſi l'on ajoûte le quatriéme terme au 3e pour avoir la ſomme $b+2c=a$, de laquelle on retranche le ſecond terme b, on aura pour cinquiéme terme $2c=a$, & ſi l'on pourſuit en adjoûtant le cinquiéme au quatriéme, on aura la ſomme $b+3c=2a$ de laquelle retranchant le troiſiéme terme c, le reſtant $b+2c=2a$, ſera le ſixiéme terme, & ainſi conſecutivement.

$a, b, c, b+c=a, 2c=a, b+2c=2a, 3c=2a.$

Mais ſuivant l'Article V. du Chapitre XIII. de l'Arithmetique, on trouve la progreſſion arithmetique, les deux premiers termes étant connus, & la difference, l'on ajoûte à chaque terme nouveau la même difference. Par exemple, le 1e terme eſt a, le ſecond $a+b$ dont la difference eſt b, le troiſiéme terme ſera $a+2b$, le quatriéme $a+4b$, & ainſi ſucceſſivement.

$a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b, a+5b, a+6b, a+7b.$

Je ne continuë pas de donner plus d'exemples, parce qu'il eſt aiſé de ſuivre les Regles que nous avons données.

2. Pareillement pour trouver le quatriéme terme d'une proportion Geometrique lequel qu'on voudra, trois étant donnez, il faut multiplier les extrêmes ou les moyens, & diviſer par l'autre, le quotient ſera le requis. Par exemple pour trouver le quatriéme terme de la proportion ſuivante.

a, b :: c.

Je multiplie les moyens b & c, & le produit bc étant diviſé par a, il donne $\frac{bc}{a}$ pour le quatriéme. Et ſi l'on demande le premier terme les trois autres étans donnez.

$$\text{. b :: c, } \frac{bc}{a}$$

Je multiplie les moyens b & c, & le produit étant diviſé par la fraction $\frac{bc}{a}$ donne le premier terme a: car reduiſant le produit bc à la fraction de la denomination a, je trouve $\frac{abc}{a}$ & $\frac{bc}{a}$ & par conſequent puiſqu'ils ont même denomination, je diviſe abc par bc & le quotient eſt a pour le premier terme.

Et ſi l'on demande le ſecond terme ou le troiſiéme, ayant multiplié les extrêmes a & $\frac{bc}{a}$ ou ce qui eſt le même $\frac{a}{1}$ par $\frac{bc}{a}$ le produit donne $\frac{abc}{a}$ ou en abregeant bc ſimplement qui étant diviſé par b donnera c pour le troiſiéme terme ou b pour le ſecond, s'il eſt diviſé par c troiſiéme terme.

Que ſi l'on demande un moyen proportionel, il faut multiplier les termes donnez, & en extraire la racine quarrée. Par exemple, ſi a & b ſont les termes donnez, le terme moyen ſera $\sqrt{ab}$.

Et ſi l'on veut continuer une progreſſion, les deux premiers étant donnez, vous diviſerez le ſecond terme par le premier, & multipliant l'expoſant qui en provient, vous aurez le troiſiéme terme, & continuant de multiplier ce troiſiéme terme par l'expoſant ou denominateur de la progreſſion geometrique, vous aurez le quatriéme terme, & ainſi de ſuite à l'infini. Par exemple a & b ſont les 2 premiers termes. Je diviſe b par a ce qui donne la fraction $\frac{b}{a}$ par laquelle je multiplie b ſecond terme, ce qui donne $\frac{bb}{a}$ pour troiſiéme terme, & multipliant $\frac{bb}{a}$ par $\frac{b}{a}$ j'ay $\frac{b^3}{a^2}$ pour 4 terme & $\frac{b^4}{a^3}$ pour cinquiéme, &c.

$$a, b, \frac{bb\ \ b3\ \ b4\ \ b5\ \ b6\ \ b7\ \ b8}{a,\ aa,\ a3,\ a4,\ a5,\ a6\ \ a7}$$

Où l'on voit que qui ſçait les Regles que nous vons données en Arithmetique, & les Operations lgebriques des Chapitres precedens, il eſt facile de eſoudre toutes les queſtions ſur les grandeurs litteraes: ainſi nous ne nous arrêterons pas davantage.

CHAPITRE XI.

De l'uſage de l'Algebre & de ce que l'on appelle Analyſe.

DEFINITIONS.

1. L'Uſage de l'Algebre parmy les Mathematiciens eſt de venir à la connoiſſance de quelques grandeurs inconnuës par le moyen des grandeurs connües & des operations Algebriques qui en découvrent les raports. Pour cela ils conſiderent attentivement toutes les parties d'une queſtion propoſée ; ils démêlent ce qui eſt connu de ce qui ne l'eſt pas, exprimant chacun par des lettres differentes, les parties connües par les premieres lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, &c. & les inconnües par les lettres retrogrades *z*, *y*, *x*, *v*, *t*, *s*, *r*, dont ils forment pluſieurs égalitez, qui étant comparées les unes aux autres en les ajoûtant, multipliant, diviſant, &c. on vient enfin à connoître les grandeurs qui étoient inconnües. Et comme ce mot *Analyſe* en Grec ſignifie diviſion ou reſolution. *L'on appelle cette Metode de reſoudre les queſtions en en ſeparant* toutes les diverſes, *parties, analyſe ou metode analytique.*

2. L'on appelle *membres d'une égalité* les deux grandeurs complexes ou incomplexes, qui ſe trouvent de part & d'autre du ſigne = ou ∞ par exemple *a* ∞ *b* ou

a ∷ *b* *a* & *b* dans ces expreſſions ſont les membres de l'égalité & dans celle-cy *a* + *b* ∽ *a* ↄ *b*, la grandeur complexe *a* + *b* ∽ *a* eſt le premier membre de l'égalité, & *b* tout ſeul eſt l'autre membre.

aa + 2*ab* + *bb* ↄ *xx* + 2*xz* + *zz*.
Premier membre Second membre.

3. On appelle *grandeur degagée*, celle qui ſe trouve ſeule dans un des membres de l'égalité avec le ſigne + exprimé ou ſous-entendu ; ainſi dans cette égalité 2 ↄ 6 la grandeur *a* n'eſt point degagée, parce qu'elle eſt accompagnée du chiffre 2. Elle ne l'eſt pas non plus dans cette expreſſion ∽ *z* ↄ ∽ 3, parce que la grandeur *z* n'eſt pas avec le ſigne poſitif + : mais la grandeur *x* eſt dégagée dans cette égalité *x* ↄ *a* ∽ 2*b*, puiſqu'elle eſt toute ſeule dans le premier membre de l'égalité, & qu'elle eſt poſitive.

4. Et lorſqu'une grandeur eſt dégagée, l'on dit que *ſa valeur eſt dans l'autre membre de l'égalité*. Par exemple, dans l'égalité cy-deſſus *x* ↄ *a* ∽ 2*b* la valeur de *x* eſt *a* ∽ 2*b*.

5. Souvent pour faciliter la recherche d'une inconnüe, l'on tranſpoſe le ſecond nombre dans le premier avec des ſignes contraires à chaque grandeur de celle que l'on tranſpoſe, & en ce cas on exprime le ſecond membre de l'égalité par 0 ou ⊖ qui marque le rien. Ainſi tranſpoſant le ſecond membre de l'égalité cy-deſſus *x* ↄ *a* ∽ 2*b*, l'on aura cette autre égalité *x* ∽ *a* + 2*b* ↄ ⊖.

6. Nous remarquerons qu'une égalité ne change point lorſque l'on en change tous les ſignes ſans en excepter aucun, la valeur des inconnües, ſe conſervant dans ce changement. Par exemple ∽ 9 + *x* ↄ ∽ 4, ſi dans cette égalité vous vous ſervez de cette expreſſion en changeant les ſignes la grandeur *x* ne changera point de valeur 9 ∽ *x* ↄ 4, ou celle-cy ∽ *z* ↄ ∽ 3 *z* ↄ 3.

7. Le degagement d'une inconnüe ſe fait ordinaire-

ment par quelqu'une des operations cy-dessus expliquées aux Chapitres precedens : mais nous les reduirons aux suivantes *la Transposition*, *la Multiplication*, *la Division & l'extraction des racines*, qui sont les moyens principaux dont on se sert pour dégager une inconnüe ; quelques-uns appellent ce dégagement *reduction d'une grandeur*.

REGLES de la Transposition.

1. Si une inconnüe est accompagnée d'un signe negatif, changez l'expression de l'égalité en changeant tous les signes sans en excepter aucun suivant la marque de l'Article VI. pour lors l'inconnuë deviendra positive, & aura l'une des conditions requises pour le dégagement.

2. Transposez les nombres & les grandeurs qui accompagnent l'inconnuë dans le même membre où elle est, & les portez dans l'autre membre.

3. Changez tous les signes des grandeurs ou nombres transposez, savoir les positifs en negatifs, & les negatifs en positifs, & la grandeur inconnüe sera dégagée.

4. Si aprés la Transposition on peut abreger l'expression par les Regles que nous avons données ailleurs, il faut le faire pour faciliter la recherche de l'inconnüe.

5. Si l'inconnüe se trouve plusieurs fois exprimée dans l'un & dans l'autre membre, il faut la transposer par la premiere & seconde Regle toutes dans un même membre, & suivre les autres Regles.

EXEMPLES.

Pour dégager l'égalité $8 - z \propto 12 - 9$, je change premierement les signes de l'égalité, ce qui donne la suivante $z - 8 \propto - 12 + 9$. Secondement je transpose le nombre $- 8$ du premier membre dans le second, changeant par la Regle 3e le signe $-$ en $+$ ce qui don-

ne cette égalité $z \supset 8+9-12$, & enfin abregeant l'expression, suivant la 4ᵉ Regle, je trouve $z \supset 5$, où l'on voit que la grandeur z devient connüe, puisque sa valeur est 5, comme nous l'avons remarqué au 4ᵉ article cy-dessus.

Mais si l'inconnüe est positive dans l'égalité, la premiere Regle est inutile; la 4ᵉ l'est aussi lorsque la grandeur dégagée a une valeur qui ne peut pas être exprimée en des termes plus abregez, ainsi pour dégager $z-7 \supset 15$, je transpose simplement le nombre -7 dans l'autre nombre en changeant le signe, ce qui donne l'égalité $z \supset 15+7$ ou $z \supset 22$. Et pour dégager l'égalité suivante $z-a \supset b$, je transpose $-a$ dans l'autre membre ce qui donne $z \supset a+b$.

Et pour dégager l'inconnuë repetée plusieurs fois dans cette égalité $6y+15-3y \supset 4y+11$. Je transpose dans le premier membre 4y qui se trouvent dans le second, ce qui donne cette égalité $6y+15-4y-3y \supset 11$ ou par abregé $15-y \supset 11$. Et suivant les Regles ci-dessus en changeant les signes $y-15 \supset -11$, & par la transposition $y \supset 15-11$, ou en abregeant $y \supset 4$.

Regles du degagement par la Multiplication.

Lorsque l'inconnüe est divisée par quelque grandeur litterale ou quelque nombre, le dégagement ne peut se faire que par la Multiplication dont voici les Regles.

1. Effacez le denominateur qui divise l'inconnüe, & multipliez toutes les autres grandeurs dans l'un & l'autre membre par le denominateur que vous avez exclu de l'inconnüe.

2. S'il se trouve quelque fraction de même denomination que celle de la grandeur inconnüe dans l'autre membre de l'égalité, il suffit d'effacer le denominateur & multiplier les autres grandeurs par ce même denominateur.

Pour dégager l'inconnüe de cette égalité $\frac{z}{a} \propto b$, j'efface a denominateur de la grandeur inconnüe & multipliant b de l'autre membre de l'égalité par le denominateur a, la grandeur z se trouve dégagée & sa valeur est $z \propto ab$.

Pareillement pour dégager l'inconnüe de cette égalité $\frac{z}{c} \propto a+b-c$, j'efface le denominateur c par lequel je multiplie chaque grandeur du membre $a+b-c$, ce qui donne cette égalité $y \propto ac+bc-cc$.

Et pour l'égalité $\frac{z}{y} \propto a+\frac{x}{y}$, j'écris simplement $y \propto ay+x$, multipliant le denominateur y de l'inconnüe z par a de l'autre membre, & ôtant le denominateur y de la fraction $\frac{x}{y}$ suivant la 2e Regle; de même si l'on veut dégager l'inconnüe de cette égalité $z \propto 2\frac{1}{4}$, j'écris simplement $z \propto 8+\frac{1}{4}$ ou ce qui est le même $z \propto 9$.

REGLES du dégagement par la Division.

Si l'inconnüe que l'on veut degager est multipliée par quelque nombre ou par quelque grandeur litterale, il la faut poser toute seule, & diviser tout le reste par le nõbre ou la grandeur què l'on a retranchée. Par exẽple pour dégager l'inconnüe dãs cette égalité $4z \propto 16$ je divise 16 par 4, & j'écris $z \propto 4$ pour dégager l'inconnüe de cette égalité $az \propto b+c$, je retranche a & divise $b+c$ par a, ainsi l'égalité est reduite à $z \propto ab+ac$. Et de même cette égalité $3z \propto \frac{1}{2}$ se reduit à celle-cy $z \propto \frac{1}{6}$ & ainsi de toute autre.

REGLES du dégagement par l'extraction des Racines.

Une inconnüe élevée à quelque puissance ne peut se dégager que par l'extraction de la racine de même denomination que la puissance à laquelle elle est élevée: ainsi pour faire ce dégagement, il faut tant dans

l'un que dans l'autre membre en extraire la racine.

Exemples.

Pour dégager l'inconnüe dans cette égalité $zz \propto 49$, j'extrais la racine quarrée de zz & celle de 49, ce qui forme cette égalité $z \propto 7$, & faisant le même dans les égalitez suivantes, elles se trouveront reduites comme nous les exposons ici.

$z3 \propto abc$. Sa reduite $z \propto \sqrt[3]{abc}$.

$y5 \propto bcdef + ccdde + b3ee - ced3$. Sa reduite.

$y \propto \sqrt[5]{bcdef + ccdde + b3ee - ced3}$

Mais il arrive souvent que pour faire le degagement d'une inconnüe, il faut se servir de plusieurs de ces operations ensemble ou bien même de toutes: ce qu'il sera facile de connoître, & de faire pour peu d'attention que l'on fasse.

Exemples.

Pour dégager $\frac{x3}{1} + \frac{x}{7} \propto 1\frac{1}{1}$, premierement je reduis le second membre $1\frac{1}{1}$ tout en fraction pour plus grande commodité ce qui donne l'égalité suivante $\frac{x3}{1} + \frac{x}{7} \propto \frac{8}{7}$. Secondement je fais évanoüir les fractions retranchant le denominateur 3 dans toutes les fractions où il est; & multipliant $\frac{x}{7}$ par le denominateur retranché le produit donne $\frac{3x}{7}$ ainsi l'égalité est reduite à $2x + \frac{3x}{7} \propto 4$. Et pour faire évanoüir la fraction $\frac{3x}{7}$ j'efface le denominateur 7 par lequel je multiplie tout le reste ce qui forme cette égalité $14x + 12 \propto 28$. Troisiémement je transpose le nombre $+12$ dans le second nombre ce qui donne $14x \propto 28 - 12$, & par abregé $14x \propto 16$. Enfin l'inconnüe étant multipliée par le membre 14, je le retranche & divise 16 par 14, ce qui donne l'égalité ou l'inconnüe est entierement dégagée $\propto x\frac{16}{14}$ ou $x \propto 1\frac{2}{14}$, où vous voyez que l'on s'est ser-

vi pour le degagement de l'inconnüe de la transposition, Multiplication & Division.

Pareillement pour dégager l'inconnüe de l'égalité suivante $2zz + \frac{2}{3} = 40 \propto 73 + 16$ premierement je transpose $+ \frac{2}{3} = 40$ dans le second membre de l'égalité, ce qui donne $2zz \propto 73 + 40 + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ & par abbreviation $zz \propto 112\frac{1}{2}$. Secondement je fais évanoüir la fraction en retranchant le denominateur & multipliant tout le reste par 2, ce qui donne $4zz \propto 225$. Troisiémement pour ôter le 4 qui multiplie l'inconnüe, je divise 225 par 4 ce qui donne $56\frac{1}{4}$ ainsi prenant la racine quarrée de zz qui est z & la racine quarrée de $56\frac{1}{4}$ ou de $\frac{225}{4}$ qui est $\frac{15}{2}$ ou $7\frac{1}{2}$ l'inconnüe z se trouve dégagée, & sa valeur est $z \propto 7\frac{1}{2}$.

8. Il arrive souvent que le seul degagement suffit pour connoître la valeur d'une inconnüe : mais si la question se trouve accompagnée de plusieurs inconnües le seul degagement ne suffit pas toûjours. C'est pourquoy il faut encore se servir de la *Substitution*, ce qui se fait en posant la valeur d'une inconnüe à sa place de toutes les égalitez où elles se trouvent, en voicy les Regles.

Regles de la Substitution.

1. Si la grandeur que l'on veut substituer est incomplexe, complexe ou un nombre, & que celle à qui l'on veut la substituer ne soit accompagnée d'aucun nombre qui la multiplie, ou qui en marque les diverses puissances, il suffit de mettre la grandeur substituée au lieu de celle à qui on la substitue. Par exemple, dans cette égalité $z \propto a - b$, si je veux substituer la valeur de z dans l'égalité suivante $x \propto z + c$, j'écris simplement $x \propto a - b + c$.

2. Mais si la grandeur à qui l'on en substitue un autre est accompagnée de quelque nombre qui la multiplie, ou qu'elle soit élevée à quelque puissance. Il faut multiplier la sustituée par le même nombre, ou élever à la même puissance, & ensuite poser le pro-

duit à la place de celle à qui on l'a ſubſtituée : comme nous le verrons dans les Exemples ſuivans.

3. Il faut extrêmement prendre garde aux ſignes dans la Subſtitution : car s'il faut ſubſtituer une grandeur poſitive à la place d'une negative, il faut changer tous les ſignes de la ſubſtituée ; les Exemples éclairciront ces Regles.

EXEMPLES.

Pour ſubſtituer dans cette expreſſion $8 - 4z$ la valeur de $3a - 2c$ au lieu de z, je multiplie la grandeur $3a - 2c$ par -4, ce qui donne $-12a+8c$, ainſi cette expreſſion $8 - 4z$ eſt reduite à $8 - 12a+8c$.

Pour ſubſtituer $\frac{1+3x}{4}$ dans cette expreſſion $4z+2 \propto 60$ à la place de z je multiplie $\frac{1+3x}{4}$ par 4, ce qui donne $\frac{1+3x}{1}$ & par conſequent l'expreſſion de l'égalité deſſus eſt reduite à $\frac{1+3x}{1}+2y \propto 60$.

Pour ſubſtituer à la place de la grandeur x dans cette expreſſion $y \propto \frac{c-x}{x+1}$ ſon equivalente $\frac{b-x}{x+1}$ ou la fraction $\frac{b-x}{x+1}$ doit être ſubſtituée, tant au numerateur qu'au dénominateur de la fraction $\frac{c-x}{x+1}$ ou la grandeur x eſt exprimée. Je poſe premierement pour le numerateur $\frac{c-b+2x}{x+1}$ changeant les ſignes de la grandeur ſubſtituée parce que la grandeur x eſt negative dans le numerateur $c - x$: & multipliant c qui n'eſt point diviſé par le denominateur $x+1$ le produit donne $cx+c-b+x$ à la place du numerateur $c - x$ je fais enſuite le même pour le denominateur $x+1$, ſubſtituant la fraction $\frac{b-x}{x+1}$ à la place de x ce qui dõneroit pour denominateur la fraction $1+\frac{b-x}{x+1}$ qui étant reduite en multipliant 1 par $x+1$, elle donne $1x+1+b-x$, & en abregeant $1+b$ de ſorte que l'égalité avec la ſubſtitution donne $y \propto \frac{cx+c-b+x}{1+b}$.

Et pour ſubſtituer à la place d'x dans cette égalité $x^3 \propto 27$, la grandeur $a - b$ j'éleve $a - b$ à la troiſiéme puiſſance, & l'égalité ſe trouve $a^3 - 3aab+3abb-b^3 \propto 27$.

Il y a beaucoup d'autres moyens pour découvrir la valeur d'une inconnuë ; mais comme nous en traiterons ailleurs, & que les operations que nous venons de donner ſuffiſent pour les commençans, je me contente de ce qui a été dit, reſervant de parler plus amplement de toute l'Algebre dans le Traité exprez que je donne au Public. Voici neanmoins quelques Regles de la metode pour reſoudre quelque queſtion.

REGLES de la Metode.

1. Exprimez les grandeurs connuës de la queſtion par les lettres a, b, c, d, e, f, ſuivant leur ordre naturel.

2. Formez-en des égalitez en conſiderant les ſuppoſitions de la queſtion, ou en en tirant des conſequences.

3. Si quelque égalité ſe trouve accompagnée de fractions, faites-les diſparoitre en multipliant le denominateur par chacune des autres grandeurs, tant en un qu'en l'autre membre de l'égalité.

4. Abreger les expreſſions autant qu'il ſe pourra, moins que la multiplicité des expreſſions ne ſoit neceſſaire à quelqu'operation.

5. Dégagez une inconnüe celle qui vous paroît la plus commode, & poſez ſeparément ſa valeur en quelque part pour y avoir recours quand l'operation le demandera.

6. Si le degagement ſeul n'eſt pas ſuffiſant pour découvrir exactement la valeur de l'inconnüe, ſubſtituez ſa valeur trouvée par le dégagement dans toutes les égalitez où cette inconnüe ſe trouvera.

7. Dégagez pareillement une autre inconnüe, & ſubſtituez-en la valeur dans toutes les autres egalitez où elle ſe trouve juſqu'à ce qu'elle ſoit evanouïe comme la premiere.

8. S'il y a encore quelqu'inconnuë à dégager, & à ſubſtituer, vous ſuivrez les mêmes Regles juſqu'à ce

qu'elle ſoit evanouïe, ou qu'étant degagée des inconnuës, elle ſe trouve d'une egalité ou l'un des membres ne ſoit compoſé que des grandeurs connuës, & pour lors la queſtion ſera pleinement reſoluë ; ſi on ſubſtituë ſa valeur dans toutes les egalitez où elle etoit, & des unes aux autres juſqu'à ce qu'il ne reſte plus d'inconnuë.

9. S'il ſe trouve que quelques inconnuës n'ayent pû être degagées, c'eſt une marque qu'elles ſont arbitraires, & que l'on peut à leur place ſubſtituer quelle grandeur connuë que l'on voudra ainſi, c'eſt une marque que la queſtion eſt *indeterminée*, c'eſt à dire que elle peut ſe reſoudre egalement en prenant d'autres grandeurs que les propoſées.

10. Si aprez les degagemens & les ſubſtitutions, il ſe trouve que l'un des membres de l'egalité ne ſoit pas egal à l'autre, c'eſt une marque que la queſtion eſt impoſſible.

Premier Exemple.

On propoſe de trouver un nombre qui étant ajoûté à 6, & leur ſomme retranchée de 30, le reſtant ſoit 16.

Premierement comme cette queſtion ne propoſe qu'une inconnuë, qui eſt le nombre qui remplit toutes les conditions de la queſtion propoſée. J'eſtime cette inconnuë par x & forme l'egalité ſuivante ſur les ſuppoſitions de la queſtion, diſant $x+6$, & la ſomme qu'il faut ſouſtraire de 30, ainſi $30-x-6$, eſt le reſtant de cette ſouſtraction : mais ce reſtant doit être egal à 16, & par conſequent toute la queſtion ſe trouve dans cette egalité algebrique $30-x-6 \propto 16$.

Secondement je degage l'inconnuë x, en changeant tous les ſignes, parce qu'elle eſt accompagnée d'un ſigne negatif, ce qui donne cette expreſſion $-30+x+6 \propto -16$, & tranpoſant $-30+6$ dans l'autre membre de l'egalité en changeant les ſignes il ſe trouve que $x \propto 30-6-16$, & par abreviation $x \propto 8$, ainſi la valeur de x

l'x m'est connuë ; & 8 est le nombre requis qui satisfait entierement à la question : car la somme de 8 & 6 qui est 14 étant soustraite de 30 le restant est 16.

Je pouvois exprimer toutes les conditions de la question par des lettres seules, appellant x l'inconnuë, & prenant a pour 6 & b pour 30 & c pour 16, ce qui auroit donné $b - x - a \propto c$, & changeant les signes $- b + x + a \propto - c$, & transposant $x \propto b - a - c$, où la grandeur x est entierement degagée, & le second membre étant composé de lettres seules, qui sont connuës, il n'y a qu'à substituer leur valeur connuë, & la question est clairement resoluë. Cette maniere d'exprimer les suppositions d'une question par des lettres seules s'appelle *specieuse*, ell'est beaucoup plus belle que l'Algebre numerique, parce que dans ses solutions elle donne une infinité de moyens pour resoudre la question. Et d'ailleurs, elle dispense des grands calculs numeriques qu'il faut tres-souvent faire ; la question que nous venons de proposer n'a demandé que le degagement. Voicy un'autre où il y aura besoin des Substitutions.

SECOND EXEMPLE.

Trouver deux nombres tels que leur somme soit 7, & que la difference de leurs quarrez soit 21.

J'exprime chaque partie de de la question en terme algebrique, appellant le plus grand nombre, & le premier $\frac{}{1}$ & le second y, & suivant les suppositions de la question, je dis $x + y \propto 7$ premiere supposition qui forme la premiere egalité ; & ensuite $xx - yy \propto 21$, 2e supposition qui forme la seconde egalité, comme vous les voyez ici exprimées.

$$x + y \propto 7$$
$$xx \propto yy \propto 21$$

Je degage la premiere inconnuë x dans la premiere egalité ce qui donne cette expression ; $x \propto 7 - y$, & substituant la valeur de x qui est $7 - y$ dans la seconde

egalité je trouve cette expreſſion $49 - 14y + yy \not\supset 21$, & en abregeant $49 - 14y \not\supset 21$, ce qui forme cette diſpoſition.

$$x \not\supset 7 - y$$
$$49 - 14y \not\supset -21.$$

Et changeant les ſignes de la ſeconde égalité ou l'inconnuë x n'eſt plus exprimée, parce que l'inconnuë y eſt accompagnée du ſigne $-$ l'on a cette expreſſion $-49 + 14y \not\supset 21$. & en tranſpoſant $14y \not\supset 49 - 21$, ou en abregeant $14y \not\supset 28$, enfin dégageant y par la diviſion du ſecond membre 28 par 14, il ſe trouve que l'incoonuë $y \not\supset 2$, ainſi ſubſtituant 2 à la place d'y dans l'égalité $x \not\supset 7 - y$, il ſe trouve que x eſt egale à 5, ce qui s'exprime ainſi.

$$y \not\supset 2$$
$$x \not\supset 5.$$

Et les nombres 2 & 5 ſatisfont à la queſtion.

Troisie'me Exemple.

Trouver trois nombres tels que la ſomme des deux premiers ſoit 9; que la difference des deux derniers ſoit 2, & que le troiſiéme diviſant le quadruple du premier le quotient ſoit 8. J'appelle les trois nombres propoſez x, y, z, & par conſequent $x + y \not\supset 9$; & $z - y \not\supset 2$. Et $\frac{4x}{z} \not\supset 8$, où l'on voit que ces égalitez expriment toutes les ſuppoſitions de la queſtion.

$$x + y \not\supset 9$$
$$z - y \not\supset 2$$
$$\frac{4x}{z} \not\supset 8.$$

Aprés avoir exprimé la queſtion par les egalitez ci-deſſus par la premiere & ſeconde Regle de la methode je délivre la 3e egalité de ſes fractions ſuivant la troiſiéme Regle en multipliant le denominateur z par 8 qui ſe trouve dans le ſecond membre de l'egalité; cette expreſſion $4x \not\supset 8z$ eſt la même que $\frac{4x}{z} \not\supset 8$.

$$x + y \mathrel{\text{D}} 9$$
$$z - y \mathrel{\text{D}} 2$$
$$4x \mathrel{\text{D}} 8z.$$

Je degage l'inconnuë x, & forme cette egalité $x \mathrel{\text{D}} 9 - y$, ainsi substituant la valeur de x dans les deux egalitez où elle se trouve, vous trouverez cette autre disposition.

$$x \mathrel{\text{D}} 9 - y$$
$$z - y \mathrel{\text{D}} 2$$
$$36 - 4y \mathrel{\text{D}} 8z.$$

Je degage de nouveau l'inconnuë z dans la seconde egalité, car l'inconnuë x est toute degagée ; ainsi je trouve $z \mathrel{\text{D}} y + 2$, & substituant $y + 2$ dans la derniere egalité, à la place de $8z$, l'egalité nouvelle forme cette expression $36 - 4y \mathrel{\text{D}} 8y + 16$, & transposant $-4y$ dans le second membre, l'egalité est reduite à celle-cy $36 \mathrel{\text{D}} 12y + 16$, & tranposant 16 au premier membre elle se trouve exprimée en cette maniere $36 - 16 \mathrel{\text{D}} 12y$, ou en abregeant $20 \mathrel{\text{D}} 12y$: ainsi divisant 20 par 12, y se trouve egale à $1\frac{2}{3}$ avec cette expression $y \mathrel{\text{D}} 1\frac{2}{3}$ substituë cette valeur $1\frac{2}{3}$ par tout où je trouve y dans les inconnuës degagées, ce qui donne ces egalitez.

$$x \mathrel{\text{D}} 7\tfrac{1}{3}$$
$$y \mathrel{\text{D}} 1\tfrac{2}{3}$$
$$z \mathrel{\text{D}} 3\tfrac{1}{3}$$

Et ces egalitez satisfont pleinement à la question proposée car $7\frac{1}{3}$ & $1\frac{2}{3}$ sont 9, premiere supposition, & la difference de $1\frac{2}{3}$ avec $3\frac{2}{3}$ est 2, seconde supposition, & divisant le quadruple de $7\frac{1}{3}$ ou $29\frac{1}{3}$ par $3\frac{2}{3}$ le quotient est 8.

On pouvoit par la specieuse exprimer cette question & la resoudre comme ell'est ici, appellant la somme de deux premiers nombres a pour 9 ; & la difference des deux derniers b pour 2, & le quotient du quadruple du premier par le dernier c pour 8, ainsi l'expression sera,

$$\begin{array}{l} x+y \propto a \\ z-y \propto b \\ \frac{4x}{z} \propto c \end{array}$$

Et le degagement de x & la ſubſtitution de ſa valeur donneront celle-cy & la troiſiéme egalité delivrée de ſes fractions donnent cette diſpoſition.

$$\begin{array}{l} x \propto a-y \\ z-y \propto b \\ 4a-4y \propto cz. \end{array}$$

Et degageant la nouvelle inconnuë z avec la ſubſtitution de ſa valeur, on trouve

$$\begin{array}{l} x \propto a-y \\ z \propto b+y \\ 4a-4y \propto bc+cy. \end{array}$$

Et pour degager y on n'a qu'à changer les ſignes de la 3e egalité, ce qui donne $-4a+4y \propto -bc-cy$, & tranſpoſant $-4a$ dans le 2^d nombre, on a $4y \propto 4a-bc-cy$ & encore par tranſpoſition $4y+cy \propto 4a-bc$: de ſorte que diviſant le 2^d membre par les grandeurs qui multiplient l'inconnuë y, vous aurez $y+y \propto \frac{4a-bc}{4+c}$ ou par abreviation $2y \propto \frac{4a-bc}{4+c}$ & diviſant derechef le ſecond membre par le nombre 2 qui multiplie l'inconnuë, on aura enfin $y \propto \frac{4a-bc}{8+2c}$ & ſubſtituant la valeur de y dãs les premieres egalitez qui ont été degagées, on aura la diſpoſition ſuivante, où chaque ſecond membre ne contient que des grandeurs connuës

$$\begin{array}{l} y \propto \frac{4a-bc}{8+2c} \\ x \propto a-\frac{4a-bc}{8+2c} \\ z \propto b+\frac{4a-bc}{8+2c} \end{array}$$

Voilà ſuffiſamment d'exemples pour concevoir quel eſt l'uſage de l'Algebre, & la methode de reſoudre une partie des queſtions que l'on a coûtume de propoſer. Je ne dis rien des indeterminées, des impoſſibles ni de beaucoup d'autres queſtions que nous expliquerons plus au long dans nôtre Traité de l'Algebre.

CINQUIE'ME PARTIE.

Qui contient plusieurs Problemes de Geometrie.

CHAPITRE I.

Des Lignes.

1. POur tirer une ligne droite, on se sert d'une Regle de quelque matiere dure comme de cuivre, le bresil ou autre bois semblable, qui soit bien dressée. Et pour connoître si la Regle est bien dressée, l'on tire premierement une ligne tout le long avec la pointe d'un compas, & tournant la regle à contre-sens de la ligne, on l'applique tout au long pour en tirer une seconde. Et si cette seconde ligne convient & s'ajuste entierement avec la premiere, de sorte qu'elle ne fasse qu'une seule ligne, l'on conclû que la regle est droite, comme nous le demontrerons en Geometrie.

2. Pour décrire un cercle, l'on se sert du compas en posant une des branches sur le point qui doit servir de centre, & ouvrant le compas de la grandeur que l'on veut le rayon; l'on fait mouvoir l'une des branches tandis que l'autre demeure immobile jusqu'à ce qu'elle ait finie sa revolution, c'est tout ce que le monde sçait assez.

3. Pour mener une perpendiculaire à une autre ligne d'un point donné hors la ligne; comme dans la premiere Figure, Planche suivante du point A à la ligne Z. Je décris un cercle qui ait pour centre le point A & qui coupe la ligne Z aux deux points B & C. Et en tirant du point B comme centre & de l'intervalle B C, je décris l'arc D E A; j'en fais de même du point C à

l'égard de l'arc D E A qui coupe le premier arc aux points A & D par leſquels je tire la ligne A D qui eſt perpendiculaire.

Mais ſi le point duquel on veut mener une perpendiculaire ſe trouve dans la ligne: comme dans la ſeconde Figure le point A décrivez du point A comme centre le cercle B C D & des points B & D comme centres & de l'intervale B D ou un peu moindre décrivez deux arcs qui ſe coupent au point E, duquel tirant une ligne droite au point A, vous aurez la perpendiculaire requiſe.

Et ſi le point ſe trouve à l'extremité d'une ligne l'extremité A de la ligne Z fig. 3. prenez un point B à diſcretion, hors de la ligne duquel vous puiſſiez comme centre & de l'intervale B A décrire un cercle qui paſſe par le point A, & qui coupe la ligne Z au point C, de ce point & par le centre B tirez la diametrale C B D qui coupe le cercle en D, & la ligne D A ſera la perpendiculaire requiſe.

Pour plus grande commodité l'on ſe ſert de deux regles jointes enſemble communement appellée equerre, dont les lignes ſont parfaitement perpendiculaires pour juger ſi une equerre eſt bõne. l'on fait la même choſe que pour la regle: on tire deux lignes le long de ces branches, & tournant l'equerre à contre ſens, en faiſant ſervir une autre branche que celle qui a ſervi pour tirer chaque perpendiculaire, & ſi les lignes conviennent l'equerre eſt jugée bonne, une ſeule regle un peu large & bien miſe à l'equerre, a le même effet. La figure 4. vous repreſente l'equerre avec les perpendiculaires tirées des points differens, dont nous avons parlé cydeſſus A B marque la perpendiculaire du point donné hors la ligne C D la perpendiculaire du point donné dans la ligne, & E F celle qui eſt tirée du point de l'extremité,

4. Pour mener une parallele à un'autre ligne droite & d'un point donné hors la ligne; Par exemple, dans la 5. figure du point A, mener une ligne parallele à la ligne Z du point A abbaiſſez la perpendiculaire A B [Probleme 4.] & ſur la ligne Z prenez un point C à

discretion, sur lequel vous éleverez une seconde perpendiculaire, & prenant l'intervale A B, vous décrirez du point C un arc qui coupe la perpendiculaire C D au point D & la ligne A D sera la parallele requise.

5. Pour diviser une ligne en deux parties egales : La ligne A B fig. 6. du point A comme centre & de l'intervale A B décrivez un arc qui passe de part & d'autre de la ligne A B & du point B comme centre, & même intervale B A décrivez un autre arc qui coupera le premier dans les points C D. Et la ligne droite C D coupera la ligne A B en deux parties egales au point E.

6. Diviser une ligne en tant de parties egales que l'on voudra. [fig. 7.] A B est la ligne que l'on veut diviser en six parties égales, du point A tirez une ligne perpendiculaire ou oblique qui soit prolõgée de part & d'autre de la ligne A B ; & du point B menez une parallele à cette même ligne qui s'étende pareillement de part & d'autre autant qu'il vous plaira. Marquez à discretion au haut de la ligne depuis le point A 5 points egalement distans avec le compas, tels que sont C, D E F G, & du point B dans le bas de la ligne cinq autres points aussi egaux H I L M N, menez ensuite les lignes H C, I D, L E, &c. qui couperont la ligne A B en six parties egales.

7. Trouver le centre d'un cercle ; Par exemple, du cercle décrit dans la fig. 8. je mêne à discretion la ligne A B qui coupe le cercle en deux points differens A B, & la ligne A B partagée en deux egalement au point C, j'éleve la perpendiculaire C D que je prolonge de part & d'autre jusqu'en D & E à la rencontre du cercle, & divisant D E en deux parties egales au point F, c'est le centre du cercle proposé.

8. Trouver le centre d'un arc proposé. Par exemple de l'arc A B C fig. 9. je prens à discretion un point dans l'arc proposé comme il est icy B & aprez avoir tiré les cordes A B, B C, je les divise en deux egalement aux points D & E sur lesquels, je mêne les perpendiculaires

EF, DF, qui ſe coupent en F qui eſt le centre requis.

Pour cette même methode l'on trouve le moyen de faire paſſer un cercle par trois points qui ne ſont pas ſituez en ligne droite: car prenant pour les trois points A, B & C de la fig. 9. aprez avoir tiré les lignes AB, BC les diviſant en deux egalement, & menant les perpendiculaires DF, CF, l'on a le centre du cercle, ainſi ouvrant le compas du point F au point A ou B ou C, on décrira tout le cercle.

9. Pour mener la tangente d'un arc ou d'un cercle par un point donné; Par exemple, la tangente de l'arc AB [fig. 10.] par le point B ou de tout le cercle par le point B pris dans le cercle; cherchez le centre C, ayant mené le rayon CB élevez la perpendiculaire BD, elle ſera la tangente.

Mais ſi l'on propoſe un arc ou un cercle & un point au dehors qu'il faille tirer une tangente; Par exemple du point A [fig. 11.] à l'arc ou cercle total Z, cherchez le centre du cercle D, & aprez avoir mené la ligne AD, diviſez-la egalement au point E, duquel comme centre, & de l'une des extremitez vous décrirez le cercle X qui coupera le cercle Z au point F, & la ligne AF ſera la tangente requiſe.

10. Décrire un arc qui touche une ligne en un point donné [fig. 12.] A eſt le point donné ſur lequel elevez une perpendiculaire, & du point A, prenant un intervale comme il vous plaira (s'il n'eſt pas determiné) décrivez le cercle du point B comme centre qui ſatisfera au Probleme.

Et ſi l'on propoſe de decrire un cercle qui touche deux lignes données par des points donnez, ſoit qu'elles ſoient perpendiculaires, obliques ou paralleles: des points cõme AB [fig. 13.] pour les perpendiculaires CD pour les obliques; EF pour les paralleles menez à perpendiculaires, & du point de leur rencontre comme cõtre juſqu'au pied des perpẽdiculaires décrivés des cercles qui ſatisferont au Probleme: mais dans les paralleles comme l'on ne peut donner des points que ceux qui

ſe trouvent perpendiculairement oppoſez, il faut diviſer la ligne E F en deux egalement. Et dans les obliques il faut que les points ſoient ſituez de ſorte que les perpendiculaires ayent leur point de rencontre egalement eloigné des lignes ſoûtendentes, autrement le cercle ne pourra point les toucher toutes deux: l'on peut trouver ces deux points en prolongeant les lignes obliques juſqu'à la rencontre, & plaçant les points donnez à egale diſtance du point de la rencontre comme C, D prolongées du côté G & H juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent.

11. Mener la ſecante d'un arc, cherchez le centre de l'arc, & de l'une de ſes extremitez menez ſa tangente indefiniment, la ligne tirée du centre, Par exemple [fig. 14.] A à la tangente B C ſera la ſecante de l'arc compris entre A & D.

12. Trouver les ſinus tant droit que verſe d'un arc donné [fig. 14.] B D eſt l'arc trouvez le centre A duquel menez le rayon A B du point D, abaiſſez la perpendiculaire D E qui ſera le ſinus droit & E B le ſinus verſe.

13. Trouver une moyenne proportionelle à deux lignes droites données ; comme aux lignes Z & X [fig. 15.] Joignez les lignes données par leurs extremitez, en ſorte qu'elles ſe rencontrent directement, ce qui ſe fait en prolongeant l'une des lignes, & marquant deſſus la grandeur de l'autre au delà du point de la prolongatiõ ; & du point de rencontre A elever indefinimẽt une perpẽdiculaire: diviſez la totale en deux egalement au point B, par lequel comme centre vous décrirez par les extremitez de la totale un demi cercle qui coupant la perpendiculaire au point C, donnera C A pour moyenne proportionnelle.

14. Si l'on demande une troiſiéme proportionelle. Par exemple aux deux lignes [fig. 16.] A B & B C, joignez-les directement comme nous avons dit ci-deſſus au nombre 13. de ſorte qu'elles ne faſſent qu'une même ligne, & du point A elevez une oblique comme A D qui ſoit indefinie, & portant la longueur

B C ſur la ligne A D du point A au point E, menez la ligne E B, & du point C menant une parallele à E B qui coupe A D au point F, la ligne E F ſera la troiſiéme proportionnelle aux lignes A B, B C.

Et ſi l'on demande une quatriéme proportionelle, par exemple [fig. 17.] A B eſt la 1re, A D la ſeconde que j'eleve obliquement ſur la premiere B C la troiſiéme que j'unis directement à la premiere A B, & tirant la ligne B D des points B & D, je mene une parallele C E à B D; ainſi prolongeant la ligne A D, juſqu'à la rencontre de la parallele C E, la quatriéme proportionnelle ſe trouve D E.

Et pour une cinquiéme proportionnelle ſoit A B [fig. 18.] la premiere, B C la ſeconde, C F la 3me F I la 4e j'éleve une oblique indefinie A H, & je fais A D egale à B C, D E egale C F, E F, égale à F I, & toutes les lignes B D, C E, F G ſe trouvent paralleles, & menant la quatriéme parallele I H, la cinquiéme proportionnelle ſera G H: on en trouvera à l'infini, ſi l'on met ſur la ligne indefinie A I la cinquiéme proportionnelle egale à G H: car tirant une parallele L M la ligne H M ſera une ſixiéme proportionnelle, laquelle tranſpoſée ſur la ligne indefinie, en tirant une nouvelle parallele, on auroit une ſeptiéme proportionnelle, & ainſi à l'infini.

CHAPITRE II.

De la diviſion du Cercle & des Angles.

1. POur diviſer le cercle en 360 parties qui ſont les degrez: menez la diametre A B par le centre C [fig. 19] & du point C, élevez la perpendiculaire C D que vous prolongerez juſqu'en E, prenez l'ouverture ou rayon C B, & du point B marquez le point F; du point D, & de la même ouverture du compas marquez le point G, & en faites autant dans les quarts de cercles D A, A E, E B, aux points H I, L M, N O, &

viſez enſuite chaque portion comme BG en 2 au point P & B P, encore en 3 que vous tranſporterez ſur chaque eſpace egale à B P, enfin diviſant chacun des eſpaces qui ſont venus de toutes ces diviſions en 5, vous aurez le cercle diviſé en 360 degrez, comme il eſt repreſenté à la Planche 13. page 27. pour plus grande commodité il faut avoir un demi cercle de cuivre ou de corne tranſparente pour meſurer les angles, comme nous l'allons dire.

2. Pour trouver la valeur d'un angle par le moyen du demi cercle ou raporteur; ſoit donné l'angle ABC [fig. 20.] dont vous voulez ſavoir la valeur, prenez avec vôtre compas le rayon de vôtre demi cercle de cuivre ou autre matiere, dont, & du point B comme centre vous décrirez l'arc C A: ouvrez vôtre compas pour prendre l'intervale C A, qui étant portée ſur le demi cercle vous donnera le nombre des degrez que vous cherchez, comme vous le voyez ici 60. degrez.

Ou bien appliquez vôtre demi cercle, en ſorte que le centre ſoit poſé ſur le ſommet de l'angle, & l'une des jambes de l'angle le long du demi diametre du cercle. La ligne qui forme l'autre jambe de l'angle marquera le degré que l'on cherche, voyez la fig. 21.

3. Pour faire un angle de tant de degrez que l'on voudra; Par exemple ſur la ligne [fig. 22.] A B, & du point A faire un angle de 75 degrez. Prenez le rayon du demi-cercle de cuivre, & du point A comme centre de l'intervale de ce rayon décrivez l'arc BCD: prenez en ſuite ſur la circonference des degrez l'intervale compris entre le demi diametre, & le 75 degré que vous porterez du point B au point C de l'arc B C D, & ayant tiré la ligne A C, vous aurez l'angle B A C qui ſera le requis.

Ou bien appliquez le demi-cercle, en ſorte que le centre ſoit ſur le point A [fig. 23.] & le demi diametre tout le long de la ligne A B marquez avec la pointe du compas un point ſur la ligne qui marque le 75 degrez & aprés avoir mené ligne C A vous aurez l'angle requis.

4. Pour faire un angle egal à un autre angle don-

né. Par exemple, faire un angle qui ſoit egal à l'angle A B C, menez la ligne D E, & du point D comme centre decrivez un arc de quelque intervale qu'il vous plaira comme dans la fig. 24. l'arc E F : du même rayon decrivez encore ſur l'angle donné l'arc A C & prenant l'intervale A C tranſportez-le ſur l'arc E F au point F la ligne F D formera l'angle requis.

5. Pour diviſer un angle en deux parties egales ou deux angles egaux, comme l'angle [fig. 25.] A B C, decrivez du ſommet A un arc d'un intervale arbitraire comme A C : & ouvrant le compas du point A au point C decrivez de cette ouverture & des points A & C comme centres les arcs qui ſe coupent en D, & la ligne D B diviſera l'angle propoſé en deux angles egaux A B D, C B D.

6. Pour diviſer un angle donné en plus de deux parties egales le plus ſûr eſt de diviſer l'arc propoſé avec le compas, ou mechaniquement en autant de parties, & des points de diviſion tirer des lignes du ſommet de l'angle donné. Par exemple, pour diviſer l'angle [fig. 26.] A B C en cinq parties ; je décris d'un intervale arbitraire l'arc A C que je diviſe mechaniquement avec mon compas en 5 parties egales D, E, F, G, A, & tirant les lignes B D, B E, B F, B G, l'angle donné en diviſé en 5 angles egaux.

7. De deux angles que forme une ligne oblique ſur une autre ligne la valeur de l'un étant comme pour trouver la valeur de l'autre angle. Par exemple la valeur de l'angle A B C [fig. 27.] connoiſſant celle de l'angle A B D qui eſt de 50 degrez : il faut ſouſtraire 50 degrez de 180 degrez qui ſont la ſomme de deux angles de part & d'autre, & le reſtant 130 eſt la valeur de l'angle A B C.

8. Pour connoître la valeur d'un troiſiéme angle dans un triangle dont les deux autres angles ſont connûs, il faut ſouſtraire de 180 degrez la valeur des deux angles connus, & le reſtant ſera la valeur de l'angle que l'on cherche : ainſi ſuppoſant que les deux angles A & B valent enſemble 130 degrez, l'angle C vaudra 50 degrez, voyez la fig. 28.

9. Pour connoître la valeur de l'angle du centre dans un polygone regulier ; diviſez 360 qui ſont la ſomme de tous les angles du centre de quelque polygone que ce ſoit par le nombre des côtez du polygone, & le quotient ſera la valeur de l'angle du centre ; ainſi pour avoir combien vaut l'angle du centre d'un heptagone regulier, il faut diviſer 360 par 7,& le quotient qui eſt 51 degrez & $\frac{3}{7}$ eſt la valeur de l'angle du centre dans un heptagone.

10. Pour trouver l'angle du poligone dans un poligone regulier, comtez autant de fois 180 degrez que le polygone aura de côtez, & aprez avoir ſouſtrait de la ſomme, qui en provient 360 qui comprend tous les angles du centre, le reſtant donnera la ſomme de tous les angles du poligone, ainſi diviſant cette ſomme par le nombre des côtez du polygone, le quotient ſera la valeur de l'angle que l'on cherche. Par exemple on demande la valeur de l'angle du polygone d'un heptagone. Je multiplie 180 par 7, le produit eſt 1260, dont je ſouſtrais 360, la ſomme de tous les angles du centre, le reſtant eſt 900 que je diviſe par 7, & le quotient 128 $\frac{4}{7}$ eſt la valeur de l'angle de l'heptagone.

Autrement cherchez la valeur de l'angle du centre par le Probleme 9 de chapitre, & l'ayant ſouſtraite de 180, le reſtant ſera la valeur de l'angle requis. Par exemple pour l'angle de l'heptagone, ſi l'on ſouſtrait 51 degrez $\frac{3}{7}$ de 180 degrez, le reſtant 128 $\frac{4}{7}$ ſera la même valeur que nous avons déja reconnüe cy-deſſus.

CHAPITRE III.

De la formation des Figures.

1. POur former toute ſorte de triangles, propoſez-vous les côtez : pour un equilateral, trois côtez égaux ; pour un iſoſcele deux côtez égaux, tels qu'il vous plaira ; & pour un triangle ſcalenne trois côtez

inégaux : & par deux arcs qui se coupent vous tirez les triangles que vous souhaitez. Par exemple, soit la ligne AB [fig. 29.] sur laquelle vous voulez construire un equilateral : des points A & B comme centres, & de l'intervale A B décrivez les arcs qui se coupent au point C, & menant les lignes A C, B C, le triangle equilateral sera formé. Pour le triangle isoscele sur la base D E des points D & E, comme centre, prenez l'intervale des côtez egaux proposez ou arbitraires, & formant les arcs qui se coupent en F, vous aurez en menant les lignes D F, E F, le triangle isoscele D E F. Enfin pour un scalenne, posez l'un des côtez G H pour base, & du point G comme centre, & de l'intervale G I formez un arc, prenez l'intervale H I, & du point H comme centre, formez un second arc qui coupe le premier au point I, & le triangle G H I sera un triangle scalenne.

2. Pour former un quarré sur une ligne donnée elevez des extremitez, par exemple A & B deux perpendiculaires de la grandeur A B, & menant la ligne C D vous aurez le quarré A B C D fig. 30.

3. Pour faire un parallelogramme rectangle de deux lignes données, comme sont icy A & B [fig. 31.] élevez la perpendiculaire D E de la grandeur donnée B & faites C D egale à A. Prenez avec le compas l'intervale C D, & du point E comme centre décrivez un arc vers F, & prenant l'intervale D E du point C, comme centre vous décrirez un autre arc qui coupera le premier en F, ainsi aprés avoir mené les lignes C F, F E, vous aurez le rectangle requis.

4. Pour faire un parallelogramme rectangle égal à un triangle donné, comme dans la 32e figure le triangle A B C, du point B sommet de triangle, abaissez la perpendiculaire B D que vous diviserez également au point E, par lequel vous menerez la parallele indefinie F G ; & des extremitez de la base A C élevant les perpendiculaires qui couperont la parallele aux points F & G, vous aurez le rectangle A F G C qui sera égal au triangle A B C.

5. Pour faire un quarré égal à un rectangle comme dans la figure 33, le parallelogramme A B C D. Je cherche par le Probleme 13 du Chap. 1. une moyenne proportionnelle aux côtez A B, B C, qui eſt B E ſur laquelle formant le quarré B E F G par le Probleme 2. de ce Chapitre, on a ſatisfait à la propoſition & B E F G eſt égal ou rectangle A B C D.

6. Pour former toute ſorte de polygone regulier dedans ou dehors le cercle propoſé, comme icy dans la figure 34, le pentagone regulier dans le cercle A B C D E du point F comme du centre du cercle, je mene le rayon F A; enſuite je ſuppute par le Probleme 9e du Chpitre 2. quelle doit être la valeur de l'Angle du centre, je trouve pour un pentagone 72 degrez, ainſi formant l'angle A F B de 72 degrez [Par le Probl. 3. du Chap. 2.] je tire la ligne A B qui eſt le côté du pentagone, ainſi portant cette même longueur ſur la circonference A B C D E aux points C, D, E, A, le cercle ſe trouve diviſé en cinq parties égales, & menant les lignes neceſſaires le pentagone eſt inſcrit dans le cercle.

Que ſi l'on veut circonſcrire un heptagone, comme dans la figure 35 du centre A ſur le rayon A B, faites l'angle du centre d'un heptagone qui eſt 51 degrez $\frac{1}{7}$; & que ce ſoit l'angle B A C, prenez l'intervale B C que vous porterez ſur la circonference pour la diviſer en 7 parties égales; & par chaque point menez une tangente indefinie [Par le Probl. 9. chap. 1.] ces tangentes formeront l'heptagone circonſcrit, il en eſt de même de tout autre polygone.

7. Sur une ligne donnée, former toute ſorte de figure rectilignes regulieres.

Si c'eſt un triangle equilateral, operez comme au Probleme premier du Chapitre 3.

Si c'eſt un quarré, faites la même choſe qu'au Probleme 2 de ce Chapitre.

Si c'eſt un pentagone du point B, élevez une perpendiculaire indefinie, & du même point comme centre, & de l'intervale A B decrivez le demi-cercle A C D

partagez l'arc A C en cinq parties égales, & en portez une au point E, ayant mené la ligne B E, cherchez le centre d'un cercle qui passe par les trois points A B E sur la circonference duquel posez l'intervale AB ou BE & vous aurez le pentagone construit.

Si c'est un exagone divisez l'arc A C en six parties égales, & en portez 2 du point C au point F, & après avoir cherché le centre du cercle qui passe par A B F, vous aurez un exagone.

Pour l'heptagone divisez l'arc A C en sept parties égales en portez trois du point C au point G, faites passer un cercle par les trois points A B G, & achevez vôtre heptagone.

Et generalement pour les autres polygones, partagez l'arc AC en autant de parties que le polygone a de côtez & en portés au delà du point C, toûjours autant moins 4, ainsi pour l'octogone, il faut diviser l'arc en 8, & en porter 4, pour le decagone, il le faut diviser en 10, & en porter 6 pour dodecagone, il faut diviser l'arc en 12 & en porter 8 au delà du point C, & ainsi de tous autres polygones à l'infini.

8. Pour former une ovale, divisés le diametre sur lequel vous voulés la former en trois parties égales, comme dans la figure 37. la ligne A B aux points C & D, desquels comme centre vous décrirés les cercles A E D & B F C qui se coupent aux points E F, posés la regle, & tirés la ligne du centre C au point de l'intersection jusqu'à la rencontre de la circonference en G & du point E comme centre, & de l'intervale F G décrivés l'arc qui rencontre les cercles aux points G H, faites le même du point E, & du même intervale en I L & l'ovale sera formée.

9. Pour faire un cercle égal à une ovale. Par exemple, à l'ovale A B C D fig. 38. cherchés une moyenne proportionnelle aux deux diametres A B C D, & l'ayant divisée par le milieu comme seroit ici la ligne E F au point G décrivés un cercle qui passe par les extremités, & il sera le cercle que vous cherchés

10. Pour faire un quarré égal à un cercle, cherchez premierement la grandeur de la circonference, qui se trouvera en posant sur une ligne 3 fois le diametre, & $\frac{1}{7}$ du diametre: c'est à dire, partagez le diametre en 7 parties égales, & faites une ligne qui comprenne trois fois le diametre, & $\frac{1}{7}$ l'une des sept portions du diametre, cette ligne sera égale à toute la circonference: ainsi la divisant en deux. Par exemple, la ligne A B au point C de la fig. 39. vous éleverez perpendiculairement une ligne C D égale au rayon, & en formerez le rectangle B C D E, auquel par le probleme 5e de ce Chapitre, vous ferez un quarré égal F G H qui sera le quarré que l'on cherchoit.

11. Pour faire un quarré égal à une ovale, faites par le Probleme 9e un cercle qui lui soit égal, & à ce cercle un quarré égal par le Probleme 10, & à ce nouveau quarré sera égal à l'ovale proposé, il est inutile d'en proposer la figure.

12. Pour faire une ligne spirale proposez-vous 2 points, tels que sont ici en la figure 40 les points A B entre lesquels du milieu C, vous formerez un demi cercle, & du point A, & de l'intervale A B un autre demi cercle, du point C, & de l'intervale C D un autre demi cercle du point A, & de l'intervale A D un autre demi cercle, & ainsi tant que vous voudrez donner de contours à vôtre spirale.

13. Pour faire une Parabole, soit proposé l'axe A B fig. 41. du sommet A, prenez au dessus de l'axe prolongé, & au dessous deux points egalement distans C & D autant de points qu'il vous plaira sur l'axe, tels que sont E F G H, par lesquels vous menerez des paralleles perpendiculaires à l'axe A B, en suite prenant la distance C E, portez-la du foyer D au point de part & d'autre sur la premiere parallele; prenez encore la distance C F, & du même foyer D transportez-la aux points L L sur la parallele; faites le même sur toutes les paralleles, prenant la distance du point C jusqu'à la rencontre de chaque parallele, la transposant du foyer sur chacune, & faisant passer une ligne courbe A I L, vous aurez la parabole toute formée.

CHAPITRE IV.

Quelques Operations ſur le Terrain.

1. POur tracer une ligne droite ſur le Terrain, on poſe ſur les extremitez deux piquets, & tendant un cordeau entre les deux piquets, on a la ligne que l'on demande: mais il faut prendre garde, que ſi la ligne eſt beaucoup longue, il n'eſt pas facile d'étendre un cordeau de ſi loin; ainſi l'on poſe pluſieurs piquets que l'on alligne, en ſorte que poſant l'œil vis à vis de l'un il couvre tous les autres, voyez la figure 41.

2. Pour tracer un cercle, l'on ſe ſert d'un cordeau attaché au centre du cercle que l'on veut décrire, & ayant pris l'intervale on attache à l'autre extremité du cordeau un autre piquet que l'on gêne par les deux extremitez, afin qu'il ne varie point, & qu'il conſerve le même intervale: il faut encore prendre garde que le cordeau ne s'étende trop, ce qui peut arriver facilement à force de le trop tirer, mais en ce cas il faut repreſenter le piquet ſur la premiere meſure où l'on a pris l'intervale pour voir ſi le cordeau ne s'eſt point trop allongé, & par ce moyen on tracera aſſez exactement un cercle. Mais pour plus grande exactitude, il faut poſer dans l'enceinte pluſieurs piquets qui marquent la diſtance du rayon, & faire en ſorte que le piquet qui trace la circonferenee ſur le terrain, paſſe exactement par le point de chaque piquet, voyez la figure 43.

3. Pour la meſure des angles & pour tracer des perpendiculaires ou de paralleles, on ſe ſert de quelque inſtrument, comme du compas de proportion, ou du demi cercle; celui-ci eſt plus commode: ayez donc un demi-cercle de cuivre ou de bois dur & bien ſec, qui puiſſe ſe polir facilement, & ſe dreſſer de même; en ſorte qu'eſtant fait il ne ſe jette point, & conſerve toûjours une ſuperficie parfaitement plane. Il

tes-le d'un pié de diametre, afin d'avoir les diviſions des degrez plus ſenſibles, & aprés l'avoir diviſé exactement en 180 parties ou degrez, & les degrez en d'autres pour plus grande commodité, vous placerez au centre du demi-cercle, une regle mobile qui aura deux pinules à ſes extremitez. Cette regle mobile doit être evuidée, en ſorte que de part & d'autre l'on conſerve la ligne qui paſſe par le centre de l'inſtrument; & ſur ſes extremitez vous leverez deux pinules poſées perpendiculairement ſur la ligne qui paſſe par le centre que l'on appelle *la ligne de foy*: il ſuffit qu'elles ſoient en chanfrein pour marquer ſeulement la perpendiculaire qui tombe ſur la ligne de foy. Vous poſerez auſſi deux autres pinules ſur l'inſtrument même aux extremitez de la diametrale du demi-cercle, & ces pinules doivent être faites comme celles de la regle mobile, communement apellées *alhidade*.

Le deſſous de l'inſtrument doit être attaché à un genoüil de cuivre ou de bois pour pouvoir tourner le demi-cercle en tout ſens. Les meilleurs genoux ſont ceux qui ſont faits à charniere avec une vis ou deux pour arreſter le demi-cercle dans l'élevation que l'on ſouhaite, & étant troüé pour être mis ſur un chandelier à trois pieds, comme nous l'avons dépeint dans la figure 44. vous aurez vôtre demi-cercle complet.

On peut diſpoſer une petite Bouſſole tout le long du diametre, du demi-cercle pour s'en ſervir comme nous dirons cy-aprés.

4. Pour meſurer un angle acceſſible, c'eſt à dire, dont on peut approcher facilement. Poſez le demi-cercle ſur le ſommet de l'angle, & tournant vôtre demi-cercle le long des côtez, en ſorte que le diametre avec ſes pinules ſoit en ligne droite de l'une des ambes de l'angle propoſé; tournant la regle mobile juſqu'à ce que vous voyez l'autre côté de l'angle, vous aurez pour lors entre l'halidade & le diametre, la valeur de l'angle qui ſera marqué, voyez la figure 45.

5. Mais ſi l'on ne peut pas meſurer commodement l'angle propoſé, voyez ſi en prolongeant les lignes de

l'angle au delà du ſommet, vous pouvez meſurer celui qui eſt oposé au ſommet qui ſera le même, ou celuy qui ſera de l'autre part par la ligne prolongée de l'un des côtez. Par exemple, ſi vous ne pouvez pas meſurer l'angle A B C, fig. 46. prolongez le côté B C, du côté de B juſqu'en D, & voyez ſi vous pouvez meſurer l'angle A B D, que ſi cela ſe peut, & qu'il ſoit de l'ouverture de 130. degrez, retranchez-les de 180, & le reſtant 50 ſera l'angle proposé A B C, que ſi cet angle A B D ne peut pas non plus ſe meſurer commodement, voyez ſi en prolongeant A B juſqu'en F, vous pourrez meſurer l'angle D B E, & pour lors la valeur ſera la même que de l'angle A B C.

Sinon voyez ſi vous pourrez mener une parallele, (*comme nous l'enſeignerons cy-aprez*) à l'un ou à l'autre côté de l'angle, comme B A du point D ou de quelqu'autre, pris ſur la ligne prolongée C B, & pour lors meſurant l'angle G D F, il ſera égal à l'angle proposé.

Enfin ſi vous ne pouvez point vous ſervir de toutes ces operations, & que l'angle ſoit tellement inacceſſible, que vous pouvez ſeulement le voir de l'endroit où vous ſerez ſitué; poſez vôtre demi-cercle en ſorte que la ligne diametrale ne faſſe qu'une même ligne viſuelle avec le côté B A fig. 47. & meſurant l'angle B D E en tournant l'halidade ſur un piquet aligné au côté B C, vous en marquerez la valeur le plus exactement qu'il ſe pourra; & en ſuite portant le demi-cercle au point E, faiſant aligner la diametrale au côté B C, vous meſurerez l'angle B E D, laiſſant un piquet au point D pour ſervir de point de vûë, ainſi ſachant la valeur des deux angles E & D, vous en ſouſtrairez la ſomme de 180 degrez, le reſte donnera l'angle requis A B C.

6. Pour tracer un angle ſur terre de la valeur donnée, il ſuffit de ſe propoſer le point du ſo... , & poſant vôtre inſtrument le long du côté de l'a gle, vous tournez l'halidade ſur l'ouverture de l'angl ro-poſé, faiſant mettre un piquet qui réponde aux nu-

es de l'halidade, ce qui eſt aſſez clair.

7. Pour mener d'un point donné une parallele à une autre ligne donnée; ſi l'endroit eſt acceſſible, poſez un piquet ſur le point donné, Par exemple, au point A fig. 48. & prenant ſur la ligne donnée B C un point diſcretion, comme par exemple C, meſurez l'angle C A du point A, & ſur la ligne imaginaire A C aprés voir laiſſé un piquet en C, faites par le Probleme precedant l'angle C A D égal à l'angle B C A, & la igne A D ſera parallele à la ligne B C.

Mais ſi la ligne B C eſt inacceſſible, meſurez l'angle A C du point donné A, cherchez enſuite un point E n ſorte que l'angle B E C ſoit égal à l'angle B A C, meſurez encore l'angle acceſſible B E A, & du point A ur la ligne A C, faites l'angle CAD égal à l'angle BEA t la ligne A D ſera la parallele requiſe.

8. Pour élever une perpendiculaire d'un point onné, il ſuffit de faire un angle de 90 degrez, ſi le oint eſt dans la ligne, & ſi le point eſt hors de la ligne il faut tirer un parallele à la ligne propoſée, & de point former ſur cette parallele une perpendiculai-, ou un angle de 90 degrez.

9. Pour tracer une figure tant reguliere qu'irreguere, il faut ſavoir exactement la valeur des angles & s côtez, & ſur une ligne propoſée aprez luy avoir onné la longueur propoſée former ſur ces extremiz des angles égaux à ceux de la figure & continuant e la même ſorte à chaque extremité des côtez à qui n a donné la juſte meſure, la figure ſe trouvera juſte ourveu que l'on ait operé fidelement.

CHAPITRE V.

De la Longimetrie.

DEFINITIONS.

L'On appelle *Longimetrie* l'art de meſurer toute ſorte de longueurs, tant acceſſibles qu'inacceſſibles.

Pour cela on ſe ſert de la ſeule ligne droite, parce qu'étant la plus ſimple & la plus uniforme ; d'ailleurs elle eſt encore la plus facile, ainſi l'on reduit toutes les longueurs à la ligne droite, dont on determine une certaine longueur qui ſert de meſure à toutes les autres.

Cette meſure eſt communement appellée *pied*, & elle eſt connüe à tout le monde, voyez ce que nous avons dit en nôtre Arithmetique, chapitre 12. nombre 1. touchant les pouces, lignes, toiſes, pas, perches, &c. qui ſont les meſures ordinaires, dont on ſe ſert particulierement en France.

1. Pour meſurer une ligne acceſſible, l'on plante 2 piquets aux extremitez pour voir plus facilement le but auquel l'on va en meſurant, & ne ſe point écarter de la ligne droite. En ſuite l'on ſe ſert d'une chaine d'une longueur arbitraire où les toiſes & les pieds ſoient marquez ; 5 toiſes ou 20 pieds ſuffiſent pour la longueur de la chaîne, parce qu'une plus longue par ſa peſanteur ne pourroit nullement ſe dreſſer, elle eſt faite ordinairement d'un fil de fer bien retourdu, & contourné en pluſieurs petits chainons pour ne pas s'étendre facilement : enſuite l'on tient pluſieurs flêches toutes ferrées par le bout pour la planter aux endroits qui marquent la longueur de la chaine ; & pour cela l'extremité de la chaine contient .... au que l'on tient à la main avec la flêche, & celui marche le dernier doit prendre garde ſi celuy qui le premier ne s'écarte point de la ligne droite. Et de

Il faut tenir les flêches bien perpendiculaires au terrain pour ne pas s'équivoquer. J'avoüe que cette maniere de mesurer peut être faillible: mais à ceux qui l'ont un peu pratiquée, elle est la plus juste & la plus commode. Voilà la maniere de mesurer les longueurs accessibles.

2. Pour mesurer les longueurs inaccessibles: on sert du demi-cercle dont nous avons parlé cy-dessus au chapitre 4e & aprés avoir mesuré une longueur en un lieu accessible sur les extremitez de cette ligne que l'on prend arbitrairement, on mesure les angles que forme la ligne arbitraire avec les extremitez de la ligne que l'on veut mesurer, & par ce moyen on trouve ce que l'on s'étoit proposé. Par exemple.

On demande de mesurer la longueur A B [fig. 50.] qui est inaccessible, soit par quelque riviere, marais, étang, bois, &c. qui n'en permettent pas l'aproche, ou autrement. Je cherche aux environs de la ligne quelque lieu commode où je puisse en toute liberté faire les operations necessaires supposant que le long de la ligne arbitraire C D soit propre pour cela, je pose au point C le demi-cercle, & mesure les angles D C A, D C D, dont je marque la valeur, supposons que le premier soit de 303 degrez & l'autre 24, cela fait, je pose mon instrument au point D, & mesure les angles C D A, C D B, supposons encore que le premier soit de 23 degrez & l'autre de 110. ces operations finies pourveu qu'elles soient exactes, & que le lieu soit propre pour mesurer la ligne C D, comme nous l'avons supposée, j'en cherche la distance que je supose ici être 120 toises: ensuite je me propose une échelle de proportion que je divise arbitrairement en tant de parties que je veux; supposons que ce soit l'échelle E F que j'ay divisée en 200 toises, comme elle paroit l'être. Cette échelle étant determinée, je tire sur le papier une ligne indefinie à qui je donne 120 toises le prenant depuis F en G, & les portant sur H I, de sorte que le point H represente le point C de la ligne mesurée, & le point I marque le point D, du point G je

marque avec le demi-cercle ou raporteur d'angles la valeur des deux angles D C A & A C D, dont le premier eſt 105, & le ſecond 24 degrez, par le moyen des lignes indefinies H L, H M, & du point I marquant pareillement la valeur des angles C D A, & C D D qui ſont 110 & 23 par les lignes indefinies I L, I M, & même la ligne L M des points où ſe coupent les lignes indefinies, & tranſporte l'intervale L M ſur l'échelle où je connois que la ligne A B a 150 toiſes de long.

Nous remarquerons que cette methode quoique veritable dans la ſpeculation, eſt fort ſujette à l'erreur parce qu'en operant il eſt facile de ſe tromper, & que l'échelle de reduction pour peu qu'elle ſoit fautive l'on s'écarte beaucoup, ainſi pour plus grande exactitude il faudroit par le moyen des angles connus & de la ligne que l'on a meſurée ſuputer ſelon les regles de la trigonometrie par le calcul des ſinus, tangentes & ſecantes trouver la ligne propoſée; mais nous en traiterons ailleurs, ne voulant ici donner que des operations faciles, & comme mécaniques pour divertir ceux qui aiment d'abord la pratique ſans ſe mettre en peine de la ſpeculation, & cette methode quand elle eſt faite exactement peut ſuffire à cela.

Par cette même methode l'on peut meſurer toute ſorte d'hauteur, ſoit par exemple la tour A B [fig. 51. dont on veut ſavoir la hauteur, placez vôtre demi-cercle à une certaine diſtance telle que vous la jugerez plus commode. Par exemple en C, en ſuite meſurez l'angle A C B & meſurez la ligne B C. Et comme l'angle B A C eſt un angle droit, il ſuffira de marquer ſur le papier la ligne A C de 100 toiſes, par exemple, en D E & aprez avoir élevé la perpendiculaire indefinie E F & formé vôtre angle E D F égal à l'angle A C B la ligne E F portée ſur l'échelle, donnera la hauteur de la tour A B.

Mais ſi l'on ne peut pas aprocher le pié de la tour comme dans la fig. 52. du point C qui eſt acceſſible, prenez vôtre diſtance C D comme il vous plaira, & en ſuite meſurez les angles D C A & A D C avec la lon-

leur C D & le tout étant raporté ſur le papier, vous
urez la hauteur A B.

3. Que ſi l'on propoſe de meſurer tous les côtez
d'un Plan, & d'en former la figure ſur le papier, ſoit
que les côtez ſoient acceſſibles ou non, il n'y a qu'à
uivre les mêmes régles que celles que nous avons
éja preſcrites, ou quelques autres de celles des cha-
itres precedens, par exemple, ſi l'on propoſe de tirer
Plan Z de la figure 53.

J'examine premierement toute l'enceinte, afin d'en
connoître tous les angles, & l'irregularité des lignes:
ſuposant que la ligne A B ſe puiſſe meſurer, qui eſt
ne ligne imaginaire que je marque avec quelques pi-
uets depuis A en B, particulierement vis à vis les
oints ou angles les plus avancées comme C, D, E,
our tirer à ces mêmes angles F, G, H, les perpendicu-
res C F, D G, E H, ainſi meſurant chaque partie, &
perpendiculaire, je trouve pour A C 36; pour la
rpendiculaire C F 10, pour C D 30, pour D G 12,
our D E 20, pour F H 12, pour E B 40, que je poſe
parément ſur le papier où j'ay déſigné à peu prez
enceinte du Plan pour en marquer exactement les
aleurs, donnant à chaque ligne que l'on meſure une
enomination par quelques lettres de l'Alphabet,
arquant pour les lignes qui forment l'enceinte des
gnes entieres, & pour les imaginaires des lignes ponc-
uées, comme le repreſente la figure.

Le côté A B, & ſes diverſes perpendiculaires étant
inſi marquées & meſurées, du point B meſurez avec
e demi-cercle l'angle E B I, ſuivant la pratique cy-
eſſus du chapitre 4e, & ayant marqué ſa valeur qui
ſt de 137 degrez; meſurez la ligne B I, & ſes perpen-
iculaires, qui ſont de la valeur cy-aprés marquée; en
uite meſurant l'angle B I T qui eſt de 77 degrez, vous
e marquerez, & meſurez ſimplement les longueurs
V, I T, T V, que vous marquerez ſur vôtre papier,
hacune comme elles ſont cy-aprés repreſentées.

Du point T vous meſurerez l'angle I T X, prenant
n point arbitraire dans la circonference T X Y, ſi l'on

peut commodement entrer dans le concave de cét arc, & aprés l'avoir mesuré & marqué, vous mesurerez aussi la ligne T X, vous ferez le même de l'angle T X Y dont vous marquerez la valeur, & des lignes T Y, X Y, vous mesurerez encore l'angle X Y &, & mesurerez les côtez ou lignes Y & Y A, & A&, & Y G, s'il se peut, & vôtre Plan sera tout mesuré.

[vous plaira.

A C 36 Perches ou Toises, ou quelque mesure qu'il

C F...10—
C D..30—
D G..12—
D E....20—
E H....12—
E B....40—
B P.....7—
P L....16—
P Q...12—
Q M...9—
Q R...12—
R N....8—
R S.....9—
S O.....8—
S L.....13—
I V.....50—
I T.....86—
T V...60—
T X...53—
X Y...32—
T Y..48—
Y &...72—
Y A...86—
A &...54—
Y G...68—

L'Angle E B I 137 degrez.

B I T....77—
I T X...93—
T X Y..94—
X Y &..120—

Toutes vos mesures ainsi prises, bien nommées, & bien marquées, tant des côtez que des angles, vous décrirez une échelle, telle que vous la voyez en la figure 53. & sur cette échelle vous décrirez vôtre Plan &

remierement vous tirerez une ligne indefinie A B ſur quelle vous marquerez du point A au point C, 36. ue vous prendrez ſur l'échelle, & du point C ayant levé la perpendiculaire C F vous luy donnerez 10, & lrerez la ligne entierement marquée A F, que ſi vous vez reconnu que le côté A F a quelque ſinuoſitez, & u'elle ne ſoit pas droite, vous le marquerez par une igne approchante comme elle eſt marquée dans la fi- ure 53. vous continuerez les longueurs C D, D E, E B, qui vous donnerez par le moyen de l'échelle à cha- une ſa veritable longueur, & ayant élevé des perpen- liculaires comme elles ſont marquées & déſignées ur le broüillard vous leurs donnerez à chacune leur uſte meſure, prenant garde à celles qui ſortent de la igure, & celles qui entrent au dedans comme la per- endiculaire D G qui marque l'angle r'entrant F G H. k ayant marqué les côtez F G, G H, H B avec leurs inuoſitez vous aurez par là décrit tout ce qui eſt mar- qué ſur la ligne A B.

Secondement, vous marquerez avec un petit demi cercle ſur le point B, & la ligne B E, l'angle E B I de 137 degrez; tirant la ligne B I indefinie, ſur laquelle vous marquerez par le moyen de l'échelle toutes les parties B P, P Q, Q R, R S, S I, & les perpendiculaires P L, Q M, R N, S O, que vous clorrez, en tirant les lignes droites B L, L M, M M, N O, O I, ce qui achevera la ligne B I.

Troiſiémement, vous marquerez avec un petit demi-cercle l'angle B I T de 77 degrez, & la ligne ponctuée I T de 86 toiſes; & enſuite prenant avec le compas pour la longueur I V 50 toiſes, vous formerez en V un petit arc qui aura pour centre le point I, & pour rayon la valeur de 50 toiſes, & prenant pour T V 60 toiſes du point T, & de cette valeur de 60 toiſes, vous décrirez un autre arc en V qui coupera le premier au point V, dont vous tirerez les lignes I V, V T, que vous marquerez entierement.

Quatriémement, vous formerez l'angle I T X par la ligne T X indefinie juſqu'à ce que vous ayez marqué

la valeur de T X qui eſt de 33 toiſes : en ſuite vous formerez auſſi l'angle T X Y de 94 degrez, & marquerez la valeur de X Y au point Y, & tirerez les lignes ponctuées T X Y, & par ces trois points, vous ferez paſſer un cercle [*chap. 1. n. 8.*] & marquerez l'arc T X Y entierement, comme étant de l'enceinte du Plan.

Enfin des points A & Y, vous prendrez les valeurs A &, Y &, dont vous formerez les arcs qui ſe coupent en &; Et ayant mené les lignes A &, & Y, & vôtre Plan ſera fini. Et les lignes T Y, Y A, Y G, ſerviront pour reconnoître ſi vous avez bien operé : car ſi elles ſe trouvent aprés le Plan décri de la longueur qu'elles ſont marquées ſur le brouillard, c'eſt une marque que vous avez bien reüſſi, ſinon vous avez trop ouvert les angles ou trop fermé, ce qui arrive lorſque ces ſortes de diagonales ſe trouvent ſur le Plan, plus courtes ou plus grandes qu'elles ne doivent être ; ainſi il faut tâcher d'éloigner ou de raporter les lignes, afin de rencontrer le plus juſte que cela ſe peut faire ; & pour obvier à cela former quantité de diagonales qui partagent le Plan en pluſieurs triangles ce que la pratique fera aſſez connoître.

Mais s'il arrive que quelqu'un des côtez ſoit inacceſſible, par exemple I V vous le meſurerez ſuivant les regles de l'Article 2e ou bien il ſuffira de meſurer l'angle T I V, & l'angle I T V qui étant formez ſur la ligne I T des points I & T, les lignes T V & I V ſe rencontreront neceſſairement au point V.

Et ſi l'angle B I T ne pouvoit pas ſe meſurer, vous prolongerez la ligne imaginaire T I au delà de I & meſurant l'angle B I à qui ſe trouvera de 103 degrez, vous le ſouſtrairez de 180, & le reſtant 77 ſera la valeur de l'angle B I T.

Pareillement ſi l'on ne peut point entrer dans le concave de l'arc X Y T, parce qu'il eſt rempli d'eau, ou qu'il s'y trouve quelqu'autre obſtacle ; vous prendrez l'angle I T B & la longueur T b arbitraire juſqu'à ce que vous puiſſiez mener la touchante b X C qui touche le cercle en X, meſurant les angles T b c

& les longueurs b X, X c, C Y, & ayant décrit la figure T b X c Y, vous ferez comme cy-devant paſſer un cercle par les points T X Y ce qui ſuffira pour marquer l'arc T X Y.

4. Avec les mêmes regles de meſurer les grandeurs inacceſſibles nous donnerons ici le moyen de faire une Carte de quelques Païs particuliers, en ſe ſervant de la Bouſſole pour ſe moins tromper. A l'égard de la Bouſſole il ſuffit qu'elle ait une aiguille bien legere, & bien aymantée. Neantmoins pour ne pas ſe méprendre, il faut le prouver pluſieurs fois pour voir ſi elle s'arrête toûjours en un même point; & pour cela il faut que ſa boëte au dehors ſoit quarrée [*voyez la figure* 54.] & bien à l'équerre le dedans rond avec deux lignes perpendiculaires qui partent du centre où eſt le pivot de l'aiguille, ces lignes doivent être paralleles chacune a deux des côtez de la boëte en dehors afin de s'appliquer ſur le demi-cercle le long de ſa diametrale, & marquer plus exactement la meridienne le long des lignes poſées ſur la diametrale. Et pour plus grande exactitude, il faut prendre garde ſi l'aiguille s'arrête préciſement ſur la meridienne, ce que vous connoîtrés en cette maniere.

Marquez [*voyez la figure* 54.] pluſieurs cercles concentriques ſur un Plan, & du centre élevez perpendiculairement un ſtile de quelque grandeur qu'il vous plaira pourveu que l'extremité puiſſe marquer l'ombre ſur quelqu'un des cercles concentriques; & peu de temps avant midi, marquez ſur l'un des cercles concentriques le point qui terminera l'ombre du ſtile; & s'il ne ſe trouvoit aucun cercle ſur qui l'extremité de l'ombre tombant, décrivez-en un par l'extremité que vous aurez marquée, remettez vôtre Plan dans la même ſituation, & attendez aprés midi que l'ombre du ſtile ſe trouve de nouveau ſur le même cercle, où ayant marqué un point ſans changer de place au Plan, ni ſans le remuër tirez une corde comme B C, que vous diviſerez également au point D, & menant la diametrale D A, elle ſera la meridienne ſur laquelle

vous appliquerez vôtre Bouſſole, en ſorte que les points S M de la Bouſſole [fig. 54.] ſoient bien appliquez ſur la ligne A D qui eſt la meridienne. Et ſi l'aiguille s'arrête ſur la ligne S M, c'eſt une marque de la bonté de la Bouſſole, mais cela arrive rarement: de ſorte que vous prendrez garde de quel côté l'aiguille decline & de combien, ce que vous marquerez exactement: cela fait ſuppoſons.

Qu'il faille faire la Carte de tous les Villages marquez A, B, C, D, E, F. Premierement de quelque lieu bien élevé, comme ſeroit une tour d'un Château ou un Clocher d'une Egliſe. Poſez vôtre demi-cercle en ſorte que la diametrale ſerve de meridienne, ce que vous ferez facilement en poſant la Bouſſole le long de la diametrale du demi-cercle, tournant le demi-cercle juſqu'à ce que l'aiguille ne faſſe qu'une parallele avec la diametrale, & qu'elle s'arrête ſur les points S M, & enſuite prenez garde de tellement arrêter le demi-cercle qu'il ne varie ni d'un côté ni d'autre, afin que la diametrale ne change point de ſituation. Cela fait, tournez l'halidade juſqu'à ce que vous trouviez entre les pinules tous les endroits que vous voulez ou que vous pouvez découvrir afin d'en marquer la declinaiſon de la meridienne, tant du côté du Levant que du Couchant: ainſi ſuppoſons que ma premiere ſtation fût en C, & que la meridienne ſoit la ligne indefinie S M; ayant diſpoſé le demi-cercle en ſorte que la diametrale repondе ſur la ligne S M, & tournant l'halidade juſques à ce que je découvre par les pinules le clocher A, je trouve que ſa declinaiſon du Septentrion au Midi, & du côté du Levant eſt de 17 degrez, qui ſont renfermez par l'angle S C A, ce que je marque ſur le broüillard, comme vous le verrez ci-aprés. Et tournant en ſuite l'halidade ſur le clocher B, je trouve la declinaiſon formée par l'angle S C B de 90 degrez que je marque ſur le broüillard: de même tournant l'halidade du côté de F, je trouve que le chateau F, eſt entierement ſur la meridienne, ainſi il ne marque point de declinaiſon, mais ſeulement je marque F au Midi

même du côté du Couchant aux châteaux D & E, ous trouverez que E decline du côté du Couchant, u Midi au Septentrion de 46 degrez 30 minutes; & château D de 140 degrez, ce que je marque exactement ſur le broüillard.

Secondement changez de ſtation, & ſuppoſant que ous preniez la tour du château E, cherchez la meridienne S M qui paſſe par le château E, ſur laquelle aplíquez demi-cercle, & cherchez en ſuite toutes les declinaiſons du côté du Levant, qui ſont A, B, C, D, F, & ue vous trouverez telles quelles ſont marquées cyprés.

Troiſiémement ſi vous voulez une plus grande xactitude faites une troiſiéme ſtation, par exemple en où ayant cherché la meridienne S M ſur laquelle plique le demi-cercle, vous marquerez pareillement s declinaiſons F, E, C, D, A, comme elles ſont déites ci-aprés.

Premiere ſtation au Château C

Du côté du Levant.

	Degrez	Minutes.
Du Septentrion au Midi. A..	17	0
B..	90	
F..	180	ou au Midi.

Du côté du Couchant.

Du Midi au Septentrion... E.....	46	30
D...	140	

Seconde ſtation au Château F

Du côté du Levant.

Du Septentrion au Midi.... D....	5	
A..	32	
C...	46	
B....	63	
F..	123	

Troiſiéme ſtation au Clocher B

Du côté du Couchant.

De Midi au Septentrion	F	30 —
	E	63 —
	C	90 —
	D	120 —
Diſtance de E à F ½ lieüe	A	150 —

Quatriémement cherchez quelque ſituation commode pour meſurer la diſtance, par exemple de E à F & l'ayant trouvé par les regles de l'Article 2. de ce même Chapitre, vous la marquerez ſur vôtre broüillard. Suppoſons qu'elle ſoit de demi lieüe ou 1500 pas geometriques, & ſur cette meſure vous ferez vôtre échelle & vôtre carte, ſuivant cette methode.

Menez une ligne indefinie qui repreſentera la meridiane S M qui paſſe par le Château F & du point E, pris arbitrairement ſur la ligne ponctuée, faites l'angle S E F qui marque la declinaiſon de F à la ſeconde ſtation; cette angle eſt de 123 degrez, ſur la ligne E F marquez une demi lieüe pour le Château F; & enſuite formez les angles de declinaiſon faits par les lieux D, A, C, B, avec un demi-cercle ou raporteur, ſuivant la valeur marquée pour chaque declinaiſon de la ſeconde ſtation, le tout par des lignes ponctuées & indefinies.

Du point F menez une parallele à la meridiane S M pour deſigner la meridiane qui paſſe par les châteaux C, F, & le point C où ſe rencontrent les lignes E C, F C, ſera le point de la premiere ſtation, ſur lequel appliquant le raporteur d'angles vous marquerez les declinaiſons, tant du côté du Levant que du Couchant, comme elles ſont marquées ſur le broüillard E, D, C, B, & le point d'interſection fait par les lignes B E, C B ſervira pour la troiſiéme ſtation, et vous appliquerez le raporteur d'angles, aprés a menée la ligne meridiane parellele aux autres vant décrites S M, & de ce point vous marque

les angles de declinaiſon marquez dans la troiſiéme ſtation, & où ces dernieres lignes couperont toutes les premieres dans les mêmes points communs A, D, C, E, F, ce qui achevera la carte, en marquant ſur chaque point un clocher ou château, ſelon que vous aurez reconnus la choſe dans l'operation. Et ſi vous voulez ſavoir la diſtance de chacun à l'autre, vous n'aurez qu'à la prendre avec le compas, par exemple E B, & l'appliquant ſur l'échelle, vous connoîtrez que la diſtance de E à B eſt de trois quarts de lieües & demie.

Mais s'il arrivoit qu'un chateau ou village fût tellement environné de bois qu'on ne pût le découvrir d'aucun autre château ou clocher, vous chercherez quelque ſituation élevée de laquelle vous puiſſiez voir le lieu caché, & quelqu'un de ceux que vous aurez déja découvert, & ce lieu vous ſervira de ſtation; comme par exemple, ſi le château D ne pouvoit être découvert ni de A ni de B, &c. & que de l'endroit marqué G comme une petite colline l'on pût découvrir en même temps les châteaux D & E vous y ferez une ſtation, en tirant une meridiane, & prenant les declinaiſons D & E, vous aurez la diſtance E D. Et ſi une ſtation ne ſuffit pas, il s'en faut propoſer pluſieurs, & operer de même: mais ſi l'on ne découvre du tout rien, il faut s'informer de la diſtance de D à tous les autres, & par pluſieurs interſections d'arcs qui auront pour rayons les differentes diſtances de D à A, B, C, E F, vous trouverez le lieu marqué D le plus vrai-ſemblablement qu'il ſe puiſſe: car l'on ne meſure rien en Geometrie que par la communication & proportion de certaines grandeurs aux autres.

CHAPITRE VI.

De la Planimetrie.

DEFINITIONS.

L'On appelle *Planimetrie* l'art de meſurer l'aire ou ſuperficie des grandeurs, & de même que pour meſurer les longueurs l'on ſe ſert de la ſeule ligne droite; auſſi pour meſurer l'aire ou ſuperficie d'une figure quelle qu'elle ſoit, on ſe ſert du *quarré*; ainſi on reduit au quarré toute ſorte de ſuperficies planes ou courbes. Pour cela il faut avoir un quarré determiné, comme nous avons dit qu'il faloit une longueur determinée & connuë, telle qu'eſt le pié de Roy: En poſant que l'on faſſe un quarré d'un pié de long, & d'un pié de large, ce quarré ſera la meſure determinée, tant des figures qui l'excederont que de celles qui ſeront moindres, telles que ſont le pouce quarré, la ligne quarrée. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe que la figure 57 ſoit d'un pié de long & autant de large, ce ſera un pié quarré, qui étant diviſé, ſavoir la longueur en 12 pouces, & la largeur en autant chaq; petit quaré ſera un pouce quarré, de maniere que le pié quarré en contient 144, ſuivant la multiplicatiõ de 12 par 12. Et ſi l'on diviſoit encore la longueur & la largeur d'un pouce en 12 lignes chaque quarré formé par cette diviſion, ſeroit une ligne quarrée, & le pouce quarré en contiendroit auſſi 144, c'eſt ſur cette meſure que toutes les ſuperficies ſe meſurent: car par exemple, pour faire un pas geometrique quarré, il faut que le coté du quarré ait 5 piez & par conſequent le pas quarré contient 25 piez quarrez, où l'on voit qu'en prenant un tout autre quarré par cette meſure la multiplication donnera l'aire ou ſuperficie.

1. Pour donc meſurer la ſuperficie, tant d'un quarré parfait que d'un quarré long, il ſuffit de multiplier

l'un des côtez par l'autre ; la longueur par la largeur, par exemple, si un quarré a cent pas de longueur & 45 de largeur, la multiplication de cent par 45 qui donne 4500 pas sera l'aire ou superficie du quarré proposé, ce qui est tres clair ; & qui ne demande pas plus d'explication.

2. Le côté d'un quarré long & sa superficie étant connües pour connoître l'autre côté, il suffit de diviser la superficie connüe par le côté connu : de sorte que si un quarré long a 4500 de superficie, & l'un de ses côtez 45 en divisant 4500 par 45, le quotient qui en provient & qui est 100 est l'autre côté du quarré proposé.

3. Pour mesurer la superficie d'un triangle on abaisse du sommet une perpendiculaire sur la base, & ayant mesurée cette perpendiculaire on en multiplie la moitié par toute la base. Par exemple, [*fig.* 52.] au triangle A B C pour en savoir l'aire, il faut abaisser la perpendiculaire B D, & supposant qu'elle ait 30 toises de long, & la base 35 en multipliant la moitié de 30 ou 15 par 35 le produit 525 toises est la contenuë du triangle A B C ; nous remarquerons qu'en cela il n'importe de quel angle l'on abaisse la perpendiculaire, car il est arbitraire de prendre quel côté l'on veut pour base.

4. Pour mesurer toute sorte de quadrilateres trapezes & polygones, tant reguliers qu'irreguliers : on les divise en plusieurs triangles, sur la base desquels abaissant des perpendiculaires, le produit de la base par la moitié de chaque perpendiculaire donnera la superficie de chaque triangle, & en suite ajoûtant en une somme tous ces triangles, vous aurez la superficie de la figure proposée.

Par exemple pour mesurer le trapeze ABCD fig. 58. je tire la diagonale A D qui partage le trapeze en deux triangles, sur la base commune desquels j'abaisse les perpendiculaires BE, C F, dont je mesure la longueur, & celle de la base commune A D, supposons que la diagonale A D soit de 65 toises, la perpendiculaire E B

de 32 dont je prens la moitié 16 que je multiplie par 65 le produit eſt 1040 pour la ſuperficie du triangle A B D ; je meſure enſuite la perpendiculaire CF qui ſe trouve de 36 toiſes dont la moitié eſt 18, qui étant multiplié par la baſe 65, le produit eſt 1170 pour la ſuperficie du triangle A C D, ainſi ajoûtant 1040 à 1170 la ſomme 2210 toiſes eſt la ſuperficie du trapeſe A B C D.

Que ſi l'on propoſe de ſavoir la ſuperficie du rectiligne G H I L M N diviſez-le en quatre triangles G H I, I L M, I M N, I G N, ſur la baſe deſquels vous abaiſſerez les perpendiculaires P I, L Q, N R, O I. Meſurez premierement le triangle G H I, dont la baſe eſt de 100 toiſes & la perpendiculaire 42, la moitié 21, le produit de 100 par 21, eſt 2100 pour le premier triangle G H I. Venez au ſecond I L M dont la baſe I M eſt de 88 toiſes, & la perpendiculaire Q L 55 la moitié de la baſe eſt 44. (car il n'importe pas de prendre la moitié de la baſe ou de la perpendiculaire ; & il faut pour faciliter & abreger le calcul eviter les fractions : ainſi j'ay dit de prendre la moitié de la baſe 88 plûtôt que la moitié de la perpendiculaire 55 qui auroit été de 22 ½) que vous multiplierez par 55 & le produit 2420 toiſes eſt la ſuperficie du ſecond triangle I L M. Pareillement puiſque la baſe I M eſt de 88, & la perpendiculaire R N de 61 le produit de la moitié de 88, qui eſt 44 par 61 dõne 2684 qui eſt la ſuperficie du 3e triãgle I M N, enfin ſupoſant la baſe G N de 110 toiſes & la perpẽdiculaire O I de 66 toiſes, dont la moitié eſt 33 en multipliant 110 par 33 le produit 3630, ſera la ſuperficie du dernier triangle I G N. Et ajoûtant les 4 nombres 2100, 2420 2684 & 3630, leur ſomme 10834 toiſes ſera la ſuperficie totale du rectiligne propoſé G H I L M N qui pourront être reduites comme l'on voudra en journal, arpent, coupée, &c. Par exemple ſi le Journal eſt de 400 toiſes en diviſant 10834 par 400, le quotient ſera 27 journaux & $\frac{14}{400}$ ou $\frac{17}{100}$ pour la ſuperficie du rectiligne propoſé. Et ſi l'on vouloit le reduire en coupées, ſupoſant que la coupée fut de 250 toiſes en ſi

ifant le nombre 10834 par 250 le quotient ſeroit 43 coupées & $\frac{84}{250}$ ou $\frac{42}{125}$, d'une coupée ; & generalement quelque meſure que l'on ſe propoſe l'aire ou ſuperficie du rectiligne ſe reduira de la même maniere.

Nous remarquerons que l'on pouvoit reduire le rectiligne propoſé en d'autres triangles comme dans la figure 59. ce qui revient au même : car de même que es quatre triangles de la figure 58. repreſentent, & contiennent toute la ſuperficie du rectiligne propoſé, ainſi les quatre triangles de la figure 59. repreſentent & contiennent également tout le même rectiligne : mais, autant qu'il ſe peut, il faut faire ſervir une même baſe à deux triangles, comme la baſe IM pour les deux triangles I L M, I M N.

D'ailleurs il faut ſouvent ſouſtraire un triangle du otal, comme ſi dans la figure 59. on avoit meſuré oute la ſuperficie du rectiligne G H L M N, il faudroit en ſouſtraire la valeur du triangle H I L, & pour ors on auroit la valeur du rectiligne G H I L M N.

5. Pour meſurer la ſuperficie d'un cercle, on multiplie le rayon par la moitié de la circonference, & le produit donne la ſuperficie du cercle, & la circonference ſe trouve comme nous l'avons enſeigné au Chapitre 3e Article 10.

Ou bien multipliez le diametre par lui-même, & faites comme 14 à 11, ainſi le quarré du diametre ; & la quatriéme proportionnelle vous donnera la ſuperficie du triangle ; ainſi ſuppoſant que le diametre d'un cercle aye 35 toiſes ou pieds, ſon quarré ſera 1225, qui étant mis au troiſiéme lieu d'une Regle de trois, vous aurez cette proportion, ſi 14 donne 11 combien 1225 en diviſant par 14, 13475 qui eſt le produit de 11 par 1225 le quotient ſera 962 toiſes & demi, pour la ſuperficie du cercle.

6. Pour meſurer un ſecteur de cercle : c'eſt à dire, une ſuperficie compriſe entre deux rayons & un arc de cercle. Voyez quelle portion du cercle eſt l'arc compris entre les deux rayons, & le ſecteur ſera une

ſemblable portion de toute la ſuperficie du cercle, par exemple dans la figure 60, ſoit donné le ſecteur ABC, & que l'arc AC, ſoit la ſixiéme portion du cercle. Pareillement tout le ſecteur ABC, ſera la ſixiéme portion de toute la ſuperficie du cercle, ainſi ſuppoſant que le cercle X ait en toute ſa ſuperficie, comme nous l'avons trouvé cy-deſſus en l'Article 5e 962 toiſes $\frac{1}{2}$ le ſecteur ABC ſera la $\frac{1}{6}$ de 962 toiſes $\frac{1}{2}$ c'eſt à dire 160 $\frac{1}{12}$.

7. Et pour ſavoir la ſuperficie d'un ſegment, comme dans la figure 60 celle du ſegment ADC, il faut premierement prendre la valeur du ſecteur ABC par l'Article precedent, & en ſuite meſurant la valeur du triangle rectiligne ABC, & la retranchant de la ſuperficie totale du ſecteur, le reſtant ſera la valeur du ſegment ADC: Mais pour plus grande commodité, lorſqu'on ne veut pas une exactitude entiere autant quelle ſe peut on ſe contẽte pour meſurer un ſegmẽt de cercle ou de toute autre figure comme de l'ovale, ou de la parabole; on ſe contente, dis-je, de multiplier la corde par la flêche, & du produit en ôter le $\frac{7}{11}$ Par exemple de multiplier la corde AC [*fig.* 60.] par la flêche ED & ſouſtraire le $\frac{7}{11}$ du produit qui en reſulte, ce qui eſt facile de faire.

8. Pour meſurer un ovale, faites-luy un cercle égal par le Probleme 9e du Chapitre 3, & ayant pris la ſuperficie de ce cercle par l'Article 5e vous aurez celle de l'ovale.

9. Pour meſurer la ſuperficie d'une ſpire, Par exemple celle de la figure 40, il faut prendre ſeparément toutes les ſuperficies des demi-cercles qui la forment, & en faire une ſomme totale qui ſera la ſuperficie que l'on demande.

10. Pour avoir la ſuperficie d'une Parabole, Par exemple, de celle de la figure 41, multipliez l'axe AB par la baſe OP, & du produit ôtez-en le $\frac{1}{3}$ le reſtant ſera la valeur de la Parabole; ou bien doublez le produit de la baſe par ſon axe, & diviſez par 3, ce qui en proviendra, & le quotient ſera l'aire requiſe.

11. Pour avoir la ſurface d'une Sphere, on ſe contante de multiplier la circonference du plus grand cercle par ſon diametre ; ainſi multipliant la circonference 22 par le diametre 7, le produit 154 eſt la ſurface d'une Sphere qui aura pour axe 7 pieds de lõgueur.

12. Pour avoir la ſurface d'un Cylindre, on multiplie la hauteur par la circonference de ſa baſe. Par exemple, ſi un cylindre a 12 pieds d'hauteur, & ſa circonference 22, toute ſa ſuperficie convexe ſera de 264 pieds quarrez.

13. Pour avoir la ſuperficie convexe d'un cone droit : on multiplie la circonference de la baſe par le côté du cone & du tout, on en prend la moitié. Par exemple, ſoit le cone A C B [*fig.* 61.] dont la baſe eſt la circonference A D C E, & le côté du cone B A, il faut multiplier toute la circonference A D C E par le côté A B, & du produit en prendre la moitié. Mais toute la difficulté eſt de ſavoir la valeur du côté A B, pour cela il faut meſurer le diametre AC, & en prendre la moitié A F que vous multiplierez par elle même; Pareillemẽt meſurez la hauteur BF & la multipliez par elle-même. Ajoûtez ces 2 produits, & de la ſomme cherchez-en la racine quarrée, elle vous dõnera la valeur du côté A B. Par exemple, ſupoſons que le demi-diametre A F ſoit de 6 pieds, & la hauteur B F de huit pieds, le quarré de 6 ſera 36, & le quarré de 8 ſera 64, & la ſomme des deux ſera 100, dont la racine quarrée qui eſt 10, ſera la valeur du côté A B.

14. Et pour meſurer la ſuperficie d'un cone tronqué, tel que ſeroit A G H C de la figure 61, il faut meſurer premierement la ſuperficie du cone total A C, & enſuite celle du petit cone G B H par l'Article 13. & ſouſtraire le plus petit du plus grand, le reſtant ſera la ſuperficie requiſe.

Ou bien ſi les deux circonferences du Cone tronqué ſont connües, & ſon côté G A, multipliez la moitié du côté G A par la ſomme des circonferences, ou la moitié de la ſomme des circonferences par le côté G A, & le produit ſera la ſuperficie requiſe.

15. Pour meſurer la ſuperficie du ſegment d'une Sphere. Par exemple, ſuppoſant que X fig. 60. ſoit une Sphere pour meſurer la ſuperficie convexe du ſegment A B C, dont l'arc A C eſt connu, cherchez la valeur de la corde D C qui eſt la corde de la moitié de l'arc A D C, par le moyen de C E, & la flêche E D, comme je l'ay enſeigné à l'Article 13, & faiſant un cercle dont D C ſera le rayon, vous en chercherez la ſuperficie par la 1'Article 5, & cette ſuperficie ſera égale à la ſuperficie du ſegment de la Sphere A D C.

Que ſi l'on demande la ſuperficie d'un eſpace Spherique, dont un ſegment aura été retranché, par exemple l'eſpace Spherique A F G C, figure 60, meſurez premierement tout le ſegment ſpherique F D G par la corde F D, & enſuite le ſegment A D C, & retranchant le ſegment A D C du total F D G, vous aurez pour reſtant l'eſpace ſpherique A F G C.

Par ce moyen on peut meſurer l'eſpace de chaque zone connoiſſant une fois le diametre de la terre, & ſa circonference, & ſa ſuperficie totale, ce qui eſt facile de découvrir en meſurant une fois un degré, qui eſt ordinairement de 25 lieuës Françoiſes, car multipliant 360 degrez par 25, le produit ſera la conference de toute la terre, ainſi le reſte ſera facile à connoître en ſuivant les regles que nous venons de donner dans tout ce Chapitre.

16. Pour meſurer une couronne ſuperficielle, faite par deux cercles concentriques, tels que ſont ceux de la figure 62, il ſuffit de meſurer ſeparément la ſuperficie du plus grand, & celle du plus petit cercle par les Regles precedantes, & ſouſtraire le plus petit du plus grand, le reſte ſera la ſuperficie requiſe.

On peut encore propoſer d'autres Problemes ſur les ſuperficies courbes: mais nous en parlerons ailleurs, & nous en démontrerons toutes les veritez dans nôtre Geometrie pratique, c'en eſt aſſez pour des commençans & pour des Rudimens de Mathematiques.

CHAPITRE VII.

De la Stereometrie.

DEFINITIONS.

L'Art de meſurer la ſolidité des corps s'appelle *Stereometrie*, & de même que le pié lineaire eſt la meſure determinée de toutes les longueurs; le pié quarré celle des ſurfaces; auſſi le pié cubique eſt la meſure de tous les ſolides, de ſorte que *meſurer un corps ſelon ſa ſolidité*, c'eſt trouver le nombre qui determine la quantité des pieds cubiques dans un corps, ou des parties du pié cubique; qui ſont *le pouce cubique, la ligne cubique & le point cubique*, le pié cubique eſt un ſolide qui a un pié en toutes ſes dimenſions. Le pouce cubique a un pouce en longueur, largeur & épaiſſeur & la ligne pareillement. Le pié cubique contient 1728 pouces cubiques; le pouce cubique contient autant de lignes cubiques, & la ligne cubique autant de points cubiques, ſi elle eſt partagée en 12 points, ce ſont là les parties du pié cubique. La toiſe cubique eſt compoſée de 216 pieds cubiques, ſuppoſé que la toiſe ſoit de 6 pieds de long. On s'eſt ſervi de cette meſure pour tous les corps, parce qu'elle eſt la plus ſimple & la plus facile à y reduire toute ſorte de ſolides, ſoit qu'ils ſoient bornez de ſurfaces planes ou courbes.

1. Pour meſurer un cube ou un parallelepipede, on multiplie la longueur par la largeur, & le produit qui en provient par l'épaiſſeur. Par exemple, ſi le cube de la ſoixante-troiſiéme figure a 35 pieds de longueur, autant de largeur & autant d'épaiſſeur, il faut multiplier 35 par ſoy-même, & le produit 1225 encore par 35 & le nombre 42875 ſera le nombre des pieds cubiques que contient le cube de la figure 63. Et ſi l'on vouloit ſavoir combien cela fait de toiſes cubi-

ques, il faut diviſer 42875 par 216 & le quotient 198 toiſes & $\frac{107}{216}$ ſatisfera à la queſtion.

De même, ſi l'on propoſe le parallelepipede de la 63e figure qui ait 50 pieds de longueur, 22 de largeur, & 12 d'épaiſſeur; vous multiplierez 50 par 22 & le produit 1100 par 12 & 13200 ſera la ſolidité de parallipipede propoſé dont on ſçaura le nombre des toiſes, en diviſant par 216 le nombre des pieds cubiques.

2. Pour un meſurer un priſme, à tant de pans que l'on voudra, il faut meſurer la ſuperficie de l'une de ſes deux baſes, & la multiplier par la hauteur ou longueur du priſme. Par exemple, ſi la ſuperficie pentagonique du priſme X dans la 64 figure a 265 pieds de ſuperficie, & dix pieds de longueur, ſa ſolidité ſera 2650, dont on ſçaura le nombre des toiſes en diviſant par 216; & pareillement on connoîtra le priſme triangulaire Z en cherchãt la ſuperficie du triangle ABC par les regles du Chapitre precedant, & la multipliant par la longueur du priſme.

3. Mais ſi un parallelepipede n'eſt pas rectangle ou tout autre priſme; c'eſt à dire que la baſe ne coupe pas perpendiculairement les parallelogrammes qui l'environne, il faudra abbaiſſer une perpendiculaire ſur l'une des ſurfaces, & meſurer la ſolidité par cette perpendiculaire. Par exemple, ſi le parallelepipede de la 63 figure X n'étoit pas rectangle, il faut abbaiſſer la perpendiculaire D E, & aprés avoir meſuré la ſuperficie A B C D il faut la multiplier par la perpendiculaire D E & le produit ſatisfera à la queſtion.

Et de même ſi le priſme Y de la 64e figure n'eſt pas rectangle aprés avoir meſuré l'une des baſes abaiſſez la perpendiculaire A B ſur un Plan où eſt poſé la baſe, & multipliez la ſuperficie trouvée par la hauteur de cette perpendiculaire.

4. Pour trouver la ſolidité d'un cylindre, il faut chercher la ſuperficie du cercle qui luy ſert de baſe, & la multiplier par ſa hauteur; & ſi le cylindre n'eſt pas rectangle, abaiſſer une perpendiculaire du ſommet ſur la face oppoſée, & cette perpendiculaire ſera la hau-

tité requiſe. Par exemple, pour le cylindre X fig. 65 cherchez l'aire du cercle A B C qui luy ſert de baſe, & la multipliez par la hauteur B D. Et ſi le cylindre eſt oblique, abaiſſez la perpendiculaire E F, par laquelle vous multiplierez la ſuperficie du cercle G H I.

5. Pour meſurer une Pyramide, & un Cone, on prend la ſuperficie de la baſe que l'on multiplie par la hauteur, & le produit étant diviſé par 3, le quotient ſera la ſolidité, tant de la Pyramide que du cone. Par exemple ſoit la Pyramide X. fig. 66. à 5 pans, dont la baſe eſt de 165 pieds, & la hauteur A B de 12 pieds prés avoir multiplié 165 par 12, & le produit 1980 diviſé par 3, le quotient eſt de 660 pieds eſt la ſolidité de la Pyramide. Pareillement ſi aprés avoir pris la ſuperficie de la baſe du cone Z, vous la multipliez par ſa hauteur. Par exemple, la ſuperficie du cercle étant ſuppoſée de 130, & la hauteur C Z de 15 le produit de 130 par 15 qui eſt 1950 étant diviſé par 3, le quotient 650 ſera la ſolidité du cone propoſé.

Et ſi l'on propoſoit une Pyramide tronquée ou un cone comme X qui paroit coupé en D E F, & Z en I H, il faut prolonger le côté de la Pyramide ou du cone, & les meſurer entierement, & enſuite ayant meſuré la ſolidité de la petite Pyramyde D E F I ou du petit cone G H C, vous ſouſtrairez chacun de ſon total, & le reſtant ſera la valeur, tant de la pyramide que du cone tronqué, ce qui eſt facile à concevoir.

6. Pour meſurer une Sphere, on multiplie ſa ſuperficie par le rayon, & le produit étant diviſé par 3, le quotient eſt la ſolidité de la Sphere, vous trouverez la ſurface par le Probleme 11. du Chapitre 6.

Et pour meſurer la ſolidité du ſecteur d'une Sphere, on meſure la ſuperficie du ſegment de la Sphere par le Probleme 15. du Chapitre precedent, & l'ayant multiplié par le rayon, le produit étant diviſé par 3, le quotient ſera la ſolidité requiſe.

Et ſi l'on demande la ſolidité du ſegment, il faudra retrancher du ſecteur la valeur du cone que l'on conçoit depuis le centre juſqu'au Plan qui coupe la ſphere, tel que pourroit être le cone A B C de la ſphere X fig. 60

7. Pour meſurer un Spheroïde, Par exemple A B C D figure 39. multipliez le plus grand diametre A C par luy-même, & poſez le produit au premier lieu d'une Regle de trois ; pareillement multipliez le petit Diametre ou Axe B D, & poſez le produit au ſecond lieu de la Regle de trois ; enfin cherchez la ſolidité d'une Sphere qui auroit pour Axe le grand axe A C par le Probleme cy-deſſus, & le nombre qui en proviendra ſera la troiſiéme proportionelle à laquelle cherchant un quatriéme nombre proportionnel, vous aurez la ſolidité du ſpheroïde propoſé.

8. Et pour meſurer un Paraboloïde fait par la circonvolution d'une parabole, telle que nous l'avons formée dans la figure 41. meſurez la ſuperficie du cercle fait par le rayon B P, & multipliant cette ſuperficie par la moitié de l'axe A B, le produit ſera la ſolidité du paraboloïde propoſé.

9. Pour meſurer la ſolidité d'un polyedre regulier tel que peut être un octaëdre, dodecaëdre ou icoſaëdre dont nous avons donné la figure & la definition au chap. 7. de la premiere Partie de ce Tome. Meſurez toute la ſuperficie du Polyedre regulier donné, & l'ayant meſuré par la ligne abaiſſée du centre perpendiculairement ſur l'une des baſes du produit, vous en prendrez le tiers qui ſera la valeur requiſe ; parce que l'on conſidere ce corps comme compoſé d'autant de Pyramydes qu'il y a de faces, & qui ont leurs ſommets unis au centre.

10. Pour meſurer autant qu'il ſe peut d'autres corps entierement irreguliers, on les conſidere comme compoſés d'une partie ou de pluſieurs corps, tels que nous les avons meſurez dans les Problemes precedens, les reduiſant en parallelepipedes, priſmes, cylindres, ſection de Sphere ou demi-ſpheroïde ; &c. & meſurant chacun ſeparément la ſomme de tous ſe trouve la ſolidité que l'on cherche.

Si cependant un corps étoit ſi irregulier qu'on ne pût entierement le reſoudre comme nous venons de le dire, il faut faire conſtruire un vaiſſeau creu & rect-

que l'on puiſſe remplir d'eau,& qui puiſſe contenir corps irregulier que l'on veut meſurer ; ainſi aprés avoir empli d'eau,& plongé le corps irregulier,il fera rtir une quantité d'eau egale à ſa ſolidité, laquelle pouvant meſurer facilement aprés avoir ſorty le rps irregulier, on aura la juſte ſolidité que l'on s'é-it propoſé : mais nous parlerons plus au long dans tre Geometrie pratique de ces ſortes de meſures.

CHAPITRE VIII.

De l'Arpentage & du Toiſé.

DEFINITIONS.

ON a donné ces noms aux Arts de meſurer par arpent & par toiſe. Et l'arpent & la toiſe ſont des eſures dont on ſe ſert pour ſavoir la contenüe de elque grandeur, elles ſont differentes ces meſures on les lieux,l'arpent eſt quelquefois de 100 perches, la perche de 22 pieds, quelquefois il eſt de 400 perches & la perche de 10 pieds : ainſi pour plus grande reté il faut s'informer en chaque lieu differant de la eſure dont on a coûtume de ſe ſervir, & par là gler tout l'arpentage. Il en eſt de même de la toiſe ue de l'arpent : car la toiſe royale dont on ſe ſert dans ouvrages royaux,eſt ſeulement de ſix pieds de Roi, en pluſieurs autres Provinces de France elle eſt de pt pieds & demi.

L'Arpentage eſt pour les terres, champs, vignes, és, bois & autres fonds ſemblables, pour en ſavoir la ntenüe : au contraire on ſe ſert peu du toiſé pour s ſortes de fonds ; mais on s'en ſert pour tous les ouages d'Architecture, tant civile que militaire.

On appelle *toiſe courante* celle qui eſt meſurée ſuivant longueur ſeulement, ſans avoir égard ni à la largeur à l'épeſſeur; c'eſt ainſi qu'on meſure ordinairement

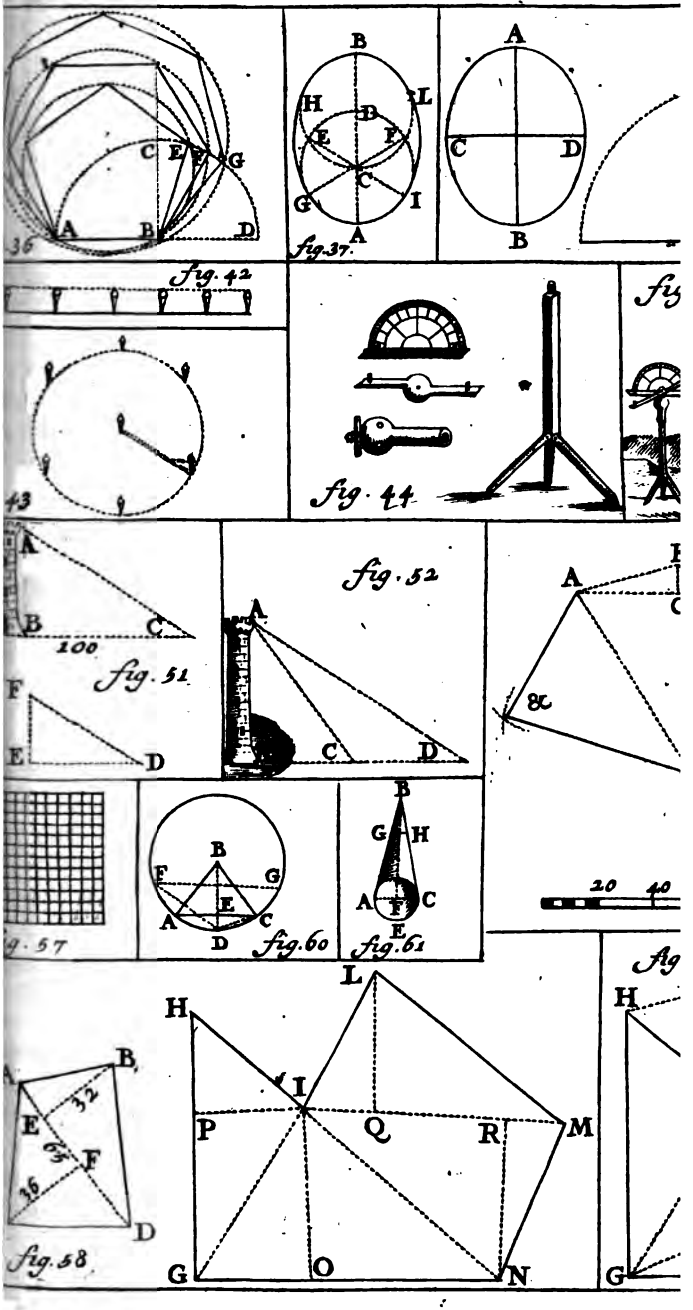
les corriches ſans avoir regard au détail de ſes mo
lures.

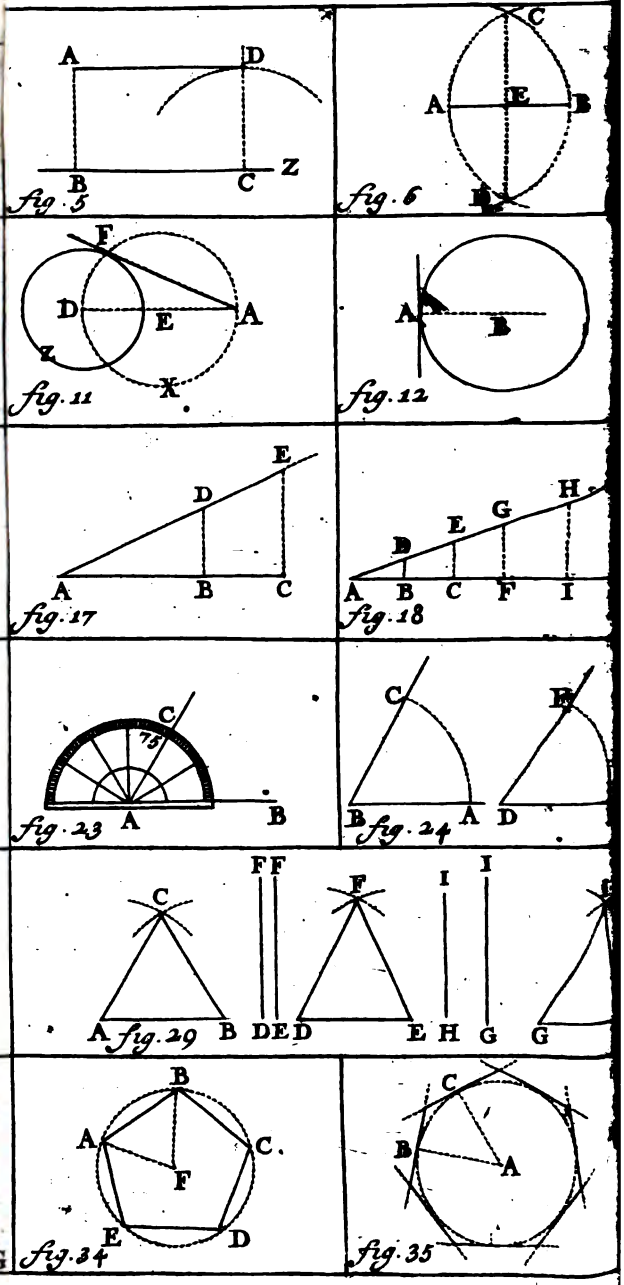
La *toiſe quarrée* eſt celle qui ſert à meſurer les ſuper
ficies comme nous l'avons enſeigné au chapitre 6e. &
la *toiſe cube* eſt le ſolide qui ſert à meſurer les ſolides, l
toiſe quarrée a 36 pieds quarrez, & la cubique 21
pieds cubiques.

1. Pour arpenter quelque fond que ce ſoit, il
faut lever le Plan par les Regles du chapitre 6e, & apr
l'avoir reduit en triangles, multiplier la moitié de l
perpendiculaire par la baſe le produit eſt comme no
avons dit, la ſuperficie du triangle que l'on meſure,
ainſi aprés avoir meſuré tous les angles ou ſegment
cercles, il faut diviſer la ſomme par le nombre des pe
ches que contient la Coupée journal, ou arpent,
le quotient ſera le requis.

Le plus difficile eſt de meſurer les bois & en prend
le Plan: car ſouvent on eſt obligé de meſurer ſans v
les côtés ni les angles de l'eſpace que l'on doit meſur
En ce cas on ſe fait un chemin, & on ſe ſert de la Bo
ſole pour prendre la declinaiſon des lignes ſi-tôt qu
l'on s'aperçoit de quelque detour, par ce moyen on
l'angle; mais il eſt dangereux de s'écarter beaucoup
c'eſt pourquoy il faut, autant qu'il ſe peut, tirer qu
ques diagonales ou lignes tranſverſales pour plu
grande ſûreté; & en cela l'uſage fait beaucoup pl
que les preceptes particuliers que l'on en donne; a
il faut s'inſtruire à fond des elemens de Geometrie,
aprés on trouve mille moyens de meſurer, & de re
fier le Plan que l'on veut lever.

Lorſque le Plan eſt levé, ce qui fatigue tres-ſouven
les Arpenteurs, ce ſont les fractions qui arrivent d
le calcul: mais nous en avons donné les Regles ainſi
j'y renvois le lecteur. La ſeule regle que l'on peu
donner en cela, c'eſt d'éviter les fractions autant qu
l'on peut & la multiplicité des meſures. Ainſi pou
partager la baſe ou la perpendiculaire d'un triangle,
faut toûjours prendre le nombre de l'une ou de l'autr
qui peut ſe partager ſans fraction. Et au lieu de meſure


36
fig. 37.
fig. 42
43
fig. 44
fig. 51
100
fig. 52
&
20 40
g. 57
fig. 60
fig. 61
fig. 58
32
65
36


A
D
B
C
Z
fig. 5
C
A
E
B
fig. 6
F
D
E
A
Z
X
fig. 11
A
B
fig. 12
E
D
A
B
C
fig. 17
H
G
E
D
A
B
C
F
I
fig. 18
C
75
A
B
fig. 23
C
B
A
D
fig. 24
C
A
B
fig. 29
F F
D E
F
D
E
I
H
I
G
G
B
A
C
F
E
D
fig. 34
C
B
A
fig. 35

oiſe, pieds, pouces, lignes, &c. il ſuffit de to u
rer par pieds & par pouces, & enſuite en faire
uction qui ſe fait facilement, en ſachant combien
pent a de pieds quarrez. J'ay dit qu'il faloit ſeu-
nt ſe ſervir de pieds & de pouces, parce que l'on
ve facilement les plus grandes, en ſe ſervant des
petites, & qu'une meſure plus petite qu'un pou
t inſenſible dans l'arpentage La grande exactitu-
ant bonne pour la ſpeculation, mais génante &
ile dans la pratique.

Pour meſurer par toiſe courantes, il n'y a aucune
ulté.

ais pour meſurer par toiſes quarrées, il faut bien
dre garde aux divers morceaux d'un bâtiment
l'on meſure, & de la figure qu'ils font. Par exem-
il y en a de triangulaires, comme les pignons qui
rminent en pointe, il y en a en trapeze comme les
s d'un couvert, il y en a en arc comme les voutes
ſpire, comme certains eſcaliers; ainſi diſtinguant
a chaque piece que l'on doit meſurer, & ſe ſervant
Regles du Chapitre 6e, on toiſera facilement tout
que l'on ſe propoſera.

Pour la toiſe cube dont on ſe ſert dans les Fortifica-
ns & autres Ouvrages, toutes les fois qu'il s'agit de
ſurer quelque choſe de ſolide comme les piliers des
nts, les levées ou la contenue des liqueurs. Il ne faut
e bien ſavoir diſtinguer par morceaux les corps qui
uvent être reguliers comme les parallelipipedes,
ramides, cones, &c. Et pour lors ſuivant les Regles
e nous avons données au Chapitre 7e, on ne trou-
ra plus ou tres-peu de difficultez. Si cependant il s'en
ouvoit quelqu'une, voyez nôtre Geometrie pra-
que où toutes les Regles que nous avons données,
nt demontrées & traitées plus à fond. Il eſt temps
finir, ç'en eſt bien aſſez pour des commençans, &
our les Rudimens des Mathematiques.

FIN.

TABLE

DES TERMES DEFINIS DA ce premier Volume, & des Operation d'Arithmetique, d'Algebre, & de Geometrie qui y ſont traités.

Le nombre marque la page; la lettre t. ſignifie terme, & expreſſions Arithm. Archit. Geom. Fortifi. Cronog. Aſtro. ſignifient Arithmetique, Architecture, Geometrie, Fortification, Cronologie, Aſtrologie, &c.

A

Abajour, t. d'Archit. 89
Abaque, t. d'Archit. 102
Accommodé, t. de Geom. 44
Achante, t. d'Archit. 109
Acrotere, t. d'Archit. 95
Addition, operation d'Arithmetique 262. le Formulaire d'Addition 265. ſes regles 287. Addition Algebrique, & ſes ſignes 271 ſes regles 411.
Adjacent, t. de Geom. 36
Age, t. de Cronol. 226
Aigu, t. de Geom. 18
Aiguille, t. d'Archit. 79
Aileron, t. d'Archit. 94
Air, t. de Coſmogr. 172
Algebre ſcience 269. 270. les ſignes algebriques 275. 276 l'uſage de l'Algebre. 471.
Allées, t. d'Archit.
Alterne, t. de Geom. 20.
Ambligone, t. de Geom.
Amortiſſement, t. d'Arch.
Amphiciens, t. de la Sph.
Amphiteatre, t. d'Arch.
Analyſe, t. d'Algebre.
Angars, t. d'Archit.
Angle, & ſes eſpeces 16.
angle du centre 128.
gle de l'Epaule, t. de Fo
angle du flanc 138.
d'incidence 62. angle
tique 60. angle du P
gone, t. de Fortif. 128.
gle de reflexion 62.
de refraction 64.
Spherique 54. la m
des angles 491. la ma
de les former, & di
492.
Année, & en combien

Bieres elle ſe prend 218.
& 219. l'année ſabatique des Juifs, & la jubilaire 220.
Bnelet, t. d'Archit. 101
Bomalie, t. d'Aſtron. 206
Bichambre, t. d'Arch. 84
Bipodes, t. de Geogr. 198
Bcedent d'un rapport ou d'une raiſon dans l'Arithmetique. 246
Bocataſtaſe, t. de Cron. 219
Bogée des aſtres. 210
Bophyge, t. d'Archit. 101
Bpartement, t. d'Arch. 84
Bpuis, t. d'Archit. 85
Bque-ducs, t. d'Archit. 69
Brbalétiers, t. d'Arch. 79
Brbre, t des mechaniq. 170
Brc, t. de Geometrie. 20
Brc doubleau & ſes differentes eſpeces, t. d'Arch. 74
Brc de triomphe, t. d'Arch. 69
Brcade, t. d'Archit. 87
Brcs des ſignes. 223
Brcenaux, t. de Fortif. 130
Brchitecture, ſcience, la civile, & la militaire. 68
Brchitrave, t. d'Arch. 96
Brchivolte, t. d'Archit. 93. 96
Breoſtyle, t. d'Arch. 93
Brithmetique, ſcience, & ſes eſpeces. 2. 223
Brpentage & la maniere d'arpenter. 523
Brquebuſe à croc, t. d'Artillerie. 154
Brreſte & Arreſtier, t. d'Architecture. 74. 79. 101
Aſciens, t. de Geogr. 196
Aſtragale, t. d'Archit. 101
Aſtronomie, ſcience, & ſes eſpeces. 199
Atre, t. d'Archit. 86
Attique, t. d'Architecture 94 ordre Attique 121.
Aune, meſure. 363
Autoeciens, t. de Geogr. 198
Axe, t. de Geom. & d'Aſtron. 42. Axe du monde 182. Axe de l'Eclyptique, & du Zodiaque 188. Axe optique 60.
Azimuthis, t. de la Sphere 184

B

Balancier, t. des mechan. 170
Balcon, t. d'Archit. 94
Bale ramée, t. d'Artillerie. 158 Bales à feu 160.
Baluſtrade, t. d'Archit. 94
Banc, t. de Geogr. 192
Bande, t. d'Archit. 102
Bandeau, t. d'Archit. 87
Banquette, t. de Fortif. 132
Barils à feu. 160
Barriere, t. de Fortif. 144
Baſcule, t. de Fortif. 144
Baſe, t. de Geom. 36. ce même terme en Archit. 96
Baſilique, t. d'Archit. 69
Baſſes, t. de Geogr. 192
Baſtion, t. de Fortif. 132
Batarde, t. d'Artill. 154
Batimens publics, & particuliers. 68
Baton, t. d'Arrch. 161
Batterie, ter. de Fortif. 140.

Batteries en barbe 146. 149. 150.
Bavette, t. d'Archit. 80
Baye d'une porte, t. d'Arch. 87
Bec d'une mouchette, t. d'Architecture. 100
Berceau, t. d'Archit. 74
Berme, t. de Fortif. 134
Blinde, t. de Fortif. 164
Blocus, t. de Fortif. 146
Blochet, t. d'Arch. 77
Bombe, t. d'Artill. & ſes parties. 156
Bonnet de Prêtre, & Bonnetes terme de Fortification. 142
Boſel, t. d'Archit. 101
Boſſage, t. d'Archit. 73
Bouclier, t. d'Arch. 107
Boudin, t. d'Arch. 102
Bouge, t. d'Arch. 84
Boulet, t. d'Artill. & ſes eſpeces. 158
Bourſeau, t. d'Arch. 80
Boyaux, t. de Fortif. 149
Brayette, t. d'Arch. 102
Bucher, t. d'Arch. 83

C

Cabinet, t. d'Archit. 84
Cage d'un eſcalier 85. Cage d'une lanterne, t. d'Arch. 81
Caiſſe, t. d'Arch. 102
Calendes, t. de Chron. 214. 215.
Camp, t. de Fortif. 146
Canelures, t. d'Archit. & ſes eſpeces. 104
Canon, t. d'Artill. toutes ſes parties, & leurs noms. 1
Carabine, t. d'Artill. 1
Carcaſſe, t. d'Artill. 1
Cariatydes, t. d'Arch. 94. dre cariatyde.
Cartouche en ter. d'Arch. en terme d'Artill. 158.
Caſcane. 1
Caſemate, t. de Fortif. 1
Caſerne, t. de Fortif. 1
Catoptrique, ſcience.
Cave, t. d'Arch. 1
Cavet, t. d'Arch. 1
Caulicole, t. d'Arch. 1
Ceinture, t. d'Arch. 1
Centre d'une Sphere 42. tre de peſanteur 166. tre du quadran 222.
Cercle, t. de Geometrie ligne circulaire 8. cercle de la Sphere, & leurs differences 54. cercles concentriques & excentriques cercles diurnes 18c. cercles de declinaiſon 18 cercle equant 206. cercles verticaux 184. cercles heures 223. cercles à t. d'Artillerie 160.
Chaine de liaiſon, t. d'Arch. 73.
Chaiſe d'une lanterne, t. d'Architecture.
Chambranle, t. d'Arch.
Chambre, t. d'Arch.
Chamfraim, t. d'Arch.
Chandelier, t. de Fortif.
Chantignole, t. d'Arch.
Chapeau d'une lanterne, t.

ie d'Architecture. 90
apiteau d'une colonne, t. d'Archit. 96
apelets, t. d'Arch. 105
auſſée, t. de Fortif. 69
auſſetrape, t. de Fort. 164
emin-couvert, t. de For. 136
erminée, t. d'Arch. 86. ſes eſpeces 87.
emiſe, t. de Fortif. 134
eſneau, t. d'Arch. 80
heval de friſe, t. de for. 164
hevalet, t. d'Archit. 90
hevron, t. d'Arch. 77. 79
hiffre, en t. d'Arch. 107
himere, t. d'Arch. 108
hoc du mouvement. 48
hronographie, ſcience 199. 212.
hronologie, ſcience. 199. 212.
Chute, t. d'Arch. 107
Cieux, & leur nombre 175. 176. 177. le ciel criſtallin, & l'empirée 177.
Circonference, t. de Geom. 10
Citadelle, t. de Fortif. 116
Clavaux, t. d'Arch. & clavaux à croſſette. 73
Clef, t. d'Arch. 76
Clef de muſique. 181
Climat, & ſes eſpeces 195. 196.
Clochettes, t. d'Arch. 109
Coin, t. des mechan. 170
Col d'une baluſtrade. 97
Colarin, t. d'Arch. 102
Collet d'une marche d'eſcalier 85.
Colonne, t. d'Arch. 92
Colures, t. de la Sphere. 188
Commandement, t. de Fortif. 146.
Commune meſure des nombres 232.
Comble, t. d'Arch. ſes eſpeces 76. 77.
Complemens d'un parallelogramme. 38.
Compoſé, ordre compoſé en Archit. 120.
Compoſite, ordre d'Architecture, ſon invention, & ſes caracteres 117. & les ſuiv.
Compoſition des puiſſances en Arithmetique 267. en Algebre 430.
Concave, t. de Geom. 18
Cone, t. de Geom. 34. Axe du cone & ſa baſe 44. cone optique 60. cone de lumiere & cone d'ombre, ter. de Gnomonique 223.
Congé, t. d'Arch. 101
Conjonction des Aſtres. 210
Conſequent d'un raport, ou d'une raiſon en Arith. 246
Conſole, t. d'Arch. 94
Conſonance, ter. de muſique 278. ſes eſpeces 284.
Conſtellations, leur nombre, leur nom, & leur ſituation 173. 174.
Contiguité, t. de Geom. 4
Continent, t. de Geog. 191
Continuité, t. de Geom. 4
Contrecœur d'une cheminée 86.

Contrefiche, t. d'Arch. 79
Contregarde, t. de Fortif. 142
Convergent, t. d'Optique. 60
Convexe, t. de Geom. 10
Coque, t. d'Arch. 109
Corbeaux, t. d'Arch. 94
Corbeille, t. d'Arch. 94
Corde, t. de Geom. 20
Cordon, t. de Fortif. 134
Corinthien, ordre d'Archit. son invention, ſes caracteres 111.
Corniche, t. d'Arch. 96
Corps de garde, t. de fort. 130
Corridor, t. d'Arch. 86
Coſmographie, ſcience, & ſes diverſes eſpeces. 171
Côte, t. de Geog. 191
Coté du polygone, t. de fort. & de Geom. 128
Coucher des Aſtres & ſes eſpeces. 208
Coude d'une tranchée, t. de Fortif. 149
Coulevrine, t. d'Artill. 154
Courbe, t. de Geom. 8. ſuperficie courbe. 12
Couronne, t. d'Arch. 100
Cours, t. d'Arch. 70
Courtine, t. de Fort. 132
Couſſinet, t. d'Arch. 76
Coyaux ou chanlates, t. d'Architecture. 80
Coyer, t. d'Arch. 79
Creux, t. d'Arch. 101
Cris, t. des mechan. 170
Crochet, t. d'Arch. 102
Crochet d'une tranchée. 149
Croix de S. André, t. d'Arch. 79.
Croiſée, t. d'Arch. 8
Croupe, t. d'Arch. 7
Cube, t. de Geom. 3
Cuiſine, t. d'Arch. 8
Culot, t. d'Archit. 10
Curviligne, t. de Geom. 1
Cuvette, t. de Fortif. 13
Cycle Solaire & Lunaire. 21
Cylindre, t. de Geom. 3
Cymaiſe, t. d'Arch. 10

D

Dard, t. d'Arch. 105. Dard t. d'Artillerie. 6
Dé, t. d'Arch. 9
Decagone, t. de Geom. 3
Declinaiſon du mouvem 46. Declinaiſon en ter. Sphere 182. Declinaiſ d'un Aſtre 210.
Decliner, t. de Geom.
Decoration d'Architect. 9
Deferent, t. d'Aſtron. 20
Degré, t. de Geom. 26. Dr d'eſcalier. 8
Dehors d'une Forteresſe. 14
Demi-boſſe, t. d'Arch. 10
Demi-diametre, t. de Geom. 1
Demi gorge & ſes eſpeces, t. de Fortif. 138. 140.
Demi-lune, t. de Fortif. 14
Demi-redoute, t. de Fortif. 14
Denominateur, t. d'Arith. 24 Denominateur d'un rapo ou raiſon 247. Denomin teur d'une grandeur Alg brique 410.
Denticule, t. d'Arch. 10

epenſe, t. d'Arch. 83
eterminaiion du mouvemẽt 46. ſes eſpeces 52.
etroit, t. de Geog. 192
iametre, t. de Geom. 20. 26
iagonale, t. de Geom. 36
iapaſon, t. de muſique. 284
iapenté, t. de muſique. 284
iaſtyle, t. d'Arch. 93
iatceſſaron, t. de muſiq. 284
iéſe, t. de muſique. 284
ifference, t. d'Arithm. 246. Difference compoſée 259. 260.
igue, t. de Geog. 192
imenſion, t. de Geom. 6
ioptrique, ſcience. 56
irect, ter. de Geom. 16. 48. rayon direct 50.
iſſonnance, t. de muſiq 284
iſtance, t. de Geom. 4
iſtribution de l'Arch. civile 70.
iton, t. de muſique. 284
ivergent, t. d'Optique. 60
ividende, t. d'Arithm. 266
iviſibilité, t. de Geom. 4
iviſion, Operation d'Algebre, ſes caracteres, & ſignes 273. regles generales de la diviſion algebrique 438. les particulieres 439
iviſion, operation d'Arithmetique 262. maniere de diſpoſer une Diviſion 267. formulaire de Diviſiõ 267 regl. de Diviſion 269. 299. pratique abregée de Diviſion 309.
Diviſion du cercle. 490
Dodecaëdre, t. de Geom. 34
Dodecagone, t. de Geom. 32
Dome, comble en dome. 77
Donné d'une operation d'Arithmetique. 262
Donjeon, t. de Fortif. 146
Dorique ordre d'Arch. 111
Dormant, t. d'Arch. 88
Doucine, t. d'Arch. 100
Douëlle, t. d'Arch. 73
Droit, ligne droite 8. angle droit. 18
Dur, corps dur, t. de mechan. 168.

E

Eau, t. de Coſmogr. 172
Echine, t. d'Arch. 109
Ecliptique, t. de la Sphere 186
Ecrouë, t. des mechan. 170
Ecurie, t. d'Arch. 84
Egalité, t. d'Algebre. 471
Egliſe, t. d'Arch. 68
Egout, t. d'Arch. 76
Elevation du pole. 186
Embranchement, t. d'Arch. 79
Embraſure, ter. d'Arch. 87. embraſure, t. de Fortif. 140
Empanon, t. d'Arch. 79
Empatement. t. d'Arch. 72
Empirée, t. d'Aſtron. 177
Endecagone, t. de Geom. 32
Enfaitement, t. d'Arch. 80
Enneagone, t. de Geom. 32
Ennuſure, t. d'Arch. 80
Entrayeure, t. d'Arch. 79
Enroulement, t. d'Arch. 97

Entablement, t. d'Arch. 93
Entrait, t. d'Arch. 78
Entrecolonne, t. d'Arch. 93
Entrelas, t. d'Arch. 107
Entresole, t. d'Arch. 83
Entretoise, t. d'Arch. 77
Entrevoux, t. d'Arch. 73
Epaule, t. de Fortif. 138
Eperon, t. de Fortif. 136
Epicycle, t. d'Astron. 200
Epoque, t. Cronol. 221
Equateur, t. d'Astron. 182
Equilateral, t. de Geom. 28
Equilibre, t. des mechan. 166
Equimultiple, t. d'Arith. 233
Equinoxe, t. de Cronol. 221
Escalier, t. d'Arch. & ses especes. 85
Escape, t. d'Arch. 101
Escarpe, t. de Fortif. 134
Escoinson, t. d'Arch. 88
Espace, t. de Geom. 12
Esplanade, t. de Fortif. 146
Esselier, t. d'Arch. 78
Etage & ses especes, t. d'Architecture. 82
Etang, t. de Geogr. 192.
Etoile & leur nombre 172. 173. Etoile, t. des mech. 170.
Euripe, t. de Geogr. 192
Eustyle, t. d'Arch. 93
Exagone, t. de Geom. 32
Excez, t. d'Arithm. 246
Exposant des differés raports Arithmetiques, Geometriques, &c. 248
Externe, t. de Geom. 38
Extraction des racines. 258
Extraction des racines en Algebre, & leurs regles generales 447.
Extremes d'une raison ou proportion, tant Arithmetique que Geom. &c. 232

F

Façade, t. d'Archit. 54
Face, t. d'Archit. 131
Faces d'un Bastion. 138
Fagots à feu, t. d'Artill. 161
Faiste, t. d'Archit. 73
Fascines, t. de Fortif. 164
Faucon, & Fauconneau, t. d'Artill. 156
Faussebraye, t. de Fortif. 136
Fenêtre, t. d'Arch. ses especes 89.
Fer à cheval, t. de Fortif. 151
Ferme, t. d'Arch. 78
Feston, t. d'Arch. 106. 107
Feu, t. de Cosmog. 177
Feüille, t. d'Arch. ses especes 106.
Feüilleure, t. d'Arch. 87
Figure, t. de Geom. ses especes 12. 14. 28.
Filet, t. d'Arch. 101
Filiere, t. d'Arch. 71
Firmament, t. de Cosm. 175
Flambeau, t. d'Artill. 162
Flanc d'un Bestion, & ses especes. 138. 140
Fleche, t. de Geom. 22
Fleuron, t. d'Arch. 106
Fleuve, t. de Geog. 191
Force ou puissance. 46

ree dans une ferme, t. d'Archit. 78
rmation des fig. Geom. 493 126.
rmeret, t. d'Arch. 74
rr, t. de Fortif. ſes eſpeces
rreſſe, *la même.*
rrification *la même.*
ſſé, t. de Fortif. 134
ugade ou Fougaſſe, ter. de Fortif. 160
urchette, t. d'Arch. 90
yer d'une cheminée. 86
yer, t. de Geom. 10
raction, t. d'Arith. 243. maniere d'écrire une fraction 244. fraction ſimple, & fraction de fraction 356. regles particulieres des fractions 356. addition des fractions 357. ſouſtractiõ de fraction 358. multiplication de fraction 359. diviſion de fraction 360. compoſition des puiſſances de fraction 361. extraction des racines de fraction 361 regles des fractions de fraction 362. fract. Alge. 495
Fraiſe, t. de Fortif. 144
François, ordre d'Arch. 120
Friſe, t. d'Arch. 96
Fronton, t. d'Arch. ſes eſp. 93
Fuſarole, t. d'Arch. 102
Fuſée, t. des mechan. 170
Fuſt, d'une colonne. 96

G

Gabion, t. de Fortif. 164
Gaine, t. d'Arch. 108
Galetas, t. d'Arch. 82
Gallerie, t. d'Arch. 86. 93.
Gallerie, t. de Fortif. 162
Garde-manger, t. d'Arch. 83
Garderobe, t. d'Arch. 84
Gargouche, t. d'Artill. 158
Gargoüille, t. d'Arch. 102
Genie, t. d'Arch. 106. 108
Genre de muſique b mol, & b quare 285.
Geographie, ſcience, & ſes eſpeces 190.
Geometrie, ſcience. 2
Giron d'une marche d'eſc. 85
Glacis, t. de Fortif. 136
Gliphes, t. d'Arch. 104
Globe, t. de Geom. 34
Globe terreſtre, t. de Geogr. 193.
Gnomon, t. de Geom. 38
Gnomonique, ſcience. 221
Godron & ſes eſpeces, terme d'Arch. 105
Golphe, t. de Geog. 191
Gorge, t. de Fortif. & demi gorge. 138
Gorgerin, t. d'Arch. 102
Gothique, ordre d'Arc. 121
Gouffre, t. de Geog. 192
Gouſſet, t. d'Arch. 79
Goutiere, t. d'Arch. 80. 100
Grãdeur, t. de Geom. 2. grand. commune 36 Grandeur en t. d'Algeb. 269. Grandeur poſitive, & negative 269. Grandeur connuë & inconnuë 270. les Grãdeurs connuës s'expriment par

les premieres lettres de l'Alphabet, & les Grãdeurs inconnuës par les dernieres priſes à rebour 271. les ſignes des Grandeurs poſitives, defectives, & des Grandeurs égales. 271
Grandeur dégagée, en terme d'Algebre. 472
Grain d'orge, t. d'Arch. 102
Grenade, t. d'Artill. 160
Greve, t. de Geogr. 192
Griffon, t. d'Arch. 108
Groteſque, t. d'Arch. 106
Gruë & Guindax, t. des mechaniques. 170
Gueule droite, t. d'Arch. 100
Guerite, t. de Fortif. 144
Guillochis, t. d'Arch. 106
Guirlande, t. d'Arch. 107

H

Harmonie, t. de muſique. 277
Harpie, t. d'Arch. 108
Havre, t. de Geogr. 192
Hauteur, t. de Geom. 6
Helice, t. de Geom. 10
Hemiſphere, t. de la Sphere, 184.
Heptagone, t. de Geom. 32
Herſe, t. de Fortif. 142
Heteroſciens, t. de Geog. 196
Heure, t. de Gnomon. 213
Hexacorde, t. de muſiq. & ſes eſpeces 285.
Hopitaux, t. d'Arch. 68
Horiſon de la Sphere 182. le rationel & le ſenſible 184
Horiſon, t. d'Optique.
Horloge, t. de Gnomon. 221.
Hotel, t. d'Arch.
Humeurs de l'œil.
Hypotenuſe, t. de Geom.
Hyvers, ſaiſõ de l'année.

I

Jalouſie, t. d'Arch.
Jambage, t. d'Arch. 86.
Jambe d'une ferme, t. d'Arch. 78.
Jambete, t. d'Arch. La
Jardin, & ſes eſpeces.
Ichnographie, t. de Perſpe. 64.
Icoſaëdre, t. de Geom.
Ides, t. de Cronol.
Impoſte, t. d'Arch. 76.
Incidence, t. de Geom.
Inclinaiſon & Incliner, t. de Geom. 4.
Indiction romaine.
Indirect, t. de Geom. 16.
Interne, t. de Geom.
Intervale, t. de Geom. 12. Intervale, t. de muſique, & ſes eſpeces 284.
Jonique, ordre d'Arch.
Joüée, t. d'Arch.
Jour dans un bâtimẽt 87. t. de Chronol. & ſes differentes manieres de le prendre 212.
Iris de l'œil.
Iſle, t. de Geogr.
Iſolé, t. d'Arch.

le, t. de Geom. 28
le, t. de Geogr. 191

L

t. de Geogr. 192
is, t. d'Arch. 88
erne, t. d'Arch. 80. Lan-
rne, t. des mechan. 170.
anterne, t. d'Artill. 154
eur, t. de Geom. 6
nier, t. d'Arch. 100
tude d'un point d'objet, d'Optique. 66
tude d'un lieu terreſtre 94. Latitude d'un Aſtre. 210.
te, t. d'Arch. 80
oir, t. d'Arch. 83
teur du mouvement. 50
vée, t. d'Arch. 69
ver des Aſtres. 208
rier, t. des mech. 168
erne, t. d'Arch. 74. 79
eu, vray & apparent d'un Aſtre. 202
euë meſure Geometr. 363
gne, t. de Geom. 6. ſes eſpeces 8. 9. ligne de vuë, & ligne de terre, t. d'Opt. 66 ligne capitale, t. de Fortif. 138. grande & courte lignes de deffenſe, t. de Fort. 140. lignes de circonvallation, & de contrevallatiõ 148. lignes de communication 149. ligne de direction, t. des mechan. 166. ligne d'excentricité d'un Aſtre 210. ligne Horiſontale d'un quadran, la Meridienne, la Subſtilaire, & l'Equinoxiale 223. divers Problemes Geometriques des lignes 485. ligne portion d'un pouce meſure Geometrique 363.
Limite, t. d'Aſtron. 202
Linteau, t. d'Arch. 88
Liquide, t. des mech. 168
Liſiere, t. de Fortif. 134
Liſtel, t. d'Arch. 101
Lit d'une pierre de taille. 73
Logement, t. d'Arch. 71
Longimetrie & la maniere de meſurer toute ſorte de longueurs, tant acceſſibles, qu'inacceſſibles 502. 503 & les pages ſuivantes.
Longitude d'un Aſtre 210. lõgitude terreſtre. 194 195
Longueur, t. de Geom. 86
Lozange, t. de Geom. 30
Lucairne, t. d'Arch. 80. 89
Lunete, & ſes eſpeces 62. 64 Lunetes, t. d'Arch. & leurs eſpeces 74. Lunetes, t. de Fortif. 142.
Luſtre des romains 219. 220

M

Machine Pneümatique 170
Madriers, t. de Fortif. 162
Magaſin, t. de Fortif. 130
Manche, t. Geogr. 192
Manivelle, t. des mech. 170
Manſarde, t. d'Arch. 76

Manteau

Manteau de cheminée. 86
Mantelet, t. de Fortif. 164
Mappemonde, t. de Geog. 193 198.
Marais, t. de Geog. 192
Marché Place publique. 69
Marche d'escalier. 85
Massif d'un bâtiment. 72
Mathematiques, leur nom, leur origine, leur progrez & leurs parties 1. les Mathematiques sensibles. 56
Mausolée, t. d'Arch. 69
Mechaniques, sciences. 166
Medaille, t. d'Arch. 107
Melangé ou mixte, t. qui se dit des lignes, des angles, des surfaces, & des solides 12. 18.
Melodie, t. de musique. 277
Melopée, t. de musique. 286
Membre, t. d'Arch. 92
Membre d'une egalité, terme d'Algebre. 472
Membron, t. d'Arch. 80
Mer, t. de Geog. 191. comment elles sont marquées dans les Cartes Geograph. 199.
Meridien, t. de la Sphere 188
Meridiens terrestres, t. de Geog. 194. le premier dans l'Isle de fer. 195.
Merlon, t. de Fortif. 140
Mesure, & ses especes 364. 365. la mesure des angles 24. 491. mesure des lignes *voyez* Longimetrie, mesure des surfaces *voyez* Planimetrie, mesure des *voyez* Stereom
Methode 471. ses regles
Metope, t. d'Arch.
Mezanine, t. d'Arch.
Midi & Meridional, t. Sphere 180. 182.
Milieu, t. de Geom.
Mine, t. de Fortif.
Minute, t. de Geom.
Miroir, t. d'Arch.
Mobile, ter. de Geom. mobile par raport vement 46. le premi bile, t. de Cosmogr. 177.
Modillon, t. d'Arch.
Moilons, t. d'Arch.
Mois. t. de Cronol. 214
Moitié d'un nombre.
Monnoye & ses especes
Monocorde, instrume musique.
Montagne, t. de Geog.
Mortier, t. d'Artill. 150 parties.
Mortoise, t. d'Arch.
Mouchete, t. d'Arch.
Mousle, t. des mech.
Moulure, t. d'Arch.
Moulinet, t. de Fortif.
Mousquet. t. d'Artill.
Mouvement 46. ses es 50. 52. Mouvement pre, commun, diurne, vement de libration, vement regulier, mouv ment vrai & apparent Astres 204.

ame, piece d'Artill. 154
inome, t. d'Algeb. 275
iplicande, t. d'Arit. 265
iplicateur, t. d'Arith. *Même.*
iplication, operation d'Arithm. 265. maniere de diſpoſer une Multiplication, & le formulaire de multiplication 266. regles de la multiplication 294. multiplication par livres, ols & deniers, & autres ſpeces 374. & les ſuivantes. Multiplication algebrique, ſes caracteres & ſes ſignes 272. regles generales & particulieres de la multiplication algebrique 323.
r ou muraille, & ſes eſpeces 372.
ſique, ſcience, & ſes eſpeces 277.
tule, t. d'Arch. 95

N

ıcelle, t. d'Arch. 102
ıdir, t. de la Sphere. 184
:rvure, t. d'Arch. 74
œud aſcendant & deſcendant, t. d'Aſtron. 202
om des Mathematiques. 1
ombre. 2. 226. caractere des nombres 226. la maniere d'exprimer toute ſorte de nombres, & la maniere de les lire 228, 229. divers noms que l'on a donné aux nombres 227. caracteres romains pour exprimer les nombres 230. 231. nombres égaux, & inégaux 232. nôbres multiples, ſurparticuliers, ſurpartiens, multiples-ſurparticuliers, multiples-ſurpartiens 233. nôbres doubles, triples, quadruples, &c. 234. nôbres premiers & compoſés 236. nombres pairs impairs, pairement pairs, pairement impairs, impairement pairs, imparfairs, parfaits 237. nombres complexes, & incomplexes 290. nombre quaré & nombre plan 239. nôbre ſolide, & nombre cube 240.
Nones des mois parmi les romains. 214. 215
Nombre d'or, t. de Cron. 220
Notes de muſique, leur valeur & leur figure 281. leur meſure 283.
Nouë d'un comble, t. d'Arch. 77.
Noulet, t. d'Arch. 90
Noyau d'un eſcalier. 85
Numerateur, t. d'Arch. 243

O

Obeliſque, t. d'Arch. 70
Obtus, t. de Geom. 18
Occident, t. de la Sphere. 178

Ocean

Ocean, t. de Geog. 191
Octaëdre, t. de Geom. 34
Octogone, t. de Geom. 32
Oeil. & ſes parties. 56.58
Office, t. d'Arch. 82.83
Ogives, t. d'Arch. 74
Olympiade, t. Cron. 219.220
Operation d'Arithm. & ſes diverſes eſpeces 261. Operation d'Algeb. 410
Operation Geometriq; ſur le terrain. 498
Oppoſé, t. de Geom. 38. Oppoſition des Aſtres. 210
Optique, ſcience 56. rayons Optiques 60.
Orbe, & ſes eſpeces, t. d'Aſtronomie. 200
Ordonnance, t. d'Arch. 110
Ordre d'Arch. ſon origine, l'invention de chaque ordre & ſes caracteres 110. & les ſuivantes.
Orgue, t. de Fortif. 142.144
Orient, t. de la Sphere. 178
Orle, t. d'Arch. 101
Ornemens d'Arch. 92
Ortographie, t. d'Optiq. 64
Ovale, t. de Geom. 10
Ove, t. d'Arch. 101.105
Ouvrage à corne & couronné, t. de Fortif. 142
Oxygone, t. de Geom. 28

P

Pailler, t. d'Arch. 85
Palais, t. d'Arch. 70
Paliſſade, t. de Fortif. 136
Palmette, t. d'Arch.
Pampre, t. d'Arch.
Panache, t. d'Arch.
Panneau, t. d'Arch.
Pannes, t. d'Arch.
Panſe, t. d'Arch.
Parabole, paraboliqu 12. conſtruction de rabole 497.
Paralaxe, t. d'Aſtron.
Paralelles, t. de Geom Paralelles terreſtres, Geogr. 194.
Paralellipipede, t. de Ge
Paralellogramme, t. de 30,
Parapet, t. de Fortif.
Parc, t. de Fortif.
Parterre, t. d'Arch. & ſ peces,
Parties aliquotes & aliq tes 232. maniere de les primer en caracteres rithmetique 236.
Partition, operation d'A metique *voyez* Diviſion
Pas, t. de Geog.
Pas de ſouris, t. de Fortif.
Pas-commun & geomet.
Patés, t. de Fortif.
Pendentif, t. d'Arch.
Pendule, t. des mechan.
Pentagone, t. de Geom.
Perche, meſure Geom.
Periéciens, t. de Geog.
Perigée des Aſtres.
Periſciens, t. de Geog.
Perpendiculaire, t. Geom.
Perrier, inſtrument d'Art

▯ ▯t d'Arch. 85
▯ t. d'Arch. 108
▯e, ordre d'Arch. 120
▯tive, ſcience. 56
▯eur, t. des mech. 166
▯ inſtrument d'Art. 158
▯eſure Geom. 365
▯tal, t. d'Arch. 92
▯che d'une Baluſtra. 97
▯oit d'une Porte. 87
▯ de taille, t. d'Arch. 72
▯n, t. des mech. 170
▯re, t. d'Arch. 93
▯au, t. d'Optique. 60
▯ d'Armes, t. de Fort. 128
▯ t. de Geom. 12. 18. les ſpeces 42. Plan de reflexion 62. Plan Geom. 64.
▯an Gnomonique. 221
▯imetrie & la maniere de meſurer toutes ſortes de plans 514. & les ſuiv.
▯cher, t. d'Arch. 73
▯etes, leur nombre, leur figure & leur nom 172. Planetes directes, retrogrades, ſtationnaires, rapides, entes 206.
▯tebande, t. d'Arch. 87. 100. 101.
▯teforme, t d'Arch. 77
▯ümatique, t. des mech. 170
▯d, t. des mech. 166. poids, meſures, & leurs eſpeces. 364.
▯inçon, t. d'Arch. 79
▯int, & ſes eſpeces 8. Point rayonnant, t. d'Optiq. 60. Point de reflexiõ 62. point principal, & point ſubocculaire 66. point de ſuſpenſion 166. point d'arrêt 168 Points equinoxiaux & ſolſtitiaux 186.
Poire d'une Baluſtrade, terme d'Arch. 97
Polaires, t. d'Aſtron. 188
Pole d'un cercle & d'une Sphere 54. Poles du monde, l'Arctique, l'Antarctique, 180. Poles de l'Horiſon 184. les Poles de l'ecliptique 188. Poles d'un quadran 222.
Polygone & ſes eſpeces 32. angle du Polygone & coté du Polygone 40. Polygone interieur & exterieur. 128
Pompe, t. des mech. 170
Pont, t. d'Arch 69. Pontlevis, t. de Fortif. 146.
Port, t. d'Arch. 69. 192
Porte, & ſes eſpec. 87. 88. 89
Portique, t. d'Arch. 70. 93
Poſtes, t. d'Arch. 110. Poſte, t. de Fortif. 146
Pot à feu, t. d'Artill. 160
Poterne, t. de Fortif. 144
Pouce, meſure Geom. 362
Poulie, t. des mech. 170
Poutre, t. d'Arch. 73
Pratique abregée de l'Addit. 290. de la multiplication 298. de la diviſion 309.
Preſqu'Iſle, t. de Geog. 191
Preuves Arithmetiq. 343
Prime, t. de Geom. 26
Priſme figure de Geom. 34

Probleme

Problemes d'Arithmet. 339.
Problemes de Geom. 485
Produire un nombre par un autre ce que c'est 237. 238 Produit lineaire & du premier degré. Produit plan; & du second degré. Produit solide, & du troisiéme degré, & autres produits semblables 242.
Profil, t. de Fortif. 146
Progression & ses especes 255 256.
Projecture, t. d'Arch. 92
Promontoire, t. de Geog. 191
Proportion & ses especes, la Geometrique, Arithmetique, Harmonique, & contre-harmonique 246. 247 maniere d'exprimer les proportions 251. proportion droite, & inverse 251 proportion alterne 252. proportiõ par compositiõ, par division; par composition inverse & contraire; par division, contraire & inverse 252. par conversion 253. proportion continuë 255. proportion ordonnée 256. proportiõ troublée 257. proportiõs algebriques, leurs figures ou signes, & leurs regles 468.
Prostapherese, t. d'Astronom. 206.
Puissance dans le mouvement 46.
Puissance, t. de Geom. & rithmetique 241.
Pychnostile, t. d'Arch.
Pyramide; ter. de Geo
Pyramide Optique. 6

Q

Quadrans, t. de Gnomon
Quadrilatere; t. de Geo
Quantité du mouvem quantité d'un rapp d'une raison 247. qu d'une grandeur, t. d' 269.
Quaré, t. de Geom. 30. t. chit. 101. quaré long Geom. 30. quaré, t. d' nom. 210. quart de c 26. quart de rond, t. chit. 101. quart d'un bre 233.
Quartier ou lot de pier d'Arch. 76. quartier, Fortif. 149.
Queuë du dragon, t. d' 202. queuë d'ironde, Fortif. 142.

R

Racine des nombres 23 cine quarée 239. cubique, &c. *dans les ges suivantes* Racine brique, & ses signes
Rade, t. de Geog. 19
Rais de cœur, t. d'Arch.
Raison dans les nombres

on d'égalité & d'iné-
té majeure 248. raiſon
égalité mineure 249.
on égale 257. raiſon
npoſée 258. diverſes
eces de raiſons compo-
s 259. raiſon rationel-
275. maniere d'expri-
r les raiſons par ſes ex-
ans 249.
e d'eſcalier. 85
rt des nombres 245
n, t. de Geom. 48. di-
ſes ſortes de rayons,
on reflechi, & rayon
ſé 50. rayon des ſignes,
de la Gnomonique 213
ngle, t. de Geom. 28
iligne, t. de Geom. 18
oute, t. de Fortif. 142
ctions 363. addition
s reductions 369. 370.
uſtractions des reductiõs
71. multiplication des
ductions 372. regles
our reduire & multiplier
s eſpeces d'un même
enre 377. regles de di-
iſion & reduction en dif-
rent genre 379. regles
e diviſion & reduction
même genre. [48
exion, refraction, t. d'opt.
les de l'addition 287. re-
les de la ſouſtraction 291
gles de la multiplication
94. regles de la diviſion
99. regles de la compoſi-
ion des puiſſances 310.
regles pour la reſolution
des puiſſances 320. regles
des preuves d'Arithmetiq;
343. regles des fractions
en general 350. regles des
fractions en particulier
356. regles des fractiõs
de fractions 362.
gles des proportions &
Reprogreſſions en general
382. regles pour les pro-
portions & progreſſions
Geometriques 387. regles
des proportions en parti-
culier 397. regle de trois,
directe & indirecte. 391.
Regles de trois, dou-
bles ou regles de cinq.
401. regles de compagnies
402. regles de fauſſes po-
ſitions 404. 405. regles
des operatiõs algebriques.
411. regles de la tranſpo-
ſition algebrique 473. re-
gles du degagement en al-
gebre par multiplication.
474. regles du degage-
ment par diviſion, par ex-
traction des racines 475.
regles de la ſubſtitution
algebrique. 477. regles de
la methode 479.
Regles, t. d'Arch. 101
Relief, t. d'Arc. & ſes eſp. 104
Remiſe de carroſſe. 83
Rempart, t. de Fortif. 132
Rencontrer, t. de Geom. 16
Rencontre ou chocq dans le
mouvement. 48

Renfle

Renflement d'une colone 102
Rentrant, t. de Geom. 40
Repos d'eſcalier. 85
Requis d'une operation d'arithmetique. 262
Retraite d'une muraille. 72
Retranchement, t de Fort. 146
Rez de chauſſée, t. d'Arch. 82.
Rhombe, t. de Geom. 30
Rideau, t. de Fortif. 136
Rinceaux, t. d'Arch. 106
Rivage, t de Geog. 191
Riviere, t. de Geog. 192
Robinet, t. de mechan. 170
Rocaille, t. d'Arch. 108
Rondebоſſe, t. d'Arch. 104
Roſace, t. d'Arch. 109
Roſe, t. d'Arch. 107
Roue, t. des mechaniq. 170. roue à dent. *là même.*
Rudenture, t. d'Arch. 105
Rue, t. de Fortif. 130
Ruſtique, ordre d'Arch. 121

S

Sabliere, t. d'Arch. 77
Saiſon, & combien il y en a. 215. 216.
Saillant, t. de Geom. 40
Saillie, t. d'Arch. 92
Sale du commun 83. grande Sale. 84
Sauciſſe, t. d'Artill. 160. 162
Scalenne, t. de Geom. 28
Schenographie ou Sciagraphie. 66
Scotie, t. d'Arch. 102
Secante, t. de Geom.
Seconde, t. de Geom.
Segment de cercle 20. du ſegment & au ſegment 22.
Semaine, t. de Cronol. jours.
Septentrion. 180.
Sepulture, t. d'Arch.
Seſquialtere. Seſquitierce, quiquarte, ſeſquiquinte &c. 334.
Seſquiton, t. de muſiq.
Seüil de porte.
Sextil, t. d'Aſtron.
Siecle, t. de Cronol.
Siege, t. de Fortif.
Signes du Zodiaque, noms & caracteres.
Sillons, t. de Fortif.
Sinus & ſes eſpeces.
Siphon, t. des mech.
Siryngue, t. des mech.
Syrtes, t. de Geog.
Sofite, t. d'Arch.
Solide, t. de Geom. 61.
Solide, t. des mech. 16
Solſtice, t. de Cronol.
Sommelerie, t. d'Arch.
Son, t. de muſique.
Souche de cheminée.
Soufaite, t. d'Arch.
Souſtraction. Operation arithmetique 263, maniere de diſpoſer une Souſtraction 264. le formulaire la Souſtraction 265. regles de la Souſtraction 291. Souſtraction

&c ſes caracteres 272. regles generales de la Souſtraction algebrique 418. regles particulieres 419.
ttendante, t. de Geom. 36
tere, t. de Geom. v. Globe.
Diametre de la Sphere 42.
a ſcience de la Sphere 178
Sphere droite paralelle, oblique 184. angle ſpherique 18.
teroïde, t. de Geom. 34
rale, t. de Geom. 10
tuë, t. d'Arch. 93
reometrie & la maniere de meſurer les ſolides. 521
le d'un quadran. 222
lobate, t. d'Arch. 95
ſtitution algebrique. 477
erficie 6. ſes eſpeces 12.
ngle ſuperficiel. 16
partiente & ſes eſpeces 234. 235.
teme, t. de Coſmog. 172
es Syſtemes de Ptolomée, Copernic, Tycho, & le ſyſteme commun des Philoſophes 175. & les ſuivantes.
tile, t. d'Arch. 93

T

ble de la compoſition des puiſſances. 310
bleau, t. d'Optique. 64
bles ou Gammes de muſiq. 79.
bleres, t. de Fortif. 134
Tailloir, t. d'Arch. 102
Talon, t. d'arch. & ſes eſpeces. 101
Talud & ſes eſpeces, ter. de Fortif. 152
Tangente, t. de Geom. 22
Taſſeau, t. d'arch. 78
Temples ou Egliſes, t. d'arch. 68.
Tenaille & ſes eſpeces, t. de Fortif. 142
Tenon, t. d'arch. 78
Termes d'un raport ou d'une raiſon en Arithmet. 245
Terme du mouvement. 46
Terminabilité, t. de Geom. 6
Terraſſe, t. d'arch. 86
Terre, t. de Coſmog. 172
Terreplein, t. de Fortif. 132
Terraëdre, t. de Geom. 34
Tête du Dragon, t. d'Aſtron. 202.
Tête d'une pierre, t. d'Arch. 73.
Theorie des Planetes. 199
Tierceron, t. d'Arch. 74.
Tiers d'un nombre. 233
Tiers point, t. d'Optiq. 66.
Tige d'une colonne. 98
Timpan, t. des mech. 170
Timpan, t. d'arch. 96
Tiran, t. d'arch. 78
Ton de Muſique 283. Ton majeur, ton mineur, demiton, leur proportion. 283
Tore, t. d'arch. & ſes eſpeces 101. 102.
Torniquet, t. des mech. 170
Toſcan, ordre d'arch. 111

Tour, t. de mech. 170
Tranchée, t. de Fort. 149
Trapeze, t. de Geom. & ses especes. 30.32
Traverse, t. de Fort. 136
Treffles, t. d'arch. 105
Triangle & ses especes. 28
Triglyphes, t. d'arch. 109
Trine, t. d'Astron. 210
Trochile, t. d'arch. 102
Tropiques, t. de la Spher. 188
Tube, t. de mech. 170

V

Venteau, t. d'arch. 88
Ventre du dragon, t. d'Astron. 202.
Verge, t. de mech. 168
Vicinité, t. de Geom. 4
Vif d'une colonne. 98
Vis, t. de mech. & vis sans fin. 170
Vitesse du mouvement. 50
Vitre, t. d'Optique.
Unité, t. d'Arithm.
Université. Construction Architecture.
Voix de la musique, l'inventeur de ses voix 278. quelles lettres on exp ces voix 279.280.
Volet, t. de mech.
Volute, t. d'arch.
Voussoir, t. d'arch.
Voute 74. ses especes.
Vuide d'un batiment.

Y

Yeux de Bœuf, t. d'arch

Z

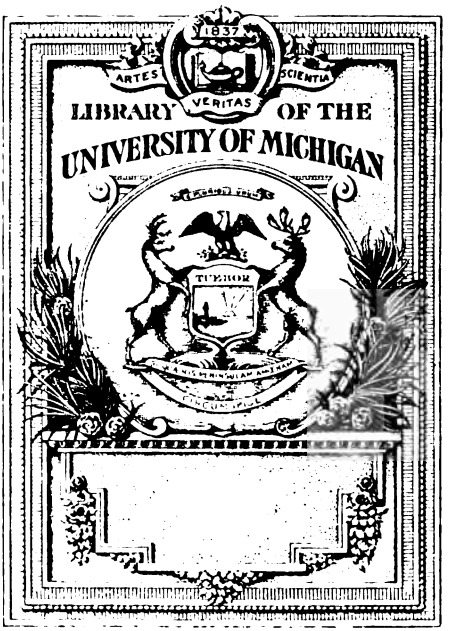
Zenith, t. de la Sphere.
Zodiaque, ter. de la Sph 186.
Zone & ses especes.

Fautes à corriger.

Pages.	*Lignes.*	*Fautes.*	*Correction.*
44	4	opposé	effacez ce mot.
58	19	extremités DD	extremités I I
68	21	triomohe	triomphe
70	38	bassebours	basse-cours
75	14	sphere	Spire
78	40	esseriers	esseliers.
79	17	extraits	entraits
81	22	filures	filieres
84	40	noyants	noyaux
94	12	menianes	mezanines
114	8	connuës	comme
125	1	audessus	au dessous
140	3	plongée	prolongée
210	27	en l'arc	est l'arc
258	11	8, 12.	8, 2, 12.
331	20	*le 2 posé sur le 5*	*soit placé sur le 8.*
332	20	le dernier 2	*effacez-le*
332	40		*posez un 1 sous le 4*
349	4	dans	*il faut l'effacer*
352	40	par 30	par 20.
354	4	denominateur 61	denominateur 6
356	40	en en	est en
358	3	comme	commun
364	7	piquet	niquet
372	13	7 ♁	17 ♁
391	3	divise par 3	divise 9 par 3
405	4	tiers 10	tiers 12.
413	40	suppose	suppute
417	3	$-6b^2$	$-6x^2$
417	8	$+4u-7x-a$	$+4u^3-7x^2-a.$
419	24	+ & suivant	+ & - suivant.
420	9.x	de vous	devoir.
425	7	par $+z$	par $+d.$
427	4	par v	par $-v$
427	15	$ay+by$	$ay-by$
428	16	aby	$-aby$

Page	Lignes.	Fautes.	Correction.
434	27		a6.
434	39	ab	a6
436	32	*aa*, ou *ab*	*aa* ou a6
438	15	+54abcc	54a6cc
439	3	ou par +	ou − par +
440	34	dividende − ac [− cx	dividende ac [− c
442	11	az+ax+bx+bz+cz	az − ax+bx − bz+c
448	8	de *ab*	de *a6*
448	13	poſer *ac*	poſer *aa*
448	40	au nombre	au nombre 5.
450	31	2abc+abcc	2abc+bbcc
454	2	cube de *ab*	de *a6*
458	7	comme	commun
476	27	nombre	membre
477	4	+ 16 premierement	+ $\frac{1}{2}$ premierement
477	6	− $\frac{1}{6}$	+ $\frac{1}{6}$
480	25	j'eſtime	j'exprime
481	32	xx ☽	xx − yy ☽
484	19	nombre	membre
486	1	DEA	DFA
488	3	pour,	par
490	16	EF egale	EG egale
492	10	ſommet A	ſommet B
492	23	D, E, F, G A	D, E, F, G, C
492	24	en diviſé	eſt diviſé
492	27	comme	connuë
493	24	de chapitre	de ce chapitre
495	7	egal ou	egal au
497	16	& a ce nouvau	& ce nouveau
500	18	GDF	GDB
503	23	DCD	DCB
504	2	& ACD	& ACB
504	5	CDD	CDB
504	30	BAC	ABC
504	31	AC	BC
505	20	FH 12	EH 12

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06388 1257
A 548033 DUPL


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR

QA
35
.N563
E5
1769

NON
CIRCULATING

UNIVERSAL ARITHMETICK;

OR, A

TREATISE

OF

ARITHMETICAL COMPOSITION

AND

RESOLUTION.

Written in LATIN by Sir ISAAC NEWTON.

Tranſlated by

The late Mr. RALPHSON; and Reviſed and Corrected by Mr. CUNN.

To which is added, a

TREATISE upon the MEASURES of RATIOS,

By JAMES MAGUIRE, A. M.

The whole illuſtrated and explained,

In A SERIES of NOTES,

By the Rev. THEAKER WILDER, D. D.

SENIOR FELLOW of Trinity College, Dublin.

LONDON:
Printed for W. JOHNSTON, in Ludgate-ſtreet.
MDCCLXIX.

PREFACE.

THE Occaſion of my being engaged in a Work of this Kind was as follows.

Upon the Death of Mr. Maguire, I was appointed, being then a Junior Fellow, to ſucceed him as Teacher of the Mathematicks to the Under-graduates of the Univerſity. And the many and obvious Advantages attending an early Initiation into this Study, having ſome Time ſince determined the Right Honourable the Provoſt, and the Senior Fellows, to order Euclid's Elements to be taught by the Tutors in their private Lectures, and to be made a Part of the quarterly Examinations; the Munificence alſo of the Governors of the Schools founded by Eraſmus Smith, Eſq; having added to the Salary of the Donegal Lecturer of the Graduates, and made a Profeſſor of Mathematicks; I conſented to the putting down my Office, and to the converting its Emoluments to the eſtabliſhing of proper Aſſiſtants to the Profeſſor, for the Inſtruction of the Under-graduates.

In the Courſe of my Attendance upon the Duty of that Employment, I experienced the Neceſſity which there was of illuſtrating this Work of the Author; and drew up moſt of the following Notes.

In doing this I conſulted the moſt celebrated Writers, and transferred from them what ſeemed moſt to conduce to this Deſign. I found many who had illuſtrated ſome particular Parts of this Work, as 'sGraveſende, Reyneau, Bernoulli, Maclaurin, Colſon, Campbell, &c. &c. but none whom I know of, except Caſtilioneus, who had written a regular and continued Comment upon it.

I had alſo the Uſe of three Manuſcripts of the late Mr. Maguire.

The firſt is an unfiniſhed Treatiſe upon Arithmetick; containing Remarks and Criticiſms, collected from different Authors, particularly from Wells (whom he ſometimes juſtly cenſures) from Jones's Synopſis Palmariorum Matheſeos, from Kerſey, Wallis, Dodſon upon Wingate, &c. &c. Many Things alſo are his own, particularly the Proof of the Rules of finding compound Diviſors (Art. L. of this Work) from the Nature of the algebraical Operations. And I prefer this Method of Proof in that Place to thoſe of Bernoulli and Maclaurin, becauſe it does not conſider the Dividend as an Equation: Yet that of Maclaurin (Art. CXL, *a.*) has a peculiar Elegance and Propriety, when the Dividend is an Equation.

The ſecond is an unfiniſhed Treatiſe of Equations, drawn up, ſo far as it goes, in a moſt elegant and clear, though conciſe Method. It contains among other Things, ſome Strictures upon our Author (Art. CXXXVI. *f.*); ſome Objections alſo which other Writers had made (Art. CLIII. CLIV); and the Proofs of Art. CXXXIII. IV. V. and of Numb. 257, 258. It appears that he kept his Eye conſtantly upon our Author, and perhaps deſigned theſe two Treatiſes as a Comment upon him.

The third is a complete Treatiſe upon the Meaſures of Ratios; in which the Reader will find the whole Doctrine of Logarithms moſt accurately laid open, together with ſome very curious Strictures upon Wallis, Briggs, and Halley. This may very properly be added to a Treatiſe of Univerſal Arithmetick, and was probably ſo deſigned to be, if Mr. Maguire had lived to have finiſhed the two former Parts.

Theſe Treatiſes are in Latin: They are now in the Preſs, under the Care of the Profeſſor of Mathe-

Mathematicks. The Uſe of them was given to me by John and Bridget, the Brother and Siſter of the Author James Maguire: And to the Uſe of his Repreſentatives, the Profits (if any) of this Work are by Deed conveyed; the Loſſes, if any, are to be ſuſtained ſolely by me.

As to Caſtilioneus, I diſlike chiefly three Things in his Book.

Firſt, beſide the great Errors of the Preſs, and which (Tome I. Page 54. Tome II. Page 18, 29, 32, 33, 34, 106, 180, 204, &c. &c.) are inſuperable to young Students, he is unneceſſarily prolix.

Secondly, he does not pay a proper Regard to the Method of Notation uſed by his Author: For altho' a Perſon may put what Symbols he pleaſes, provided he is conſtant in their Uſe, to denote particular Coefficients, Quantities, Operations, &c. &c. yet it will occaſion much unneceſſary Trouble to the Student, if the Commentator uſes a Method of Notation different from that of his Author.

Laſtly, the Price and Bulk of his Book is too great in Reſpect of its Utility. This is occaſioned, not only by the Additions from other Authors, although the Subſtance of them is moſtly thrown into his foregoing Notes, but alſo by his increaſing the Number of Schemes to two Thirds more than it originally was. Our Author gave geometrical Queſtions as Exerciſes for the Student, ſuppoſing him already well verſed in Geometry, and in thoſe other Sciences upon which their Solutions depend: It ſeems, therefore, a ſuperfluous Undertaking in the Commentator, to draw Solutions and Conſtructions from Principles different from thoſe which the Author uſed; and to explain not ſo much what the Author has done, as what he might have done.

I have

I have endeavoured to avoid theſe Inconveniencies: and whenever I have been obliged, by adhering to the Order of the Author, to cite any Thing in Proof of another, although the Thing cited is itſelf afterwards to be proved; Care is taken, that it ſhall not depend upon that, in whoſe Support it had been cited.

I have every where ſuppoſed the Student to be well verſed in Euclid's Elements, and to be Maſter of common Arithmetick, ſo far at leaſt as it is generally taught in Schools: If he is not, I would recommend to his Study, antecedent to this, Wingate's Arithmetick, as it has been altered and improved by Kerſey, Shelly, and Dodſon.

Having determined to publiſh theſe Notes in Engliſh, that they might be of more univerſal Uſe to ſuch as want Aſſiſtances of this Kind, I connected them with the Tranſlation which goes under the Name of Mr. Ralphſon: And finding that there has been generally annexed to this Tranſlation, the Method of reſolving Equations by Dr. Halley, I ſubſtituted in its Place the Methods of Approximation by Mr. Maclaurin; becauſe theſe contain the Method of deducing Halley's, and all other Theorems for that Purpoſe. To this there is added a Tranſlation of the beforementioned Treatiſe of the Meaſures of Ratios, ſo that the whole Collection ſeems to approach to the Idea of an univerſal Arithmetick.

Si quid noviſti rectius iſtis,
Candidus imperti; ſi non, his utere mecum.

Trinity-College, Dublin,
September 1, 1768.

UNIVERSAL ARITHMETIC;

OR, A TREATISE OF ARITHMETICAL COMPOSITION AND RESOLUTION.

Of Notation.

COMPUTATION is either performed by Numbers, *as in Vulgar Arithmetic, or by* Species, *as uſual among Algebraiſts. They are both built on the ſame Foundations, and aim at the ſame End,* viz. Arithmetic *Definitely and Particularly,* Algebra *Indefinitely and Univerſally*; (*a*) ſo that almoſt all Expreſſions that are found out by this Computation, and particularly Concluſions, may be called *Theorems.* But Algebra is particularly excellent in this, that whereas in Arithmetic Queſtions are only reſolved by proceeding from given Quantities to the Quantities ſought, Algebra proceeds in a retrograde Order, from the Quantities ſought, as if they were given, to the Quantities given, as if they were ſought, to the End that we

(*a*) In numeral Operations, the Figures are changed and diſplaced for others, leaving no Veſtige of the Operations; but in Algebra, the Symbols or Species remain unchanged, and exhibit all Operations to the Eye.

we may some Way or other come to a Conclusion or Equation, from which one may bring out the Quantity sought. And after this Way the most difficult Problems are resolved, the Resolutions whereof would be sought in vain from only common Arithmetic. Yet Arithmetic in all its Operations is so subservient to Algebra, as that *they* seem *both* but to *make one perfect Science of Computing*; and therefore I will explain them both together.

Whoever goes upon this Science, must first understand the Signification of the Terms and Notes, and learn the fundamental Operations, *viz.* Addition, Subtraction, Multiplication, and Division; Extraction of Roots, Reduction of Fractions, and of Radical Quantities, and the Methods of Ordering the Terms of Equations, and *exterminating the unknown Quantities*, where there are more than one. Then let the Learner proceed to exercise himself in these Operations, by bringing Problems to Equations; and, lastly, let him consider the Nature and Resolution of Equations.

Of the Signification of some Words and Notes.

Article I. *By* Number *we understand*, not so much a Multitude of Unities, as *the abstracted Ratio of any Quantity, to another Quantity of the same Kind, which we take for Unity.* And this *is threefold*; *integer, fracted*, and *surd: An* Integer, *is what is measured by Unity*; *a* Fraction, *that which a submultiple Part of Unity measures*; *and a* Surd, *to which Unity is incommensurable.* (*b*)

II. Every

I. (*b*) See Eucl. V. Def. 1. 2. VII. Def. 3. 4. 5. X. Def. 2. *Quantities having a common Measure are called commensurable*, or as Number to Number; *Quantities which have not a common Measure are incommensurable*, and are not as Number to Number; that is, their Magnitude is not to be expressed in common numeral Notation. For, if any one Quantity be called rational, all those commensurate with it are rational; and all those which are incommensurable with it must be irrational. Now *Unity being either a Multiple or Submultiple of all Numbers, every Quantity, which is neither a Multiple or Submultiple of Unity, such as the Roots of Integers, which are not Integers*, (N° 161.) *must be incommensurate to Unity*, and irrational.

II. Every one underſtands the Notes of *whole Numbers*, (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) and the Values of thoſe Notes when more than one are ſet together. But as Numbers placed on the left Hand, next before Unity, denote Tens of Units, in the ſecond Place Hundreds, in the third Place Thouſands, *&c.* ſo Numbers ſet in the firſt Place after Unity, denote tenth Parts of an Unit, in the ſecond Place hundredth Parts, in the third Place thouſandth Parts, *&c.* and theſe are called *Decimal Fractions*, becauſe they always decreaſe in a Decimal Ratio; and to *diſtinguiſh the Integers from the Decimals, we place a Comma, or a Point, or a ſeparating Line.* Thus the Number 732 ∠ 569 denotes ſeven hundred thirty-two Units, together with five tenth Parts, ſix centeſimal, or hundredth Parts, and nine milleſimal, or thouſandth Parts of Unity; which are alſo written thus, 732,569; or thus, 732.569; and ſo the Number 57104,2083 fifty ſeven thouſand one hundred and four Units, together with two tenth Parts, eight thouſandth Parts, and three ten thouſandth Parts of Unity; and the Number 0,064 denotes ſix centeſimal and four milleſimal Parts. The Notes of Surds and fracted Numbers are ſet down in the following Pages. (*c*)

III. *When*

II. (*c*) Notation teaches how to expreſs in Characters any Number propoſed in Words; and, converſely, how to enunciate any Number propoſed in Characters.

1. *Every Number conſiſts of a Numerator and a Denominator; and the Value of any Number is the Product of its Numerator multiplied by its Denominator. The Numerator denotes the Multitude or Quantity, and the Denominator the diſtinguiſhing Name, of what is numbered.*

2. *The Numerators are diſtinguiſhed by their Shape in Integers, and are called Figures. The Denominators are known from the Claſs or Place of the Numerator or Figure.* For,

3. *In Integers, the Denominator of each Figure encreaſes in a decuple Ratio from the right Hand to the left*; the greateſt Denominator being always firſt enunciated in reading from the left Hand to the right. *The firſt* Claſs or *Place is that of Units; the ſecond, that of Tens; and the third, that of Hundreds.*

III. *When the Quantity of any Thing is unknown, or looked upon as indeterminate, ſo that we cannot expreſs it in Numbers, we denote it by ſome* Species, *or by ſome Letter.* And

4. To avoid the Trouble of inventing new Names for every Claſs or Place, *the Claſſes were diſtributed into Ternaries*, and a proper Name given to the two firſt Ternaries; and in enunciating a Number, the three firſt Names of the Claſſes are jointly repeated with that of the Ternary. *The firſt Ternary is that of Units; the ſecond, that of Thouſands.*

This Diſtribution, and theſe Names, were ſufficient for civil Uſe; as moſt Numbers which are of Uſe in common Buſineſs are generally confined within ſix Places. But, when the Sciences began to extend themſelves, and Mathematical Calculations were applied in every Inquiry in which they could have Place, the Confuſion which neceſſarily muſt ariſe, in Numbers containing a long Series of Places, from the frequent Repetition of the Names of the two firſt Ternaries, became evident.

5. Then a new *Diſtribution of the Places* was introduced *into Senaries, called Periods*; containing ſix Places each, or two Ternaries, which were thence called *Semiperiods. The Name of the firſt Period is that of Units; of the ſecond, that of Millions; of the third, that of Billions; and ſo on; each Period being denominated from the Number of preceding Periods*; ſo the ſixth Period is that of Quintillions. In enunciating any Number, the three Names of the Claſſes, and the two Names of the Semiperiods, are jointly repeated before that of the Period.

6. *In Integers*, becauſe the Denominators increaſe in a conſtant decuple Ratio from right to left; therefore *the Denominator of any Figure* muſt be Ten, ſo often multiplied into itſelf, as the Figure is excluſively diſtant from the Place of Units; that is, *that Power of Ten, whoſe Index is the Number of Places to the left Hand of the Place of Units excluſive:* It can *therefore* be always known from the Place of the Figure, and *there is no need of writing it down.* Hence the Value of any Figure is its Product into ſuch a Power of Ten as its Diſtance from the Place of Units indicates (N°. 1.)

7. A

And if we conſider known Quantities as indeterminate, we denote them, for Diſtinction ſake, with the initial Letters

---

7. A Submultiple of Unity being the Meaſure of a Fraction, (Art. I.) the Fraction muſt be denominated from that Submultiple; therefore *the Denominator of a Fraction muſt be Unity divided into a certain Number of equal Parts. When there is a conſtant Ratio of this Diviſion, the Denominators of the Fractions will be in a conſtant Ratio*; and thus *Decimals* are Fractions whoſe Numerators increaſe in a decuple Ratio: *Sexageſimals* are Fractions whoſe Denominators increaſe in a ſixty-fold Ratio: *But when there is no conſtant Ratio of the Diviſion, the Fractions are called* vulgar, *their Denominators having no conſtant Ratio.*

8. *Hence*, there being no conſtant Ratio of *the Denominators in vulgar Fractions*, the Denominators *muſt be conſtantly wrote down along with the Numerators.* Alſo *in Sexageſimals*, the Ratio of the Denominators, 'tho' conſtant, being not diſcoverable from the Diſtance of the Numerator from the Place of Units, *the Denominators*, if not wrote down, muſt yet be *denoted by* ſome *Symbols of a ſexageſimal Diviſion annexed to each Numerator.* But *in Decimals, the Ratio of the Denominators being diſcoverable from their Diſtance from the Place of Units, the Denominators need not be wrote.* For,

9. *In Decimals, the Denominators encreaſe in a decuple Ratio from left to right*; and the Denominator of any Decimal is Unity divided by a Power of Ten, whoſe Index is the Number of Places from that of Units. The Value alſo of a Decimal is the Figure divided by that Power of Ten; (N° 1. 7.) and conſequently *the Values of Decimals are in a ſubdecuple Ratio from left to right.* For,

10. To multiply any Figure into Unity divided by any Number, being the ſame Thing as to divide the Figure by that Number, (N° 145.) and the Value of a Fraction being the Product of its Numerator into its Denominator, (N° 1.) that is, into Unity divided by ſome Number, (N° 7.) it follows univerſally, that *the Value of any Fraction is the Quote of the Numerator divided by the Denominator.*

Letters of the Alphabet, as *a*, *b*, *c*, *d*, and the unknown ones by the final ones, *x*, *y*, *z*, &c. Some ſubſtitute Conſonants

---

11. *The Value of Decimals, as well as of Integers, increaſes uniformly in a decuple Ratio from right to left.* For the Value of each being the Quote of the Numerator divided by the Power of Ten, whoſe Index is the Number of Places from that of Units towards the right, (N° 9.) this Value muſt decreaſe (Eucl. VII. 19. c. 1.) as the Denominators increaſe; that is, towards the right; (N° 9.) therefore it increaſes towards the left; that is, in the ſame Manner and Ratio as the Value of Integers. (N° 3.)

12. *Decimals, and Numbers mixed of Integers and Decimals, may be enunciated after the Manner of Integers, by giving them all one common Denomination, viz. that of the laſt Figure on the right.* For thus every Numerator and Denominator is multiplied into the ſame Power of Ten, *viz.* that whoſe Index is the Number of Places on the right of the Place of Units: Therefore the Value of each Figure continues unchanged. (Eucl. VII. 17.)

13. *The Diſtance of any Figure from the Place of Units exclusive is called its Index, or Exponent.* It determines the Number of Cyphers in its Denominator; that is, the Number of continued Multiplications of Unity into Ten, or the Number of continued Diviſions of Unity by Ten, in order to produce its Denominator. Now as the Place of Units muſt belong to Integers, *the Index in Integers will be the whole Number of Places of Integers leſs one*; that is, *the Number of Places to the left of the Place of Units*; that is, *the Number of Places to the right of the Figure itſelf.* But *in Decimals the Index will always be equal to the whole Number of Places of Decimals.*

14. Becauſe the Denominators of Integers are produced by Multiplication, (6.) but thoſe of Decimals by Diviſion, (9.) and that Multiplication is contrary to Diviſion; it follows, that if an Integer and Decimal, having the ſame Numerator, and being equidiſtant from the Place of Units, be multiplied into each other, the Place and Denominator of the Product will be that of Units; and conſequently the Index

Consonants or great Letters for known Quantities, and Vowels

Index or Distance of the Product from the Place of Units can be nothing. Whence *putting* 0 *(Cypher) the Exponent of the Place of Units, as the Indices of Integers are usually supposed to be affirmative, the Indices of Decimals must be negative.* Thus

4	3	2	1	0	— 1	— 2	— 3	— 4
1	2	3	4	5	6	7	8	9

(See also N° 76.)

15. The Value of every Figure in any Rank of Numbers, how large soever, is readily found by the following Rule. *Set a Point under the Figure in the Place of Units, and under every sixth Figure on each Hand of the Place of Units exclusive; so shall the 1st, 2d, 3d, &c. Point stand under Units, Millions, Billions, Trillions, &c. respectively;* that is, *distinguish the Periods;* (5. 9.) *then a Comma, placed after every third Figure from a Point inclusive, will distinguish the Semiperiods:* (4. 9.) As is evident from the following Example.

Suppose the Number given is
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8;
when distributed according to the above Rule, it will be
12 345,678 912,345 67,890 123,456 78;

and is to be enunciated, 12 Billions, 345,678 Millions, 912,345 Units; 67,890 hundred thousandth Parts, 123,456 millioneth Parts, and 78 billioneth Parts.

16. *In Integers and Decimals there can be but nine distinct Numerators, or significant Figures.* For each Figure of a Number being multiplied or divided by some Power of Ten, the greatest Figure must be less than Ten, lest the Number of Places in the Product or Quote should exceed those in the Power of Ten, by which it is multiplied or divided; which if it came to pass, the decuple Ratio could not be preserved in the Places, nor any Denominator discovered from the Distance of the Figure from the Place of Units.

Vowels or little Letters for the unknown ones. (*d*)

IV. *Quantities are either* Affirmative, *or greater than than nothing*; *or* Negative, *or leſs than nothing*. Thus in human Affairs, Poſſeſſions or Stock may be called affirmative Goods, and Debts negative ones. And ſo in local Motion, Progreſſion may be called affirmative Motion, and Regreſſion negative Motion; becauſe the firſt augments, and the other diminiſhes the Length of the Way made. And after the ſame Manner in Geometry, if a Line drawn any certain Way be reckoned for Affirmative, then

---

17. *In vulgar Fractions the Number of different Numerators will be unlimited*, becauſe Unity can be divided by an infinite Variety of Numbers: The nine ſignificant Figures however, with the Cypher, by being eſtimated in a decuple Ratio, are capable of expreſſing every one of that unlimited Number.

18. Becauſe a Number may conſiſt of Figures, whoſe Denominators are Terms of the decuple Ratio taken at different Intervals, and not in Succeſſion, therefore *that the Denominators may always be expounded by the Diſtances of the Figures from the Place of Units, there will be Occaſion for an inſignificant Symbol or Cypher*, that the Places void of Numerators being filled up by it, the Progreſſion of the Denominators may be indicated by the Diſtances from the Place of Units. *Hence Cyphers to the left of Integers, and to the right of Decimals*, cannot alter their Value, and *are uſeleſs: But*, being placed *to the right of Integers, increaſe their Value, and to the left of Decimals, diminiſh their Value, each in a decuple Ratio.*

III. (*d*) The Method of ſtating Law Queſtions under general Names, was by Civilians ſtiled Species; *Vieta* transferred this Title to his Invention of denoting known Quantities by Conſonants, and unknown Quantities by Vowels. The *known Quantities are now uſually repreſented by the former, and the unknown by the latter Letters of the Alphabet: Alſo like Quantities are repreſented by the ſame Letters, and under the ſame Power; and unlike Quantities by different Letters; or, if by the ſame Letters, they muſt be under different Powers.*

IV. (*e*) In

then a Line drawn the contrary Way may be taken for Negative. As if A B [*See* Fig. 1.] be drawn to the right, and B C to the left; and A B be reckoned Affirmative, then B C will be Negative; becauſe in the drawing it diminiſhes A B, and reduces it either to a ſhorter, as A C, or to none, if C chances to fall upon the Point A, or to leſs than none, if B C be longer than A B from which it is taken. *A negative Quantity is denoted by the Sign* —; *the Sign* + *is prefixed to an* affirmative *one*; *and* $\overline{+}$ *denotes an uncertain Sign, and* $\underline{+}$ *a contrary uncertain one.* (*)

V. *In an Aggregate of Quantities, the Note* + *ſignifies, that the Quantity it is prefixed to, is* to be added; *and the Note* —, *that it is* to be ſubtracted. And we uſually expreſs theſe Notes by the Words *Plus* (or *more*) and *Minus* (or *leſs.*) Thus 2+3, or 2 more 3, denotes the Sum of the Numbers 2 and 3, that is, 5. And 5—3, or 5 leſs 3, denotes the Difference which ariſes by ſubducting 3 from 5, that is, 2. And —5+3 ſignifies the Difference which ariſes from ſubducting 5 from 3, that is — 2; and 6—1+3 makes 8. Alſo $a+b$ denotes the Sum of the Quantities a and b, and $a-b$ the Difference which ariſes by ſubducting b from a; and $a-b+c$ ſignifies the Sum of that

---

IV. (*) In Geometry, Lines are repreſented by a Line; Triangles by a Triangle; and other Figures by a Figure of the ſame Kind; But, in Algebra, Quantities are repreſented by the ſame Letters of the Alphabet; and various Signs have been imagined for repreſenting their Relations, Affections, and Dependencies. *In Geometry the Repreſentations are more natural*; *in Algebra more arbitrary.* The former are like the firſt Attempts towards the Expreſſion of Objects, which was by drawing their Reſemblances; the latter correſpond more to the preſent Uſe of Languages and Writing. Thus *the Evidence of Geometry is ſometimes more ſimple and obvious*; *but the Uſe of Algebra more extenſive, and often more ready*; eſpecially ſince the mathematical Sciences have acquired ſo vaſt an Extent, and have been applied to ſo many Inquiries.

In

that Difference and of the Quantity c. Suppoſe if a be 5, b 2, and c 8, then $a+b$ will be 7, and $a-b$ 3, and $a-b+c$ will be 11. Alſo $2a+3a$ is $5a$, and $3b-2a-b+3a$ is $2b+a$; for $3b-b$ makes $2b$, and $-2a+3a$ makes a, whoſe Aggregate, or Sum, is $2b+a$, and ſo in others. Theſe Notes + and — are called *Signs*; and when neither is prefixed, the Sign + is always to be underſtood. (*e*)

VI. Multiplication, *properly ſo called, is that which is made by Integers, as ſeeking a new Quantity, ſo many Times greater than the Multiplicand, as the Multiplier is greater than Unity.* But, for want of a better Word, *that is alſo called* Multiplication, *which is made uſe of in Fractions and Surds,*

In thoſe Sciences, *it is not barely Magnitude that is the Object of Contemplation: But there are many Affections and Properties of Quantities, and Operations to be performed upon them, that are neceſſary to be conſidered.* In eſtimating the Ratio or Proportion of Quantities, Magnitude only is conſidered: But the Nature and Properties of Figures depend on the Poſition of the Lines that bound them, as well as on their Magnitude. In treating of Motion, the Direction of Motion, as well as its Velocity, and the Direction of Powers which generate or deſtroy Motion, as well as their Forces, muſt be regarded. In Optics, the Poſition, Brightneſs, and Diſtinctneſs of Images, are of no leſs Importance than their Bigneſs; and the like is to be ſaid of other Sciences. *It is neceſſary therefore that other Symbols be admitted into* Algebra, *beſide the Letters and Numbers which repreſent the Magnitude of Quantities.*

V. (*e*) Quantities connected by the Signs + or — make one *compound Quantity*, whoſe *Terms* are the ſingle or ſimple Quantities ſo connected. A compound Quantity of two Terms is called a *Binome*, whether it be the Sum or the Difference of two Quantities: When it is neceſſary to diſtinguiſh them, the Sum ſhall be called a *Binominal*, and the Difference a *Reſidual*. A compound Quantity of more Terms than two is called a *Multinome*; ſuch are *Trinomes*, *Quadrinomes*, &c. If the Number of Terms be indefinite, the compound Quantity is an *Infinitinome*.

VI. (*f*) 19. Hence

Surds, to find a new Quantity in the same Ratio *(whatever it be) to the Multiplicand, as the Multiplier has to Unity.* (*f*) Nor is *Multiplication made* only by abstract Numbers, but also *by concrete Quantities*, as by Lines, Surfaces, Local Motion, Weights, *&c. as far as these being related to some known Quantity of their Kind, as to Unity, may express the Ratios of Numbers, and supply their Place.* As if the Quantity A be to be multiplied by a Line of 12 Foot, supposing a Line of 2 Foot to be Unity, there will be produced by that Multiplication 6 A, or six Times A, in the same Manner as if A were to be multiplied by the abstract Number 6; for 6 A is in the same Ratio to A, as a Line of 12 Foot has to a Line of 2 Foot. And so if you were to multiply any two Lines, A C [*See* Fig. 2.] and A D by one another, take A B for Unity, and draw B C, and parallel to it D E, and A E will be the Product of this Multiplication; because it is to A D as A C to the Unity A B. Moreover, *Custom has obtained, that the Genesis or Description of a Surface, by a Line moving at right Angles upon another Line, should be called the Multiplication of those two Lines.* For though a Line, however multiplied, cannot become a Surface, and consequently this Generation of a Surface by Lines is very different from Multiplication, yet they agree in this, that the Number of Unities in either Line, multiplied by the Number of Unities in the other, produces an abstracted Number of Unities in the Surface comprehended under those Lines, if the superficial Unity be defined as it is used to be, *viz.* a Square whose Sides are linear Unities. As if the right Line [Fig. 3.]

A B

VI. (*f*) 19. Hence it follows, that *as Unity is to the Multiplier, so is the Multiplicand to the Product.* (Eucl. VII. Def. 15.) The Product is the Aggregate of the Multiplicand alone, whence *the Multiplier is an absolute Number*, or Multiple of Unity: Hence the Operation in *Surds* and in *Fractions* is not properly Multiplication. And *in Fractions*, because *the Multiplier is a Submultiple of Unity, the Product* is so far from being a Multiple of the Multiplicand, that it *must be* a Submultiple of, that is, *less than, the Multiplicand.*

VII. (*g*) The

A B consist of four Unities, and A C of three, then the Rectangle A D will consist of four times three, or 12 square Unities, as from the Scheme will appear. *And there is the like Analogy of a Solid and a Product made by the continual Multiplication of three Quantities.* And *hence* it is, that the Words to *multiply into*, the *Content*, a *Rectangle*, a *Square*, a *Cube*, a *Dimension*, a *Side*, and the like, which are *Geometrical Terms*, are *applied to Arithmetical Operations.* For by a *Square*, or *Rectangle*, or a *Quantity of two Dimensions*, we do not always understand a Surface, but most commonly a Quantity of some other Kind, which is produced by the Multiplication of two other Quantities, and very often a Line which is produced by the Multiplication of two other Lines. And so we call a *Cube*, or a *Parallelopiped*, or a *Quantity of three Dimensions*, that which is produced by two Multiplications. We say likewise the *Side* for a *Root*, and use *Draw into* instead of *Multiply*; and so in others.

VII. *A Number prefixed immediately before any Species, denotes that Species to be so often to be taken.* Thus 2 *a* denotes two *a*'s, 3 *b* three *b*'s, 15 *x* fifteen *x*'s. (*g*)

VIII. *Two or more Species immediately connected together, denote a* Product *or Quantity made by the Multiplication of all the Species together.* Thus *a b* denotes a Quantity made by multiplying *a* by *b*; and *a b x* denotes a Quantity made by multiplying *a* by *b*, and the Product again by *x*. As suppose, if *a* were 2, and *b* 3, and *x* 5, then *a b* would be 6, and *a b x* would be 30. (*h*)

IX. *Among*

VII. (*g*) The Number prefixed is called the *Coefficient*, or Cofactor: And *if a Quantity is without one, it is implied that Unity is its Coefficient*; which causing no Alteration, is therefore generally omitted.

VIII. (*h*) When the Factors are single Letters, or Figures and single Letters, every Sign of Multiplication is generally omitted, and the Product is any Combination of the Letters.

IX. (*i*) Besides

IX. *Among Quantities multiplying one another, the Sign* ×, *or the Word* by *or* into, *is made uſe of to denote the Product ſometimes.* Thus 3×5, or 3 by or into 5, denotes 15; but *the chief Uſe of theſe Notes is when compound Quantities are multiplied together.* As if $y-2b$ were to multiply $y+b$, the Way is to draw a Line over each Quantity, and then write them thus, $\overline{y-2b}$ into $\overline{y+b}$, or $\overline{y-2b} \times \overline{y+b}$. (*i*)

X. Diviſion *is properly that which is made uſe of for integer or whole Numbers, in finding a new Quantity ſo much leſs than the Dividend, as Unity is than the Diviſor.* But *by Analogy*, the Word may alſo be uſed *when a new Quantity is ſought, that ſhall be in any ſuch* Ratio *to the Dividend, as Unity has to the Diviſor; whether that Diviſor be a Fraction or ſurd* Number, or other Quantity of any other Kind. Thus to divide the Line [*See* Fig. 4.] A E by the Line A C, A B being Unity, you are to draw E D parallel to C B, and A D will be the Quotient. Moreover, *it is called Diviſion*, by reaſon of a certain Similitude, *when a Rectangle is* applied *to a given Line as a Baſe, in order thereby to know the Heighth.* (*k*)

XI. *One*

IX. (*i*) Beſides the oblique Croſs ×, and the Words *by*, and *into*; a *full Point* is alſo interpoſed between the Factors, to denote their Product. Sometimes alſo *compound Factors*, inſtead of having Lines continued over their Terms, are *included within Hooks*, and ſome Mark of Multiplication interpoſed. But in all Caſes

20. *The Product is the ſame whatever the Order of the Factors may be.* (Eucl. VII. 16.)

X. (*k*) 21. Hence, *as the Diviſor is to the Dividend, ſo is Unity to the Quote.* The Dividend is an Aggregate of the Diviſor alone; *the Quote* therefore is *an abſolute Number*, or Multiple of Unity. In the Operation of *Surds* and *Fractions*, it is not, ſtrictly ſpeaking, Diviſion; and *in* the Caſe of *Fractions*, as the Diviſor is a Submultiple of Unity, ſo *the Dividend* is a Submultiple of, that is, *is leſs than, the Quote.*

XI. (*l*) See

XI. *One Quantity below another, with a Line interpoſed, denotes a* Quotient, *or a Quantity ariſing by the Diviſion of the upper Quantity by the lower.* Thus $\frac{6}{2}$ denotes a Quantity ariſing by dividing 6 by 2, that is 3; and $\frac{5}{8}$ a Quantity ariſing by the Diviſion of 5 by 8, that is one eighth Part of the Number 5. And $\frac{a}{b}$ denotes a Quantity which ariſes by dividing a by b; as ſuppoſe a was 15, and b 3, then $\frac{a}{b}$ would denote 5. Likewiſe thus $\frac{ab-bb}{a+x}$ denotes a Quantity ariſing by dividing $ab-bb$ by $a+x$. And ſo in others. *Theſe Sorts of Quantities are called* Fractions; *and the upper Part is called by the Name of the* Numerator, *and the lower is called the* Denominator. (*l*)

XII. *Sometimes the Diviſor is ſet before the divided Quantity, and ſeparated from it by a Mark reſembling an Arch of a Circle.* Thus to denote the Quantity which ariſes by the Diviſion of $\frac{a \times x}{a+b}$ by $a-b$, it may be wrote thus, $\overbrace{a-b)\frac{a \times x}{a+b}}$. (*m*)

XIII. Although we commonly denote Multiplication by the immediate Conjunction of the Quantities, yet *an Integer before a Fraction, denotes the Sum of both.* Thus $3\frac{1}{2}$ denotes three and a half. (*n*)

XIV. *If a Quantity be multiplied by itſelf, the Number of* Facts *or Products is, for Shortneſs ſake, ſet at the Top of the Letter.* Thus, for $a\,a\,a$, we write a^3; for $a\,a\,a\,a$, a^4; for $a\,a\,a\,a\,a$, a^5; and for $a\,a\,a\,b\,b$ we write $a^3\,b\,b$, or $a^3\,b^2$: As

---

XI. (*l*) See Article XXXVII. N° 143, *&c.*

XII. (*m*) The Dividend is alſo ſometimes ſet before the Diviſor, with the Mark ÷ interpoſed.

XIII. (*n*) And is called *a mixed Number.*

XIV. (*o*) The

As ſuppoſe, if a were 5, and b be 2, then a^3 will be $5\times5\times5$ or 125, and a^4 will be $5\times5\times5\times5$ or 625, and a^3b^2 will be $5\times5\times5\times2\times2$ or 500. Where note, that *if a Number be written immediately between two Species, it always belongs to the former*; thus the Number 3 in the Quantity a^3bb, does not denote that bb is to be taken thrice, but that a is to be thrice multiplied by itſelf. (*o*) Note, moreover, that *theſe Quantities are ſaid to be of ſo many* Dimenſions, *or of ſo high a* Power *or* Dignity, *as they conſiſt of Factors or Quantities multiplying one another*; *and the Number ſet on forwards at the Top of the Letter, is called the Index of thoſe Powers or Dimenſions*; thus aa is of two Dimenſions, or of the 2d Power; and a^3 of three, as the Number 3 at the Top denotes. aa is alſo called a *Square*, a^3 a *Cube*, a^4 a *Biquadrate*, or *ſquared Square*, a^5 a *Quadrato-Cube*, a^6 a *Cubo-Cube*, a^7 a *Quadrato-Quadrato-Cube* or *Squared-Squared-Cube*, and ſo on: And the Quantity a, by whoſe Multiplication by itſelf theſe Powers are generated, is called their *Root*, *viz.* it is the Square Root of the Square aa, the Cube Root of the Cube aaa, &c. (*p*)

XV. But

XIV. (*o*) The Multiplication of a Quantity by itſelf, is called *Involution*. *The Sign of Involution is* ⊙. When a compound Quantity is ſignified to be involved, *the Index of the Power is ſet at the End of a Line continued over all its Terms*. In all Caſes, becauſe Unity (VII. *g*) is ſuppoſed to be continually a Cofactor, *the Index is equal to the Number of Multiplications by which the Power is produced*, and *equal to the Number of Factors, excluding Unity*.

(*p*) *A ſingle Quantity* is ſaid to be of one Dimenſion. *A ſimple Product of Factors of one Dimenſion* is of ſo many Dimenſions as there are literal Factors. The Factors are called the Roots of the Product; and if the Factors are equal, the Product is uſually called a Power. *A ſimple Product of Factors of different Dimenſions* is of ſo many Dimenſions as there are Units in the Sum of the Exponents of the Factors. *A compound Product, which contains Quantities all known*, is of ſo many Dimenſions as its higheſt Term. And *a compound Product which contains an unknown Quantity* is of ſo many Dimenſions, as there are Units in the higheſt Index of the unknown in any of its Terms.

XVI. (*q*) The

XV. But when *a Root multiplied by itſelf, produces a Square, and that Square, multiplied again by the Root, produces a Cube*, &c. *it will be* (by the Definition of Multiplication) *as Unity to the Root, ſo that Root to the Square, and that Square to the Cube*, &c. And conſequently *the ſquare Root of any Quantity will be a mean Proportional between Unity and that Quantity, and* the Cube Root *the firſt of two mean Proportionals, and* the Biquadratick Root *the firſt of three, and ſo on.* Wherefore *Roots* are *known* by theſe *two Properties*, or Affections; *firſt*, that *by multiplying themſelves they produce the ſuperior Powers*; *2dly*, that *they are mean Proportionals between thoſe Powers and Unity.* Thus 8 is the Square Root of the Number 64; and 4, the Cube Root of it, is hence evident, becauſe 8×8 and $4 \times 4 \times 4$ make 64; or becauſe as 1 is to 8, ſo is 8 to 64; and 1 is to 4, as 4 to 16, and as 16 to 64. And hence, if the Square Root of any Line as A B [*See* Fig. 5.] is to be extracted, produce it to C, and let B C be Unity; then upon A C deſcribe a Semicircle, and at B erect a Perpendicular, meeting the Circle in D; then will B D be the Root, becauſe it is a mean Proportional between A B and Unity B C.

XVI. *To denote the Root of any Quantity, we uſe to prefix this Note* $\surd$ *for a Square Root*; *and this* $\surd 3$: *if it be a Cube Root*; *and this* $\surd 4$: *for a Biquadratic Root*, &c. Thus $\surd 64$ denotes 8; and $\surd 3 : 64$ denotes 4; and $\surd aa$ denotes a; and $\surd ax$ denotes the Square Root of ax; and $\surd 3 : 4axx$ the Cube Root of $4axx$. As if a be 3, and x 12; then $\surd ax$ will be $\surd 36$, or 6; and $\surd 3 : 4axx$ will be $\surd 3 : 1728$, or 12. And *when theſe Roots cannot be extracted, the Quantities are called* Surds; as $\surd ax$: or *Surd Numbers*, as $\surd 12$. (*q*)

There

XVI. (*q*) The Extraction of a Root is called *Evolution*. *The Sign of Evolution is* ω. *The Sign of Irrationalty is* $\surd$ with the Index of the Root ſet over it. *A ſimple Surd* conſiſts of one irrational Term. *A compound or univerſal Surd* contains more irrational Terms than one.

(*r*) The

There are ſome, that, to denote the Square or firſt Power, make uſe of q, and of c for the Cube, $q\,q$ for the Biquadrate, and $q\,c$ for the Quadrato-Cube, &c. After this Manner for the Square, Cube, and Biquadrate of A, they write A q, A c, A $q\,q$, &c. And for the Cube Root of $a\,b\,b - x^3$, they write $\surd\, c : a\,b\,b - x^3$. Others make uſe of other Sorts of Notes, but they are now almoſt out of Faſhion. (r)

XVII. *The Mark* $=$ *ſignifies, that the Quantities on each Side of it are equal.* Thus $x = b$ denotes x to be equal to b.

The Note : : *ſignifies, that the Quantities on both Sides of it are* proportional. Thus $a.b :: c.d$ ſignifies, that a is to b as c to d; and $a.b.e :: c.d.f$ ſignifies, that a, b, and e, are to one another reſpectively, as c, d, and f, are among themſelves; or that a to c, b to d, and e to f, are in the ſame *Ratio*.

Laſtly, *the Interpretation of any Marks or Signs that may be compounded out of theſe, will eaſily be known by Analogy.*

Thus $\frac{3}{4}\,a^3\,b\,b$ denotes three quarters of $a^3\,b\,b$, and $3\,\frac{a}{c}$ ſignifies thrice $\frac{a}{c}$, and $7\,\surd\, a\,x$ ſeven times $\surd\, a\,x$. Alſo $\frac{a}{b}\,x$ denotes the Product of x by $\frac{a}{b}$; and $\frac{5\,e\,e}{4\,a+9\,e}\,z^3$ denotes the Product made by multiplying z^3 by $\frac{5\,e\,e}{4\,a+9\,e}$, that is the Quotient ariſing by the Diviſion of $5\,e\,e$ by $4\,a+9\,e$; and

(r) The Notation by the Sign of Irrationality called the *Vinculum*, with the Index ſet above it, is chiefly followed: But *the Form of Surds beſt ſuited to the ſeveral Operations, is that, where the Index of the Surd is a Fraction, whoſe Numerator denotes the Power to which the Quantity is ſuppoſed to be raiſed, and whoſe Denominator denotes the Root to be extracted from the ſaid Power of that Quantity.* Thus $x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$; and $x^2 + a\,b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2 + a\,b}$. See N° 78.

and $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$, that which is made by multiplying $\sqrt{ax}$ by $\frac{2a^3}{9c}$; and $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ the Quotient arising by the Diviſion of $7\sqrt{ax}$ by c; and $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ the Quotient ariſing by the Diviſion of $8a\sqrt{cx}$ by the Sum of the Quantities $2a+\sqrt{cx}$. And thus $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotes the Quotient ariſing by the Diviſion of the Difference $3aax-x^3$ by the Sum $a+x$, and $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ denotes the Root of that Quotient, and $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ denotes the Product of the Multiplication of that Root by the Sum $2a+3c$. Thus alſo $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotes the Root of the Sum of the Quantities $\frac{1}{4}aa$ and bb, and $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ denotes the Root of the Sum of the Quantities $\frac{1}{2}a$ and $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, and $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ denotes the Root multiplied by $\frac{2a^3}{aa-zz}$. And ſo in other Caſes.

But Note, that *in complex Quantities of* this Nature, *there is no Neceſſity of giving a particular Attention to*, or bearing in your Mind, *the Signification of each Letter*; it will ſuffice in general to underſtand, *e. g.* that $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ ſignifies the Root of the Aggregate or Sum of $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; whatever that Aggregate may chance to be, when Numbers or Lines are ſubſtituted in the room of Letters. And thus it is as ſufficient to underſtand, that $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}}{a-\sqrt{ab}}$ ſignifies the Quotient

Quotient ariſing by the Diviſion of the Quantity $\sqrt{\frac{1}{4}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ by the Quantity $a-\sqrt{ab}$, as much as if thoſe Quantities were ſimple and known, though at preſent one may be ignorant what they are, and not give any particular Attention to the Conſtitution or Signification of each of their Parts; which I thought I ought here to admoniſh, leſt young Beginners ſhould be deterred in the very Beginning, by the Complexneſs of the Terms.

Of Addition.

XVIII. THE *Addition of Numbers, where they are not very compounded, is manifeſt of itſelf.* Thus it is at firſt Sight evident, that 7 and 9 or 7+9 make 16, and that 11+15 make 26. But *in more compounded Numbers, the Buſineſs is performed by writing the Numbers in a Row downwards, or one under another, and ſingly collecting the Sums of the Columns.* (*a*) As if the Numbers 1357 and 172 are to be added, write either of them (ſuppoſe 172) under the other 1357, ſo that the Units of the one, *viz.* 2, may exactly ſtand under the Units of the other, *viz.* 7, and the other Numbers of the one exactly under the correſpondent ones of the other, *viz.* the Place of Tens under Tens, *viz.* 7 under 5, and that of Hundreds, *viz.* 1, under the Place of Hundreds of the other, *viz.* 3. Then beginning at the right hand, ſay 2 and 7 make 9, which write underneath. Alſo 7 and 5 make 12, the laſt of which two Numbers, *viz.* 2, write underneath, and reſerve in your Mind the other, *viz.* 1, to be added to the two next Numbers, *viz.* 1 and 3.

```
1357
 172
1529
```

XVIII. (*a*) *Begin with the Column of Units, and if their Sum is under Ten, ſet it underneath: But if equal to Ten, or Tens, ſet a Cypher underneath: And if greater than Ten, or Tens, ſet the Exceſs underneath: And for every Ten carry an Unit to the next Column.* Proceed thus through all.

1 and 3. Then ſay 1 and 1 make 2, which being added to 3 they make 5, which write underneath, and there will remain only 1, the firſt Figure of the upper Row of Numbers, which alſo muſt be writ underneath; and then you have the whole Sum, *viz.* 1529.

Thus, to add the Numbers 87899 + 13403 + 885 + 1920 into one Sum, write them one under another, ſo that all the Units may make one Column, the Tens another, the Hundreds a third, and the Places of Thouſands a fourth, and ſo on. Then ſay 5 and 3 make 8, and 8 + 9 make 17; then write 7 underneath, and the 1 add to the next Rank, ſaying 1 and 8 make 9, 9 + 2 make 11, and 11 + 9 make 20; and having writ the 0 underneath, ſay again, as before, 2 and 8 make 10, and 10 + 9 make 19, and 19 + 4 make 23, and 23 + 8 make 31; then reſerving 3 in your Memory, write down 1 as before, and ſay again 3 + 1 make 4, 4 + 3 make 7, and 7 + 7 make 14, wherefore write underneath 4; and laſtly ſay 1 + 1 make 2, and 2 + 8 make 10, which in the laſt Place write down, and you will have the Sum of them all, 104107. (*b*)

87899
13403
1920
885
104107

XIX. *After the ſame Manner we alſo add Decimals*, as in the following Example may be ſeen:

630,953
51,0807
305,25
987,2837 (*c*)

XX. *Addition*

(*b*) *Quantities of different Denominations*, whether they be Numbers or Species, whether Integers or Fractions, whether Powers or Roots, whether rational or irrational, *cannot properly be added*, that is, *united into one Sum*; *becauſe the Aggregate cannot be of any certain Denomination*: They can therefore be only connected with their Signs.

XIX. (*c*) *Numbers whoſe Denominators are in any other Ratio may be added after the Manner of thoſe, by ſubſtituting in the Place of Ten the Number by which the Denominators increaſe.*

XXI. (*) That

XX. *Addition is performed in Algebraic Terms or Species, by connecting the Quantities to be added with their proper Signs, and moreover by uniting into one Sum those that can be so united.* Thus a and b make $a+b$; a and $-b$ make $a-b$; $-a$ and $-b$ make $-a-b$; $7a$ and $9a$ make $7a+9a$; $-a\sqrt{ac}$ and $b\sqrt{ac}$ make $-a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$, or $b\sqrt{ac}-a\sqrt{ac}$; for it is all one, in what Order soever they are written.

XXI. *Affirmative Quantities, which agree in Species, are united together, by adding the prefixed Numbers that are multiplied into those Species.* Thus $7a+9a$ make $16a$. And $11bc+15bc$ make $26bc$. Also $3\frac{a}{c}+5\frac{a}{c}$ make $8\frac{a}{c}$, and $2\sqrt{ac}+7\sqrt{ac}$ make $9\sqrt{ac}$, and $6\sqrt{\overline{ab-xx}}x+7\sqrt{\overline{ab-xx}}$ make $13\sqrt{\overline{ab-xx}}$. And, in like Manner, $6\sqrt{3}+7\sqrt{3}$ make $13\sqrt{3}$. Moreover $a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$ make $\overline{a+b}\sqrt{ac}$, by adding together a and b as Numbers multiplying $\sqrt{ac}$. And so $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}+3a\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ make $\overline{5a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ because $2a+3c$ and $3a$ make $5a+3c$. (*)

XXII. *Affirmative Fractions, that have the same Denominator, are united by adding their Numerators.* Thus $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ make $\frac{3}{5}$, and $\frac{2ax}{b}+\frac{3ax}{b}$ make $\frac{5ax}{b}$; and thus $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}+\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ make $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$, and $\frac{aa}{c}+\frac{bx}{c}$ make $\frac{aa+bx}{c}$.

XXIII. *Negative*

XXI. (*) That is, *Surds are united by uniting their rational Coefficients*, when being reduced to their lowest Terms, they agree in their radical Part, or have the same Denomination; for in this Case they are commensurable to each other, having the Ratio of their rational Coefficients. (Eucl. VII. 18. Cor.)

XXIII. *Negative Quantities are added after the ſame Way as Affirmative.* Thus — 2 and — 3 make — 5; $-\frac{4ax}{b}$ and $-\frac{11ax}{b}$ make $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ and $-b\sqrt{ax}$ make $-\overline{a-b}\sqrt{ax}$.

XXIV. *But when a Negative Quantity is to be added to an Affirmative one, the Affirmative muſt be diminiſhed by the Negative one.* Thus 3 and — 2 make 1; $\frac{11ax}{b}$ and $-\frac{4ax}{b}$ make $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ and $b\sqrt{ac}$ make $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. And note, *That when the Negative Quantity is greater than the Affirmative, the Aggregate or Sum will be Negative.* (*d*) Thus 2 and — 3 make — 1; $-\frac{11ax}{b}$ and $\frac{4ax}{b}$ make $-\frac{7ax}{b}$; and $2\sqrt{ac}$ and $-7\sqrt{ac}$ make $-5\sqrt{ac}$. In

---

XXIV. (*d*) *The Sum of ſimilar Quantities, affected by contrary Signs, muſt be the Exceſs of the greater:* For, if they are ſimple, it is their Difference which we ſeek; and, if they are compound, it is the Sum of the Differences of their Terms.

Again, To add a Negative is to take away an Equal Poſitive; therefore to add a Negative to a Poſitive is to make one, and deſtroy the other, ſo far as they are equal; and conſequently the Sum muſt be nothing when they are equal, and affected by the Sign of the greater when they are unequal.

22. Hence it follows univerſally, that *the Sum of two Quantities added to their Difference is equal to double the greater:* For the leſs is deſtroyed in the Addition by the Signs being contrary; and the greater is doubled by their being the ſame. Thus let a be the greater, and b the leſs, then their Sum is $a+b$, and their Difference is $a-b$; but $\overline{a+b}+\overline{a-b}=2a$. See N° 36.

(*e*) When

In the Addition of a greater Number of Quantities, or more compound ones, it will be convenient to obſerve the Method or Form of Operation we have laid down above in the Addition of Numbers. As if $17ax-14a+3$, and $4a+2-8ax$, and $7a-9ax$, were to be added together, diſpoſe them ſo in Columns, that the Terms that contain the ſame Species may ſtand in a Row one under another, *viz.* the Numbers 3 and 2 in one Column, the Species $-14a$, and $4a$, and $7a$, in another Column, and the Species $17ax$, and $-8ax$, and $-9ax$, in a third. Then I add the Terms of each Column by themſelves, ſaying 2 and 3 make 5, which I write underneath; then $7a$ and $4a$ make $11a$, and moreover $-14a$ make $-3a$, which I alſo write underneath; laſtly, $-9ax$ and $-8ax$ make $-17ax$, to which $17ax$ added make 0. And ſo the Sum comes out $-3a+5$. (*e*)

$$\begin{array}{r} 17ax-14a+3 \\ -8ax+\ 4a+2 \\ -9ax+\ 7a. \\ \hline *-\ 3a+5 \end{array}$$

After the ſame Manner the Buſineſs is done in the following Examples:

$$\begin{array}{r} 12x+\ 7a \\ 7x+\ 9a \\ \hline 19x+16a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11bc-7\sqrt{ac} \\ 15bc+2\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\dfrac{4ax}{b}+6\sqrt{3}+\dfrac{1}{5} \\ +\dfrac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\dfrac{2}{5} \\ \hline \dfrac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\dfrac{3}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6xx+\frac{3}{7}x \\ 5x^2+\frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{5}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aay+2a^3-\dfrac{a^4}{2y} \\ -2ayy-4aay-\ a^3 \\ \hline y^3+2ayy-\frac{1}{2}aay \\ \hline y^3 \quad *-3\frac{1}{2}aay+\ a^3-\dfrac{a^4}{2y} \end{array}$$

$$5x^4$$

(*e*) When there are many Quantities, both affirmative and negative, of the ſame Species, to be added, it will be moſt convenient to find ſeparately the Sums of thoſe which are like effected, and then to find the Exceſs of thoſe Sums.

$$\begin{array}{r} 5x^4+2ax^3 \\ -3x^4-2ax^3+8\tfrac{1}{3}a^3\sqrt{a\,a+x\,x} \\ -2x^4+5bx^3-20a^3\sqrt{a\,a-x\,x} \\ -4bx^3-7\tfrac{1}{3}a^3\sqrt{a\,a+x\,x} \\ \hline *\ bx^3+a^3\sqrt{a\,a+x\,x}-20a^3\sqrt{a\,a-x\,x}. \end{array} (f)$$

(*f*) It will be of Uſe to explain the Generation and Properties of *Figurate Numbers*, ſo far as we may have Occaſion hereafter to make Uſe of them.

23. *A Series of Numbers which ariſes from adding a Rank*

of { Units or Figurates of the 1ſt Order, Figurates of the 2d Order - -, Figurates of the 3d Order - -, Figurates of the 4th Order - -, Figurates of the 5th Order, &c. } are Figurates of the { 2d, 3d, 4th, 5th, 6th } Order.

Whence the Figurates

of the 1ſt Order	are	1	1	1	1	1	1, &c.
of the 2d Order	are	1	2	3	4	5	6, &c.
of the 3d Order	are	1	3	6	10	15	21, &c.
of the 4th Order	are	1	4	10	20	35	56, &c.
of the 5th Order	are	1	5	15	35	70	126, &c.
of the 6th Order	are	1	6	21	56	126	252, &c.

And conſequently *a figurate Number of any Order is the Sum of all the Figurates of the next preceding Order ſo far*; *or* it is *the Sum of the preceding Figurate of the ſame Order, and of the correſponding Term or Figurate of the preceding Order.* Note, that *Figurates of the* 2d *Order are called Laterals.*

24. *Let* m *and* n *be any two Integers, then the* m*th Term of the* n*th Order is the* n*th Term of the* m*th Order:* For they are the Sums of the ſame Numbers. (23.) Thus the ſixth Term of the fourth Order is 56; which is the fourth Term of the ſixth Order. Thus alſo the 2d, 3d, 4th, &c. Terms of the ſecond Order are the ſecond Terms of the 2d, 3d, 4th, &c. Orders reſpectively. Now *the Terms of the ſecond Order being the Laterals*, and *the ſecond Term of each Order being called the Exponent of that Order*; conſequently *the Laterals are the Exponents of the Orders.*

25. In

25. In any Order, *the Sum of any given Number of Terms is equal to the Product of the ſubſequent Term into the given Number, divided by the Exponent of that Order:* For the Exponent being the Sum of Unity and of the Exponent of the preceding Order, (23.) and each ſubſequent Term being the Sum of its antecedent and of the correſponding Term of the preceding Order, (23.) if any Term be taken ſo often as there have been Additions, that is, if it is multiplied into the given Number of antecedent Terms, the Product and the Exponent will be Equimultiples of the Sum of the antecedent Terms, and of Unity; therefore (Eucl. V. Def. 5.) the Sum of the antecedent Terms is to this Product, as Unity to the Exponent; and conſequently the Sum of the antecedent Terms is equal to the Product of the ſubſequent Term into the Number of the antecedent, divided by the Exponent. (Eucl. VII. 19.) Thus the Sum of the firſt five Terms of the third Order, *viz.* $1+3+6+10+15$ will be the ſixth Term multiplied by five, and divided by three, *viz.* $=\frac{21\times5}{3}=35$; and univerſally putting S for the Sum, e for the Exponent, and z for the Term ſubſequent to the laſt of the given Number, which call n, we have $S=\frac{z\times n}{e}$ or $S=z\times\frac{n}{e}$

26. In any Order, *the Sum of any given Number of Terms is equal to the Product of the laſt of the given Number of Terms multiplied into the Quote, which ariſes by dividing the Sum of the Exponent, and of the given Number of Terms leſs one, by the Exponent:* For putting the laſt of the given Number of Terms, l, the Sum of the given Number of Terms leſs this laſt will be $S-l$, and $S-l=l\times\frac{n-1}{e}$; (N°. 25.) wherefore, $Se-le=l\times\overline{n-1}$; whence $Se=l\times\overline{n-1+e}$; whence) we have $S=l\times\frac{\overline{n-1+e}}{e}$. (Art. LXVII. &c.) So $1+3+6+10+15\left[=\frac{21\times5}{3}\text{(N°. 25.)}\right]=\frac{\overline{15\times5-1+3}}{3}=\frac{15\times7}{3}=35$.

27. *If*

27. *If* n *be put for any Number of Terms, then the* nth *Figurate in every Order, proceeding uniformly from the firſt, will be Unity and the following Products*; viz. *thoſe, which will ariſe from the continual Multiplication of Fractions, whoſe Numerators are the given Number, and the given Number increaſed uniformly by the aſcending Laterals; and whoſe Denominators are the ſame aſcending Laterals beginning from Unity:* For the Sum in every Series is $l \times \frac{n-1+e}{e}$; (26.) but this Sum is the nth Term of the next ſubſequent Order; (24.) wherefore, by ſubſtituting ſucceſſively in the general Expreſſion $l \times \frac{n-1+e}{e}$ the given Number for n, and the Laterals for e, (24.) we ſhall have the nth Sums and Terms ſucceſſively throughout the Orders. Now in the firſt Order, by this Subſtitution, we have $1 \times \frac{n-1+1}{1} = n$ the Sum of n Terms in the firſt, and the nth Term of the ſecond Order, (or l, in the general Expreſſion $l \times \frac{n-1+e}{e}$). In the ſecond Order, therefore by ſubſtituting $\frac{n}{1}$ for l, and 2 for e, we ſhall have $\frac{n}{1} \times \frac{n-1+2}{2} = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ the Sum of n Terms in the ſecond, and the nth Term of the third Order; and ſubſtituting $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ for l, and 3 for e; the general Expreſſion $l \times \frac{n-1+e}{e}$ will become $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n-1+3}{3} = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ the Sum of n Terms in the 3d, and the nth Term of the 4th Order; and ſo on. Thus the 6th Term

Term is 1; $\frac{6}{1}=6$; $1\times\frac{6}{1}\times\frac{7}{2}=21$; $1\times\frac{6}{1}\times\frac{7}{2}\times\frac{8}{3}=56$; $1\times\frac{6}{1}\times\frac{7}{2}\times\frac{8}{3}\times\frac{9}{4}=126$; &c. in the 1ft, 2d, 3d, 4th, 5th, &c. Orders.

28. *If* n *be put the Exponent of any Order, the Terms of that Order will be uniformly, Unity,* $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n\times 2}{3}\times\frac{n+3}{4}$, &c. For the *n*th Terms throughout the Orders are theſe Products; (N° 27.) but the *n*th Term throughout each Order is the 1ft, 2d, 3d, &c. Terms of the *n*th Order; (24.) therefore theſe Products are the Terms of the *n*th Order.

29. *If there be taken three figurate Numbers, being ſucceſſive Terms of any nth Order, or the nth Figurate in three ſucceſſive Orders,* (24.) *the Square of the middle Term exceeds the Product of the adjacent Terms:* For the Terms of the 2d Order being generated from the continued Addition of Units, thoſe of the 3d Order from the continued Addition of thoſe of the 2d Order or the Laterals, thoſe of the 4th Order from the continued Addition of the Terms of the 3d Order, and ſo on, the Extremes of three will differ more and more from an Equality with each other in each ſucceeding Order; and conſequently will differ more and more from an Equality with half their Sum in each ſucceeding Order: Now the middle Term will be equal to their half Sum in the ſecond Order, they being generated from the continued Addition of Equals, or Units: In the 3d Order the middle Term will be leſs than half their Sum, but cannot deviate ſo much from an Equality with it, as each Extreme differs from it, becauſe they are generated from the continued Addition of Laterals. And ſo on, in the ſuperior Orders; the middle Term will deviate more and more from an Equality with half the Sum of the Extremes; but always deviate leſs from an Equality with it, than either Extreme deviates from an Equality with it: But the Square of the half Sum has the greateſt Ratio to the Square of the whole Sum;

Sum; and the more unequal the Parts are, the leſs is the Ratio which their Product has to the Square of the Sum; and the nearer any Part is to an Equality with the half Sum, the greater is the Ratio which its Square has to the Square of the Sum: (Eucl. II. 4.) Therefore the Square of the middle Term (which deviates leſs from the half Sum) will have a greater Ratio to the Square of the Sum, than the Product of the Extremes (which deviate more from an Equality with the half Sum) has to it; and therefore the Square of the middle Term is greater than the Product of the Extremes. (Eucl. V. 10.) *Hence the Square of any Lateral exceeds the Product of any adjacent ones by Unity.*

30. It follows alſo, that *the Ratio of the middle Term to either Extreme, is greater than the Ratio of the other Extreme to the middle Term*; (Eucl. VII. 10.) and conſequently, that *if each ſubſequent Figurate of the* n*th Order be divided by the antecedent, or* if in the *n*th Figurate throughout the Orders, (24.) *the ſubſequent be divided by the antecedent, the Quotes or Fractions will continually decreaſe.*

31. *If throughout the Orders, beginning at the firſt, there be taken Figurates, ſo as* n, *the Number of Terms in the firſt, ſhall continually decreaſe by Unity, thoſe Figurates will be generated by the continued Multiplication of Fractions, whoſe Numerators are the Laterals continually decreaſing from* n, *and whoſe Denominators are the ſame Laterals continually increaſing from Unity*; that is, Unity, and the Products

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}, \quad \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}, \quad \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}, \text{ \&c.}$$

For, as when n was a conſtant Quantity, Unity only, and that once only, was to be ſubducted from n, and the Laterals were to be ſucceſſively added (27.) in the general Expreſſion $S=l\times\frac{n-1+e}{e}$; ſo here (by Suppoſition) a ſecond Unit is to be ſucceſſively ſubducted, and the Laterals to be ſucceſſively added; whence it comes to paſs, that the odd Laterals are ſucceſſively ſubducted, *viz.* 1, 3, 5, 7, *&c.* but the Laterals in the natural Progreſſion only are added, *viz.* 1, 2, 3, 4, *&c.* whence the Numerators

Numerators are n, $n-1$, $n-2$, &c. (for $n = n-1+1$, $n-1 = n-3+2$, $n-2 = n-5+3$, $n-3 = n-7+4$, &c.) and the Denominators continue as before in N° 27. Thus in the general Expreſſion $S = l \times \frac{n-1+e}{e}$, we have $S = 1 \times \frac{n-1+1}{1} = n$, the nth Figurate of the 2d Order: Then for the $n-1$th Term of the 3d Order, we are to ſubſtitute for l, $\frac{n}{1}$: and for $\frac{n-1+e}{e}$, not $\frac{n-1+2}{2}$, but $\frac{n-3+2}{2} = \frac{n-1}{2}$: whence we have $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, for the $n-1$th Term of the 3d Order: and ſubſtituting for l; $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$: and for $\frac{n-1+e}{e}$, not $\frac{n-1+3}{3}$, but $\frac{n-5+3}{3} = \frac{n-2}{3}$; we have $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, for the $n-2$th Term of the fourth Order; and ſo on. Thus, if we would know what the Figurates are in the ſeveral Orders, beginning at the 6th Term, ſo as 6 ſhould continually decreaſe by Unity, they will be $1 : \frac{6}{1} = 6 : \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} = 15 : \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = 20 : \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 15 : \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 6 : \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = 1$: that is, 1. 6. 15. 20. 15. 6. 1.

32. *In the Figurates* $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, &c. *the Figurates will increaſe, while the exceſs of* n *above the odd Laterals to be ſubducted is poſitive:* For the Numerators being the Aggregates of this Exceſs and the Laterals!

Laterals, and the Denominators being the ſame Laterals: while this Exceſs is poſitive, the Numerators will exceed the Denominators: And conſequently the Products will increaſe. *But when this Exceſs becomes negative*, it will diminiſh the Exponents of the Orders: Their Aggregates therefore, the Numerators, will become leſs than the Denominators: And therefore the Products will *decreaſe*. Now becauſe thoſe Aggregates are the Numerators decreaſing from n, that is, the Laterals decreaſing from n, (31.) and becauſe the Denominators are the ſame Laterals increaſing to n, the Values of the Numerators and Denominators will be interchanged when that Exceſs becomes negative; and therefore the decreaſing Products will be the ſame as before, that is, *the Figurates equidiſtant from Unity in each Extreme will be equal.* And becauſe *when* n *is an odd Number*, the middle Fraction muſt have its Numerator and Denominator the ſame, it will make no Difference in the Products: And therefore *there will then be two middle Products equal, and greateſt, and adjacent. But when* n *is an even Number, there will be* two Fractions in the middle, whoſe Numerators and Denominators will be reciprocally the ſame: There will be a Difference therefore in every Product: And conſequently but *one greateſt Product; and that in the middle.* Now becauſe thoſe Figurates are generated by Addition, in the ſame Manner as thoſe in N° 29. *the Square of the middle one of any three in Succeſſion ſhall be greater than the Product of the Extremes.* And laſtly, the Ratio of the middle one to one Extreme is greater than the Ratio of the other Extreme to the middle one: And therefore, *if each ſubſequent Figurate be divided by its antecedent, the Quotes or Fractions will continually decreaſe.* Thus $\frac{6}{1} \sqsubset \frac{5}{2} \sqsubset \frac{4}{3} \sqsubset \frac{3}{4} \sqsubset \frac{2}{5} \sqsubset \frac{1}{6}$.

33. *If the Series of Figurates* $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$, *&c. be continued to* n *Terms, and if the generating Fractions* $\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \frac{n-3}{4}$, *&c.*

&c. be divided, each ſubſequent one by its antecedent, and the Quotes be placed over the Figurates generated from them reſpectively; then the Square of any Figurate multiplied into its correſponding Quote, placed over it, will be equal to the Product of the two Figurates which are adjacent to it on each Side: For the Figurates being generated from the continual Multiplication, but the Quotes from the Diviſion, as above, of the ſame Fractions, the Ratio of the Numerator to the Denominator, in each Quote, will be the Reciprocal of the Ratio of the Square of the Figurate underneath to the Product of the adjacent Figurates; and therefore thoſe Ratios will together compound the Ratio of Equality. (Eucl. V. Def. 20.) Let the generating Fractions be $\frac{e}{a}, \frac{d}{b}, \frac{c}{c}, \frac{b}{d}, \frac{a}{e}$, then will the Figurates be 1, $\frac{e}{a}$, $\frac{ed}{ab}, \frac{ed}{ab}, \frac{e}{a}$, 1, and the Quotes will be $\frac{ad}{eb}, \frac{b}{d}, \frac{b}{d}, \frac{ad}{eb}$; and the Quotes placed over the Figurates will ſtand thus,

$$\frac{ad}{eb}, \frac{b}{d}, \frac{b}{d}, \frac{ad}{eb},$$

1, $\frac{e}{a}, \frac{ed}{ab}, \frac{ed}{ab}, \frac{e}{a}$, 1: Now the Ratio of the Square of $\frac{e}{a}$ to $\frac{ed}{ab} \times 1$ is $\frac{eeab}{aaed}$ (149.) $= \frac{eb}{ad}$, which is the Reciprocal of $\frac{ad}{eb}$; alſo the Ratio of the Square of $\frac{ed}{ab}$ to $\frac{ed}{ab} \times \frac{e}{a}$ is $\frac{e^2d^2a^2b}{e^2a^2b^2d}$ (149.) $= \frac{d}{b}$, the Reciprocal of the Quote $\frac{b}{d}$.

34. *Hence, if different Numbers are ſubſtituted for* n, *whereby different Series of Figurates will reſult from the different Series of generating Fractions, and each ſubſequent generating Fraction be divided by the antecedent, the Quotes in every Series will be ſo many Theorems, for ſhewing the Ratio of the Square of the correſponding Figurate, to the Product of the adjacent Extremes:* For theſe Ratios are the Reciprocals

Reciprocals of the Ratios of the Numerators to the Denominators in the correſponding Quotes. Thus, put $n=2$, the Fractions are $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, the Figurates 1, 2, 1, and the Quote $\frac{1}{4}$; therefore $\frac{1}{4}$ of the Square of the middle Term is equal to the Product of the adjacent Figurates; or the Square is equal to quadruple the Product. If $n=3$, the Fractions being $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, and the Figurates 1, 3, 3, 1, and the Quotes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$; therefore $\frac{1}{3}$ the Square of the 2d or 3d Figurate is equal to the Product of the adjacent ones; or the Square is triple the Product. Put $n=4$, then the Fractions are $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, the Figurates 1, 4, 6, 4, 1, and the Quotes $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{8}$; whence $\frac{3}{8}$ the Square of the 2d and 4th Figurate is equal to the Product of the adjacent ones; and $\frac{4}{9}$ the Square of the 3d is equal to the Product of the 2d and 4th, *&c. &c.*

35. *The Series of Figurates or Products* $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}, \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}$, &c. *continued to* n *Terms, exhibits the Number of Combinations of which* n *Number of Things is capable:* For in two Things there is but 1 Binary; Add a third, this is to be combined with the former 2; the Binaries therefore in 3 Things are $1+2$: Add a fourth, this is to be combined with the former 3; the Binaries therefore of 4 Things are $1+2+3$: Add a fifth, this is to be combined with the former 4; the Binaries therefore of 5 Things are $1+2+3+4$; and ſo on; that is, putting n for the Number of Things, the Number of Binaries will be the Sum of $n-1$ Laterals, or the $n-1$th Term of the 3d Order of Figurates; that is, (24. 31.) $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$.

In three Things there is but 1 Ternary: Add a fourth, this is to be combined with the 3 Binaries of the former 3; the Ternaries therefore of 4 Things are $1+3$: Add a fifth, this is to be combined with the 6 Binaries of the former 4; the Ternaries therefore of 5 Things are $1+3+6$: Add a ſixth, this is to be combined with the 10 Binaries of the former 5; the Ternaries therefore of 6 Things are

$1+3$

$1 + 3 + 6 + 10$, and so on; that is, putting n for the Number of Things, the Number of Ternaries will be the Sum of $n - 2$ Figurates of the 3d, or the $n - 2$th Figurate of the fourth Order; that is, $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$. After the same Manner, the Number of Quaternaries are $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$; of Quinaries $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}$; and so on continually, still increasing the Number of Combinations by all those of the next inferior Order; because as the Number of Things increases, the last can be combined with all the next inferior Combinations of the former Things: and still lessening the Number of Things by Unity, as the Exponent of the Combination increases.

Of SUBTRACTION.

XXV. *THE Invention of the Difference of Numbers that are not too much compounded, is of itself evident*; as if you take 9 from 17, there will remain 8. *But in more compounded Numbers, Subtraction is performed by subscribing or setting underneath the Subtrahend, and subtracting each of the lower Figures from each of the upper ones.* Thus to subtract 63543 from 782579, having subscribed 63543, say 3 from 9 and there remains 6, which write underneath; and 4 from 7, and there remains 3, which write likewise underneath; then 5 from 5 and there remains nothing, which in like manner set underneath; then 3 comes to be taken from 2; but because 3 is greater than 2, you must borrow 1 from the next Figure 8, which together with 2, make 12, from which 3 may be taken and there will remain 9, which write likewise underneath; and then when besides 6 there is also 1 to be taken from 8, add the 1 to the 6, and the Sum 7 being taken from 8, there will

be left 1, which in like Manner write underneath (*a*). Laſtly, when in the lower Rank of Numbers there remains nothing to be taken from 7, write underneath the 7, and ſo you have the Difference 719036.

782579	
63543	
719036	

But eſpecial Care is to be taken, that the Figures of the Subtrahend be placed or ſubſcribed in their proper or homogeneous Places; viz. the Units of the one under the Units of the other, and the Tens under Tens, and likewiſe the Decimals under the Decimals, *&c.* as we have ſhewn in Addition (*b*). Thus to take the Decimal 0,63 from the Integer 547, they are not to be diſpoſed thus $\begin{matrix}547\\0,63\end{matrix}$, but thus $\begin{matrix}547\\0,63\end{matrix}$; ſo that the 0, which ſupplies the Place of Units in the Decimal, muſt be placed under the Units of the other Number. Then 0 being underſtood to ſtand in the empty Places of the upper Number, ſay, 3 from 0, which ſince it cannot be, 1 ought to be borrowed from the foregoing Place, which will make 10, from which 3 is to be taken, and there remains 7, which write underneath. Then that 1 which was borrowed added to 6 make 7, and this is to be taken from 0 above it; but ſince that cannot be, you muſt again borrow 1 from the foregoing Place to make 10, then 7 from 10 leaves 3, which in like Manner is to be writ under-

---

XXV. (*a*) For it is manifeſt, that by increaſing the Minuend in the right-hand Place by Ten, and the Subtrahend in the left-hand Place by an Unit, that an equal Addition is made to each (3); and that therefore the Reſidue is not changed. The ſame Thing is alſo done, if inſtead of adding the borrowed Unit to the Subtrahend in the left-hand Place, the minuend Figure in the left-hand Place is diminiſhed by an Unit before Subduction, as in reality it is, by the borrowing from it the Ten added to its right-hand Figure.

(*b*) *Quantities of Different Denominations cannot be ſubducted from each other, becauſe the Reſidue could not be of any one certain Denomination.* Their Difference therefore can only be ſhewn by the Sign of the Subducend.

underneath; then that 1 being added to 0, makes 1, which 1 being taken from 7 leaves 6, which again write underneath. Laſtly, write the two Figures 54 (ſince nothing remains to be taken from them) underneath, and you will have the Remainder 546,37 (*c*).

547	
0,63	
546,37	

For Exerciſe ſake, we here ſet down ſome more Examples, both in Integers and Decimals.

1673	1673	458074	35,72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14,32	3,078	25,74
132	93	448869	21,4	43,4223	282,96

XXVI. *If a greater Number is to be taken from a leſs, you muſt firſt ſubtract the leſs from the greater, and then prefix a negative Sign to the Remainder.* As if from 1541 you are to ſubtract 1673, on the contrary, I ſubtract 1541 from 1673, and to the Remainder 132 I prefix the Sign — (*d*).

XXVII. *In Algebraic Terms, Subtraction is performed by connecting the Quantities, after having changed all the Signs of the Subtrahend; and by uniting thoſe together which can be united,* as we have done in Addition (*e*). Thus

+ 7

(*c*) *Numbers whoſe Denominators increaſe in any other Ratio may be ſubducted after the Manner of thoſe in the Decuple, by ſubſtituting the Number by which the Denominators increaſe in the Place of Ten.*

XXVI. (*d*) For this Reſidue thus affected with a negative Sign — 132, being added to the Subducend + 1673, will reſtore the Minuend + 1541.

XXVII. (*e*) *The Sign of the Subducend is always to be changed into its contrary.* For if the Subducend be poſitive and ſimple, it ought to have the Sign of Subduction, that is, its Sign is changed into Negative; and if the Subducend be compounded of an Affirmative and Negative, their Difference only ought to be ſubducted; wherefore, having ſubducted the affirmative Term, too much, by the Quantity of the negative Term, has been ſubducted, and the Reſidue is too ſmall by that Quan-

$+7a$ from $+9a$ leaves $9a-7a$ or $2a$; $-7a$ from $+9a$ leaves $+9a+7a$, or $16a$; $+7a$ from $-9a$ leaves $-9a-7a$, or $-16a$; and $-7a$ from $-9a$ leaves $-9a+7a$, or $-2a$; so $3\frac{a}{c}$ from $5\frac{a}{c}$ leaves $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ from $2\sqrt{ac}$ leaves $-5\sqrt{ac}$ (*f*); $\frac{2}{9}$ from $\frac{5}{9}$ leaves $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ from $\frac{3}{7}$ leaves $\frac{7}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ from $\frac{3ax}{b}$ leaves $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ from $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ leaves $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ from $\frac{bx}{c}$ leaves $\frac{bx-aa}{c}$; $a-b$ from $2a+b$ leaves $2a+b-a+b$, or $a+2b$; $3az-zz+ac$ from $3az$ leaves $3az-3az+zz-ac$ or $zz-ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ from $\frac{aa+bb}{c}$ leaves $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$, or $\frac{-aa+2ab}{c}$; and $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ from $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ leaves $\overline{a+x}-\overline{a+x}\sqrt{ax}$, or $2x\sqrt{ax}$, and so in others. But where Quantities consist

---

tity; therefore, to restore the Residue to its just Magnitude, the negative Term ought to be added to it, that is, the negative Term must become Affirmative.

36. Hence, *the Difference of two Quantities, subducted from their Sum, is equal to double the less*; for the greater is destroyed, and the less doubled in adding them after the Change of their Signs. Thus if a be the greater, and b the less, then their Difference is $a-b$, and their Sum $a+b$; but $\overline{a+b}-\overline{a-b}=2b$. *See* N° 22.

(*f*) *Surds are subducted by subducting their rational Coefficients*, when being reduced to their lowest Terms they agree in their radical Part; for they are then as Number to Number, and their Ratio is that of the Coefficients, by which Coefficients the Subduction can be made.

ſift of more Terms, the Operation may be managed as in Numbers, as in the following Examples (*g*):

12 X

---

37. (*g*) *Four Quantities are in arithmetical Proportion, when the Difference between the two former is equal to the Difference between the two latter. Quantities are ſaid to be in arithmetical Progreſſion, when they increaſe or decreaſe continually by equal Differences.*

38. In arithmetical Progreſſion, *when the Number of Terms is even, the Sum of the Extremes is equal to the Sum of every two mean Terms equidiſtant from them; and when the Number of Terms is odd, the Sum of the Extremes is double the middle Term.* For ſince the Terms are equidifferent (37), the Second will exceed, or be deficient from, the firſt, as much as the laſt exceeds, or is deficient from, the Penultimate; therefore the Sum of the Extremes equals the Sum of the Second and Penultimate, the Exceſs of the one making up the Defect of the other. The ſame Reaſoning holds good in every Pair of Terms equidiſtant from the Extremes; and therefore in thoſe alſo which are adjacent to the middle Term, when their Number is odd. Now one of theſe exceeds the middle Term as much as the other is deficient of it (37); if therefore, the Defect of one be compenſated by the Exceſs of the other, the three Terms will be equal: and conſequently, the Sum of the adjacent Terms, and therefore of every other equidiſtant Pair, will be double the middle Term.

39. *The laſt Term is equal to the firſt, increaſed if the Progreſſion aſcends, but diminiſhed if the Progreſſion deſcends, by the Product of the common Difference multiplied into, either the Number of Terms leſs one, or the Number of Means more one.* For the laſt Term exceeds, or is exceeded, by the firſt, by the common Difference ſo often taken, as there are Terms after the firſt; that is, ſo often as there are Terms leſs one, or Means more one.

40. Hence, *the common Difference is equal to the Difference of the Extremes divided by, either the Number of Terms leſs one, or the Number of Means more one.* Conſequently,

$$\begin{array}{lll} 12x+7a & 15bc+2\sqrt{ac} & 5x^3+\frac{1}{2}x \\ 7x+9a & -11bc+7\sqrt{ac} & 6x^2-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x-2a & 26bc-5\sqrt{ac} & 5x^3-6xx+\frac{1}{7}x. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

MUL-

---

the Extremes being given, any Number of Means may be found: For by dividing their Difference by the Number of Means ſought more one, the common Difference is found, and this continually added to the leſs Extreme exhibits the Means.

41. *The Sum of any Series is equal to the Quote, which is had by dividing the Product of the Sum of the Extremes into the Number of Terms, by Two.* For the Sum of the Series contains the equal Sums of the Pairs of equidiſtant Terms only half ſo many Times as there are Terms (38).

42. *In the Progreſſion of Laterals, or Figurates of the ſecond Order, the Sum of any Series is equal to half the Product ariſing from multiplying the laſt Term into the next greater.* For both firſt Term and common Difference being Unity, the laſt Term is the Number of Terms, and the next greater is the Sum of the Extremes. *See* N° 25, 26.

43. *In the Progreſſion of odd Laterals, whoſe common Difference is Two, the Sum of the Series is always a ſquare Number; to wit, the Square of the Number of Terms.* For Unity being the firſt Term, and Two the common Difference, the Sum of the Extremes is double the Number of Terms; whence their Product would be the Product of the Number of Terms into double itſelf; conſequently, half this Product, which is the Sum of the Series (41), is the Product of the Number of Terms into itſelf, and therefore a Square.

2

44. *If*

44. *If a given Quantity is added to, or ſubducted from, every Term of an arithmetical Progreſſion, the Progreſſion will continue unaltered, with the ſame common Difference.* For an equal Addition, or Subduction, although it alters the Magnitude of the Terms, will not alter their Relation to Difference.

45. *If the ſame Quantity be multiplied into every Term of an arithmetical Series, the Products will be in arithmetical Progreſſion; and the common Difference of the Terms will be the Product of the given Quantity into the former common Difference.* For as each Term conſiſted of the preceding Term and of the common Difference, any given Multiple of any Term muſt be the ſame Multiple of the preceding Term and of the common Difference; therefore the common Difference of the Products will be that Multiple of the former common Difference. After the ſame Manner, if the Terms of an arithmetical Series be divided by a given Quantity, the Quotes will be in arithmetical Progreſſion, whoſe common Difference will be the Quote of the former Difference divided by that Quantity.

46. *If in the Binome* $nx \pm a$ *the Terms* 3, 2, 1, 0, — 1 — 2 — 3, &c. viz. *of the deſcending lateral Progreſſion, be ſubſtituted for the unknown Quantity* x: *the reſulting Numbers will be in arithmetical Progreſſion, whoſe common Difference will be* n, *the Coefficient of* x *in the former Member of the Binome.* For the Products ariſing, from the ſucceſſive Subſtitution of the Laterals for x, that is, from the ſucceſſive Multiplication of n into the Laterals, will be be in a Progreſſion, whoſe common Difference is $n \times 1$ (45); that is, n; and the ſecond Member $\pm a$ of the Binome cannot alter the Progreſſion (44).

Of MULTIPLICATION.

XXVIII. *NUMBERS which ariſe or are produced by the Multiplication of any two Numbers, not greater than* 9, *are to be learnt and retained in the Memory:* As that 5 into 7 makes 35, and that 8 by 9 make 72, &c. and *then the Multiplication of greater Numbers is to be performed after the Rule of theſe Examples.*

If 795 is to be multiplied by 4, write 4 underneath, as you ſee here. Then ſay, 4 into 5 makes 20, whoſe laſt Figure, *viz.* 0, ſet under the 4, and reſerve the former 2 for the next Operation. Say moreover, 4 into 9 makes 36, to which add the former 2, and there is made 38, whoſe latter Figure 8 write underneath as before, and reſerve the former 3. Laſtly, ſay, 4 into 7 makes 28, to which add the former 3, and there is made 31, which being alſo ſet underneath, you will have the Number 3180, which comes out by multiplying the whole 795 by 4.

795
4
3180

Moreover, if 9043 be to be multiplied by 2305, write either of them, *viz.* 2305 under the other 9043 as before, and multiply the upper 9043 firſt by 5, after the Mannner ſhewn, and there will come out 45215; then by 0, and there will come out 0000: Thirdly, by 3, and there will come out 27129: Laſtly, by 2, and there will come out 18086. Then *diſpoſe theſe Numbers ſo coming out in a deſcending Series, or under one another, ſo that the laſt Figure of every lower Row ſhall ſtand one Place nearer to the Left-hand than the laſt of the next ſuperior Row. Then add all theſe together, and there will ariſe* 20844115, *the Number that is made by multiplying the whole* 9043 *by the whole* 2305.

9043
2305
45215
0000
27129
18086
20844115

XXIX. *In the ſame manner Decimals are multiplied by Integers or other Decimals, or both,* as you may ſee in the following Examples:

72,4	50,18	3,0925
29	2,75	0,0132
6516	25060	78050
1448	35126	117075
2099,6	10036	39025
	137,9950	0,05151300

But Note, in the Number coming out, or the Product, ſo many Figures muſt be cut off to the Right-hand for Decimals, as there are decimal Figures both in the Multiplier and the Multi-

Multiplicand. And if by Chance there are not ſo many Figures in the Product, the deficient Places muſt be filled up to the Left-hand with 0's, as here in the third Example *(a)*.

XXIX. *(a)* 47. *In the Multiplication of Integers, of Decimals, and of mixed Numbers, the Sum of the Indices of the Factors is the local Index of the right-hand Figure of the Product.* For the Index of each Factor being the Number of Multiplications, or of Diviſions of Unity by Ten, in its Denominator (13, 14); to multiply, or to divide the Denominator of the Multiplicand by Ten, is to add Unity to, or to take Unity from, its Index; and to multiply, or to divide the Denominator of the Multiplicand by any other Number as a Denominator, is to add the Index of the Multiplier to, or to ſubduct it from, the Index of the Multiplicand: But in the Multiplication of Integers by Integers, and of Decimals by Decimals, the Denominator of the Multiplicand is multiplied by the Denominator of the Multiplier; and in the Multiplication of Integers by Decimals, the Denominator of the former is divided by the Denominator of latter: Therefore in the former Caſe, the Sum of the Exponents is the Exponent of the Product; and in the latter Caſe, their Difference. Now the Index of a decimal Multiplier being Negative (14) it muſt be changed in Subduction into Affirmative, and added (XXVII); therefore, in all Caſes, the Sum of the Exponents of the Factors, when made both of the ſame Affection, is the Exponent of the Product.

48. *Decimals are conſidered in Multiplication as Integers*, the only Difference being that in the former the Numerators are divided, and in the latter multiplied, by that Power of Ten, whoſe Index is the Number of Places from Unity (6. 9. 13); wherefore *the Numerators are to be multiplied as Integers: and as to the Multiplication of the Denominators, in all Products, of Decimals by Decimals, or by mixed Numbers, ſo many Places are to be allotted on the Right-hand for Decimals, as there are decimal Places in both Factors taken together.* For the Index of the right-hand Figure in Decimals, is always their whole Number of Places (13); and the Exponent of the right-hand Figure

XXX. *Simple Algebraic Terms are multiplied by multiplying*

Figure of an Integer Factor, is always Cypher (14): Therefore the Index of the right-hand Figure of the Product, to wit, the Sum of the Indices of the right-hand Figures in both Factors (47); that is to say, the Number of decimal Places in the Product, is the Sum of the decimal Places in both Factors.

49. Hence, *if the Number of Places in the Product is less than the Number of Decimals in both Factors, which will be the Case when the Cyphers on the Left-hand of a pure decimal Multiplier are neglected in the Operation, the Defect must be supplied by Cyphers added on the Left-hand.*

50. *The Right-hand Figure of every particular Product ought to be set directly under the multiplying Figure, and then the Place of every succeeding Figure will follow in Order.* For the Index of the right-hand Figure of the Multiplicand, is either Cypher (14) or is considered as such during the Operation (48); consequently the Index of the right-hand Figure of each particular Product will be the Index of the multiplying Figure (47, 48). The particular Products, being thus ranged, will have their Figures of the same Class in the same perpendicular Series ready for Addition (XVIII).

51. *If there are Cyphers between the significant Figures of the Multiplier, they may be entirely neglected,* for their sole Use being to determine the Places of the significant Figures to the Left (18); this End will be answered by placing the right-hand Figure of each particular Product by the significant Figures directly under the Multiplier (50).

52. *Cyphers on the Right-Hand of either Factor are neglected in the Operation. In Decimals they are to be totally expunged, as being useless (18), but they are to be restored to the Product of Integers;* because they serve to determine the Place of the Right-hand significant Figure of the Product, whose Exponent being always the Sum of the Indices of the right-hand Figures of both Factors (47); will be in this Case the Number of Cyphers.

53. Hence, *an Integer is multiplied by any Power of Ten, by annexing the Cyphers of the Power to the Integer* (52).

But

plying the Numbers into the Numbers, and the Species into the Species,

But *a Decimal or mixed Number is multiplied by any Power of Ten, by moving the Seperatrix ſo many Places to the Right-hand, as there are Cyphers in the Power, or as there are Units in the Exponent of the Power.* For the Multiplication is performed at length by annexing the Cyphers of the Power of Ten on the Right-hand of the Multiplicand, and then cutting off ſo many Places for Decimals, as there were Places before in the Multiplicand (48), and laſtly, by expunging the added Cyphers, being uſeleſs in Decimals (18); but this is equivalent to giving ſo many Places from the Decimals to the Integers, or, to moving the Seperatrix ſo many Places to the Right, as there are Units in the Index of the Power of Ten; and the Trouble of expunging is avoided.

Now, though the Number of Places in the Decimals is diminiſhed, yet their Value is ſo many times more Decuple of their former, by being raiſed ſo many Places higher to the Left (11); and the negative Exponent of the right-hand Figure of the Decimal Factor being diminiſhed by the Addition of the affirmative Index of the Power (XXIV), is the Index of the right-hand Figure of the Product, which being negatively leſs, is affirmatively greater (47).

From this, *the common Rule for reducing Decimals into Sexageſimals*, is deduced, to wit, Multiply the Decimals by ſixty; becauſe this Multiplication not only multiplies by Six, but alſo moves the Seperatrix one Place to the Right.

54. *If the Product of the left-hand Figures of two Integers, either alone or augmented by an Increment from the Product of the adjacent Figures, conſiſts of two Places; or if the left-hand Figure of this Product is leſs than the left-hand Figure of either Factor, then the whole Product will conſiſt of as many Places as there are Places in both Factors, otherwiſe of one Place leſs.* For the Exponent of the left-hand Figure in each Factor being the Number of Places in each leſs One (13), the Exponent of the right-hand Figure of their Product will be the Number of Places in both Factors leſs Two (48); to which muſt be added the Place of Units, whoſe Exponent is Cypher in each Factor; whence

Species, and by making the Product Affirmative, if the Factors

whence the Exponent of the Product of the left-hand Figures, when this Product is a ſingle Figure, is the Number of Places in both Factors leſs One; and when it conſiſts of two Figures, the Exponent of the left-hand Figure is the Sum of the Places in both Factors: Now when this Product is a ſingle Figure, it muſt be greater than either Factor; and when it conſiſts of two Figures, the Figure to the Left muſt be leſs than either Factor; wherefore the Number of Places will fall One ſhort, when it is greater than either Factor.

55. *Becauſe it may be ſufficient, eſpecially in Decimals, to find only an aſſigned Part of a Product.* 1. *Set the Place of Units of the leſs Number (which make the Multiplier) under that Place of the greater whoſe Index is equal to the Index of the deſigned right-hand Figure of the aſſigned Part of the Product; that is, to the Number of Figures to be cut off in Integers, or to be retained in Decimals.* 2. *Set the Reſt of the Figures of the Multiplier in a contrary Order.* 3. *Begin every Multiplication, at that Figure of the greater, which ſtands over the multiplying Figure; having Regard to the Increment, which would have ariſen from the foregoing Figures of the Multiplicand. Laſtly, Set the right-hand Figures of every particular Product under one another; and then the Sum of theſe particular Products, will be the required Part of the Product.* For the Index of the right-hand Figure of every Product, is the Sum of the Indices of the Factors; and by inverting the Order of the Figures of the Multiplier, the Sums of the Indices of the correſponding Place of the Factors will be equal among themſelves; and therefore equal to the Index of the right-hand Figure of the required Part of the Product: But Products whoſe Indices are equal belong to the ſame Place; they, therefore, muſt be ſet under each other: And their Sum muſt be the required Part of the Product.

56. *In every Multiplication, whether by Figures or by Species, every Part of the Multiplicand muſt be multiplied by every Part of the Multiplier.* For if Equals be multiplied into Equals, the Products are equal (Eucl. I. Def. 6.); but every whole is equal to all its Parts taken together (Eucl. I. Def.

Factors are both Affirmative, or both Negative; and Negative if otherwiſe (b).

Thus

Def. 9); therefore the Product ariſing from multiplying the Whole by the Whole is equal to the Product ariſing from the Multiplication of all the Parts of one by all the Parts of the other Factor.

XXX. *(b)* 57. *When the Sign of the Multiplier is Affirmative* (+), *the Signs of the Product are the ſame with thoſe of the Multiplicand.* For the Multiplicand is then ſo often added to itſelf as there are Units in the Multiplier (VI); if therefore all the Signs of the Multiplicand are Affirmative, the Sum of its Terms is ſo often added to itſelf, by preſerving the Signs of the Multiplicand (XX); and if any of its Terms are Negative, their Differences are ſo often added to themſelves, by preſerving the Signs of the Multiplicand (XXIII). Now *the Signs of the Multiplicand being to be preſerved, when the Multiplier is Affirmative; it follows, that* + *into* + *makes* +: *and that* — *into* + *makes* —.

58. *When the Sign of the Multiplier is Negative* (—), *the Signs of the Product are contrary to thoſe of the Multiplicand.* For a negative Term in the Multiplier ſhews that it is the Difference between two Quantities by which the Multiplicand is to be added to itſelf (XXIV); that therefore, having made the Product by an affirmative Term in the Multiplier, this Product is too great, and is to be diminiſhed by the Product of the ſame Multiplicand by this negative Term of the Multiplier; that is, that the latter Product is to be ſubducted from the former; and that therefore this latter Product muſt have its Sign changed (XXVII); but the Sign of this latter Product when produced by an affirmative Multiplier was the ſame with that of the Multiplicand (57); therefore, when changed, it muſt be contrary. Now *the Signs of the Multiplicand being to be changed in the Product by a negative Multiplier, it follows, that* + *into* — *makes* —; *and that* — *into* — *makes* +.

59. Becauſe, that + into + makes + (57): and that — into — makes alſo + (58): and becauſe — into

Thus $2a$ into $3b$, or $-2a$ into $-3b$ make $6ab$; or $6ba$: For it is no Matter in what Order they are placed *. Thus alſo $2a$ by $-3b$, or $-2a$ by $3b$ make $-6ab$. And thus, $2ac$ into $8bcc$ make $16abccc$, or $16abc^3$; and $7axx$ into $-12aaxx$ make $-84a^3x^4$; and $-16cy$ into $31ay^2$ make $-496acy^3$; and $-4z$ into $-3\sqrt{az}$ make $12z\sqrt{az}$. And ſo 3 into -4 make -12, and -3 into -4 make 12.

XXXI. *Fractions are multiplied, by multiplying their Numerators by their Numerators, and their Denominators by their Denominators.* Thus $\frac{2}{5}$ into $\frac{3}{7}$ make $\frac{6}{35}$; and $\frac{a}{b}$ into $\frac{c}{d}$ make $\frac{ac}{bd}$; and $2\frac{a}{b}$ into $3\frac{c}{d}$ make $6\times\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$, or $6\frac{ac}{bd}$; and $\frac{3acy}{2bb}$ into $\frac{-7cyy}{4b^3}$ make $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; and $\frac{-4z}{c}$ into $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$ make $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$; and $\frac{a}{b}x$ into $\frac{c}{d}xx$ make $\frac{ac}{bd}x^3$. Alſo 3 into $\frac{2}{5}$ make $\frac{6}{5}$ as may appear, if 3 be reduced to the Form of a Fraction, *viz.* $\frac{3}{1}$ by making uſe of Unity for the Denominator. And thus $\frac{15aaz}{cc}$ into $2a$ make $\frac{20a^3z}{cc}$. Whence note by the Way, that $\frac{ab}{c}$ and $\frac{a}{c}b$ are the ſame; as alſo $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$, and $\frac{a}{c}bx$, alſo $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{c}$ and $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$; and ſo in others (*d*).

XXII. *Ra-*

---

into $+$ makes $-$ (57): and, that $+$ into $-$ makes alſo $-$ (58): *It follows univerſally, that ſimilar Signs in the Factors make an affirmative Sign; and that diſſimilar Signs in the Factors make a negative Sign in the Product.*

* *See* N° 20.

XXXI. (*d*) 60. *Fractions, whoſe Numerators are equal, are to each other inverſely as their Denominators.* For any equal

XXXII. *Radical Quantities of the same Denomination* (that is, if they are both Square Roots, or both Cube Roots, or both Biquadratic Roots, *&c.*) *are multiplied by multiplying*

---

equal Number of Parts must be to each other as the Magnitudes of those Parts; but the Magnitudes are inversely as the Denominators. (Eucl. VII. 19.)

61. *Fractions, whose Denominators are equal, are to each other as their Numerators.* For Parts whose Magnitude is the same must be to each other as their Number.

62. Therefore, *universally, Fractions are to each other as their Numerators directly, and as their Denominators inversely.*

63. As Unity is to the Multiplier, so is the Multiplicand to the Product (19); but as Unity is to a Fraction, so is its Denominator to its Numerator (XXI); therefore, as the Denominator of the multiplying Fraction is to its Numerator, so is the Multiplicand, whether Integer or Fraction, to the Product; and consequently *in all Cases of Multiplication by a Fraction, the Multiplicand is to be multiplied by its Numerator, and divided by its Denominator* (Eucl. VI. 12.) as before in the Multiplication of Decimals (48).

64. *A Fraction is multiplied by an Integer by multiplying the Integer into the Numerator, and by subscribing the Denominator under the Product* (XI); *or by dividing the Denominator by the Integer, and by subscribing the Quote under the Numerator* (XI). For it is the same Thing to increase a given Number of Parts in a given Ratio, the Magnitude of the Parts being unchanged, as to increase the Magnitude of the Parts in that Ratio, their Number being unchanged; and their Magnitude is always increased in any Ratio, by diminishing the Divisor or Denominator in that Ratio (60): But by multiplying the Integer into the Numerator, their Number is increased in the Ratio of the Integer to Unity, their Magnitude being the same (VI); and by dividing the Denominator by it, the Magnitude of the Parts is increased in the same Ratio, their Number being unchanged.

65. *The Product of two Fractions is found* [there being always a Multiplication of both Numerators and Denominators

tiplying the Terms together under the same radical Sign. Thus $\sqrt{3}$ into $\sqrt{5}$ make $\sqrt{15}$; and $\sqrt{ab}$ into $\sqrt{cd}$ make $\sqrt{abcd}$; and $\sqrt[3]{5ayy}$ into $\sqrt[3]{7ayz}$ make $\sqrt[3]{35aay^3z}$; and $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ into $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ make $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ that is * $\frac{aab}{c}$. And $2a\sqrt{az}$ into $3b\sqrt{az}$ make $6ab\sqrt{aazz}$, that is $6aabz$;

---

minators (47), but that by the Denominators being equivalent to a Diviſion (64. 63)] Firſt, *By multiplying the Numerators, for a new Numerator; and the Denominators, for a new Denominator.* For thus the Multiplicand is multiplied by the Numerator of the Multiplier, and divided by its Denominator, becauſe the Product of the Denominators is ſubſcribed (XI).

66. Secondly, *By dividing the Numerator and Denominator of the Multiplicand reſpectively, by the Numerator and Denominator of the Reciprocal of the Multiplier.* For thus the Multiplicand is multiplied by the Numerator of the Multiplier, becauſe its Denominator is divided by it (64); and it is divided by the Denominator of the Multiplier. *See* N° 145.

67. Thirdly, *By dividing the Product of the Denominators by the Numerator of the Multiplier, and ſubſcribing this Quote to the Numerator of the Multiplicand.* For thus the Multiplicand is multiplied into the Numerator of the Multiplier; becauſe its Denominator (in the Product of both Denominators) is divided by it; and it is divided by the Denominator of the Multiplier, becauſe the Product of both Denominators (reduced by the foregoing Diviſion) is ſubſcribed to its Numerator.

68. Laſtly, *By dividing the Product of the Numerators by the Denominator of the Multiplier, and ſubſcribing the Denominator of the Multiplicand to the Quote.* For thus the Multiplicand is multiplied into the Numerator of the Multiplier, and divided by its Denominator, becauſe the Product of the Numerators is divided by it.

Note, that *the firſt Method is the beſt*, being not liable to compound Fractions.

* *See the Chapter of* Notation.

$6aab\dot{x}$; and $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ into $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ make $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$, that is $\frac{-6x^3}{ac}$; and $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ into $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ make $\frac{12ddx\sqrt{5abtx}}{70aee}$ (e).

XXXIII. *Quan-*

XXXII. (e) *Powers and Radicals* are either of the same Quantity, or of different Quantities: and they are either of the same, or of different Exponents, or Denominations. In all Cases *they must be brought to the same Exponent before they can be multiplied or divided*; otherwise the Product or Quote could have no certain Exponent.

69. *The Product of Powers and of Radicals of the same Exponent, but of different Quantities, has the same Exponent with the Factors:* so that the Product of such Powers is the same Power of the Product of their Roots: and the Product of such Roots is the same Root of their Product. Thus $a^{\overline{m}} \times b^{\overline{m}} = a^{\overline{m}}b^{\overline{m}} = ab^{\overline{m}} = \overline{ab}^{\overline{m}}$.

As to the Multiplication and Involution of Powers and Radicals of the same Quantity; it will be necessary to attend more distinctly to their Generation, and also to some Properties of geometrical Progression.

70. *Four Quantities are in geometrical* Proportion *when the Ratio of the First to the Second is equal to the Ratio of the Third to the Fourth*; and *Quantities are in geometrical* Progression, *when they increase, or decrease, by equal Ratios:* and consequently, the Terms increase by a common Multiplier, if the Progression ascends; and decrease by a common Divisor, if the Progression descends.

71. In a geometrical Progression, *when the Number of Terms is even, the Product of the Extremes is equal to the Product of every two mean Terms equidistant from them; and when the Number of Terms is odd, it is equal to the Square of the middle Term.* For the Ratio of the first to the second Term being equal to the Ratio of the Penultimate to the last, these four Terms will be proportional (70); and therefore the Product of the Extremes is equal to the

XXXIII. *Quantities that conſiſt of ſeveral Parts, are multiplied*

Product of the ſecond and penultimate (Eucl. VII. 19). The ſame Reaſoning holds good in every Pair of Terms equidiſtant from the Extremes; and therefore in thoſe alſo which are adjacent to the middle Term, when their Number is odd: But the Square of the Middle is equal to the Product of the adjacent Terms (Eucl. VII. 20); and therefore to that of every Pair of Terms equidiſtant from it.

72. *The laſt Term is equal to the Product (if the Progreſſion aſcends) and to the Quote (if the Progreſſion deſcends) which ariſes, by multiplying in the former Caſe, and by dividing in the latter Caſe, the firſt Term by that Power of the common Ratio, whoſe Exponent is the Number of Terms leſs One, or the Number of Means more One.* For it exceeds the firſt Term, or is exceeded by it, by the common Ratio ſo often multiplied into itſelf, as there are Terms after the Firſt; that is, as there are Terms leſs One, or Means more One.

73. Hence, *the common Ratio is equal to that Root of the Quote of the Extremes, whoſe Exponent is either the Number of Terms leſs One, or the Number of Means more One:* Whence *the Extremes being given, any Number of mean Proportionals will be found.* For by extracting from the Quote of the Extremes, the Root, whoſe Index is the Number of Means ſought more One, the common Ratio is found; and thence any Number of Means.

74. *If two deſcending Progreſſions, conſiſting of three Terms each, have the middle Term the ſame; according as the firſt Term of the former is greater or leſs than the firſt Term of the latter, ſo the laſt Term of the latter ſhall be greater or leſs reſpectively, than the laſt Term of the former.* For the Products of the Extremes in each being equal to the ſame Square, ſhall be equal to each other: and therefore the Extremes ſhall be reciprocally proportional (Eucl. VII. 19).

75. *The ſame Progreſſions being ſuppoſed, the Difference of the firſt Terms ſhall be greater than the Difference of the laſt.* For in the reciprocal Proportion in N° 74, as Antecedent

tiplied by multiplying all the Parts of the one into all the Parts of

---

tecedent is to Conſequent, ſo is the Difference of the Antecedents to the Difference of the Conſequents (Eucl. V. 19); but the Antecedent being greater than the middle Term, is greater than the Conſequent; wherefore the Difference of the Antecedents is greater than the Difference of the Conſequents.

76. *Unity, the Root, the Square, the Cube,* &c. *of the ſame Quantity are in geometrical Progreſſion* (XV): But each Term of this Progreſſion conſiſts of the Number of Factors in the laſt antecedent Term, and of One more; therefore *the Exponents of theſe Terms, which indicate the Number of Factors in each* (XIV), *differ by Unity, are equidifferent, and in arithmetical Progreſſion* (37). Now the Square, Cube, &c. are produced by the continued Multiplication of Unity into the Root; wherefore putting Cypher, *the Exponent* of Unity; then Unity muſt be the Exponent of the Root, and 2, 3, &c. the Exponents of the Square, Cube, &c. reſpectively; that is, *the aſcending Laterals will be the Indices of the Powers aſcending.* Now the Powers below Unity are the Reciprocals of thoſe above Unity, and conſequently are Unity divided by thoſe Powers; their Denominators will therefore have the ſame Exponents as their Reciprocals; that is, the ſame Laterals: But *the Value of any Quantity in the Denominator of a Fraction being the Reciprocal of it in the Numerator, it may be tranſpoſed above the Line if the Sign of its Exponent be changed*; conſequently *the Powers of any Quantity below Unity may be expreſſed as Integers, with the negative Laterals for their Exponents.* Thus the Series

$\frac{1}{x^5}, \frac{1}{x^4}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$, may be expreſſed by $x^{-5}, x^{-4}, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$.

77. *If between the Terms of any geometrical Series any Number of mean Proportionals be found* (73), *and alſo the ſame Number of arithmetical Means be found between the Exponents of thoſe Terms* (40); *the arithmetical Means ſhall be Exponents reſpectively of the geometrical Means.* Thus, if two mean Proportionals be found between the

of the other, as is shewn in the Multiplication of Numbers.

Terms of the above Series, and interpolated, it will be

$$x^{\frac{-5}{1}},\ x^{\frac{-14}{3}},\ x^{\frac{-13}{3}},\ x^{-4},\ x^{\frac{-11}{3}},\ x^{\frac{-10}{3}},\ x^{-3},\ x^{\frac{-8}{3}},\ x^{\frac{-7}{3}},\ x^{-2},\ x^{\frac{-5}{3}},$$
$$x^{\frac{-4}{3}},\ x^{-1},\ x^{\frac{-2}{3}},\ x^{\frac{-1}{3}},\ 1,\ x^{\frac{1}{3}},\ x^{\frac{2}{3}},\ x,\ x^{\frac{4}{3}},\ x^{\frac{5}{3}},\ x^{2},\ x^{\frac{7}{3}},\ x^{\frac{8}{3}},$$
$$x^{\frac{10}{3}},\ x^{\frac{11}{3}},\ x^{3},\ x^{\frac{13}{3}},\ x^{\frac{14}{3}},\ x^{5},\ \&c.$$

78. *Surds therefore are mean Proportionals*, (XV) *or Powers with fractional Exponents, whether Affirmative or Negative, whose Numerators denote the Power to which the Quantity is raised, and whose Denominators denote the Root to be extracted from that Power.* Wherefore they may be expressed either fractionwise, or by the Note of Irrationality with integer Exponents. Thus the last Series may be expressed by the Vinculum, or Note of Irrationality, $x^{\frac{-5}{1}}$, $\sqrt[3]{x^{-14}}$, $\sqrt[3]{x^{-13}}$, x^{-4}, $\sqrt[3]{x^{-11}}$, $\sqrt[3]{x^{-10}}$, x^{-3}, $\sqrt[3]{x^{-8}}$, $\sqrt[3]{x^{-7}}$, x^{-2}, $\sqrt[3]{x^{-5}}$, $\sqrt[3]{x^{-4}}$, x^{-1}, $\sqrt[3]{x^{-2}}$, $\sqrt[3]{x^{-1}}$, 1, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^{2}}$, x, $\sqrt[3]{x^{4}}$, $\sqrt[3]{x^{5}}$, x^{2}, $\sqrt[3]{x^{7}}$, $\sqrt[3]{x^{8}}$, x^{3}, $\sqrt[3]{x^{10}}$, $\sqrt[3]{x^{11}}$, x^{4}, $\sqrt[3]{x^{13}}$, $\sqrt[3]{x^{14}}$, x^{5}, &c.

79. *The Product of Powers or Radicals of the same Quantity is found by adding their Exponents*; but their fractional Exponents must be reduced to the same Denominator, before they can be added. For as the Ratios of those Terms to Unity make, if added together, the Ratio of the Product to Unity, so the Exponents of those Ratios added together, make the Exponent of the compound Ratio.

80. Whence, *if the Sum of the Exponents is nothing, the Product of the Radicals is Unity; and if when they are fractional their Sum is an Integer, the Product of the Radicals is rational.*

81. *Powers and Radicals of the same Quantity are divided by subducting their Exponents.* For the Ratio of the Quote to Unity is the Excess of the Ratio of the Dividend to Unity above the Ratio of the Divisor to Unity, therefore

bers. Thus, $c-x$ into a make $ac-ax$, and $a+a$ $aa+$

therefore the Exponent of the Ratio of the Quote to Unity will be the Exceſs of the Exponent of the Ratio of the Dividend to Unity, above the Exponent of the Ratio of the Diviſor to Unity.

82. Hence *if the Difference of the Exponents is* 0, *or an Integer*; *the Quote will be Unity, or Rational, reſpectively.*

83. *Powers and Radicals of the ſame Quantity are involved by multiplying their Exponents by the Exponent of the Power required.* For as the Ratio of the Power or Radical to be involved to Unity, multiplied into itſelf ſo often as there are Units in the Exponent of the Power required, makes the Ratio of the Power required to Unity; ſo the Exponent of the Ratio of the Power or Radical to be involved to Unity, ſo often added to itſelf as there are Units in the Exponent of the Power required, (that is, multiplied by it) will give the Exponent of the Ratio of the Power required to Unity.

84. Hence, *if the Exponent of the Power required is equal to, or a Multiple of, the Denominator or Name of the Surd, the Product of the Exponents being an Integer, the Power of the Surd will become rational.*

85. *Powers and Radicals of the ſame Quantity are evolved by dividing their Exponents by the Name, or Exponent of the Root required.* For the Ratio of the Root to Unity is that ſubmultiple of the Ratio of the Power to be evolved to Unity, which the Index of the Root denotes: Conſequently, the Index of the Power to be evolved, divided by the Index of the Root required, gives the Index of the Ratio of the Root to Unity.

86. Hence, *if the Name of the Root required is a Diviſor of the Exponent of the Quantity to be evolved, the Quote being Integer the Root will be rational*, that is, a lower perfect Power in the ſame Series, but *if it be not a Diviſor, the Quote being fractional, the Root will be a Surd*, or mean Proportional between ſome perfect Powers in the Series.

87. *The Product of an odd Number of negative Factors is negative: and the Product of an even Number of negative Factors is Affirmative.* For the negative Sign of the

$+2ac-bc$ into $a-b$ make $a3+2aac-aab-3bac$

Multiplicand is changed into Affirmative in the firſt Multiplication (58), and the affirmative Sign of the firſt Product is changed into Negative in the ſecond Multiplication, and ſo on; that is, the Product is poſitive and negative, as the Number of negative Factors is even and odd.

88. *The Powers of a negative Quantity, whoſe Exponents are odd, are Negative; and thoſe whoſe Exponents are even, are Affirmative.* For the Exponent being odd, the Number of Factors is odd (XIV), and the Power negative (87); and the Exponent being even, the Number of Factors is even, and the Power Affirmative. Conſequently, *the Powers of a negative Quantity beginning with the Square, are alternately Affirmative and Negative.* Hence

89. *A negative Square, or any negative Power whoſe Exponent is even, is an impoſſible Quantity; and therefore its Root is imaginary: but a negative Power whoſe Index is odd is poſſible, and its Root real* (88).

90. *The Powers of a quadratic Radical, whoſe Exponents are even, are rational* (84), *and Affirmative, whether the Radical be Affirmative, or Negative* (88); *but the Powers, whoſe Exponents are odd, are Irrational; and Affirmative if the Radical is Affirmative, but Negative if it is Negative* (88).

91. *If an imaginary Radical* (89) *be ſuppoſed to be involved, the Powers whoſe Exponents are even are all rational* (84); *and Negative and Affirmative alternately: and the Powers whoſe Exponents are odd, are all Irrational; but Affirmative and Negative alternately.* For the Root being imaginary, the Square muſt be Negative; otherwiſe, a real Product would ariſe from imaginary Factors, which is abſurd; and if the Root has any Coefficient, whether Affirmative or Negative, its Square will be Affirmative (88); and conſequently the Product of thoſe Squares will be Negative (58); Now the Square being Negative, the Biquadrate will be Affirmative (88); and the Square being Negative and the Biquadrate Affirmative, the Cubocube will be Negative (88). And ſo on, alternately, Negative and Affirmative. Again, the Square and the Root being both Negative, the Cube will be Affirmative

(88);

$3bac + bbc$. (*f*) For $aa + 2ac - bc$ into $-b$ make $-aab - 2acb + bbc$, and into a make $a^3 + 2aac - abc$, (*g*) the Sum whereof is $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$. A Specimen of this Sort of Multiplication, together with other like Examples, you have underneath (*b*):

$$\begin{array}{r} aa + 2ac - bc \\ \hline a - b \\ \hline -aab - 2abc + bbc \\ a^3 + 2aac - abc \\ \hline a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc \text{ (i)} \end{array}$$

$a + b$

(88); and the Root being Negative and the Cube Affirmative, the Quadratocube will be Negative: And so on, Affirmative and Negative alternately. Thus $-1\sqrt{-a^2} \times -1\sqrt{-a^2} = 1 \times -a^2 = -a^2$; and $-1\sqrt{-a^2} \times -a^2 = a^2\sqrt{-a^2}$; and $-1\sqrt{-a^2} \times a^2\sqrt{-a^2} = -a^2 \times -a^2 = a^4$; and $-1\sqrt{-a^2} \times a^4 = -a^4\sqrt{-a^2}$; and $-1\sqrt{-a^2} \times -a^4\sqrt{-a^2} = a^4 \times -a^2 = -a^6$, &c.

92. *If an affirmative Square is supposed to have an imaginary Root, or a negative Square any Root, they must each have two Roots, whose Coefficients have contrary Signs.* For if the Roots of the former were both Negative, the Square would have been Negative (91): And if those of the latter were both Affirmative, the Square would have been Affirmative (88): But supposing the Signs of the Roots to be contrary, in each Case the Product of the Coefficients with contrary Signs will be Negative; therefore the whole Product in the former Case will be Affirmative, and in the latter, Negative. Thus $-1\sqrt{-a^2} \times 1\sqrt{-a^2} = -1 \times -a^2 = a^2$: And $-1\sqrt{a^2} \times 1\sqrt{a^2} = -1 \times a^2 = -a^2$.

XXXIII. (*f*) See Number 56. (*g*) See Numb. 58.

93. (*b*) Because every Term of one Factor is multiplied into every Term of the other, *the Number of Terms in the Product, before the similar Terms are united, will be the Product of the Number of Terms in each*; and *if the Terms in each Factor are of the same Dimensions, that is, homogeneous, the Terms also of the Product will be homogeneous.*

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+ab \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

$a+b$

(*i*) The Learner ought to conſider attentively the Multiplication of Binomes; and the Generation of Powers by the Involution of any Binomial, or Reſidual Root.

94. *If* n *Number of Binomes be multiplied into each other, and the Terms of the Product be ranged, and aggregated together, according to the Number of the firſt Members combined in each; then the Number of firſt Members combined in each Term will be, from firſt to laſt Term, in arithmetical Progreſſion, whoſe common Difference is Unity, deſcending from* n; *viz.* n, n—1, n—2, &c. n—n=0; *and the Number of ſecond Members will be in the ſame Progreſſion, aſcending from* 0 *to* n; *and the Number of the ſame Combinations in the Aggregates will be* 1, n, $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$, &c. *continued to* n *Terms; and the whole Number of Terms will be* n+1. For let the two Binomes $A+a$ and $B+b$ be multiplied the one into the other; it is manifeſt that $A+a$ into B, makes $AB+aB$; and into *b*, makes $bA+ab$: theſe being ranged, and aggregated according to the Number of firſt Members, will be $AB+aB$

$+bA+ab$; in which the Number of firſt Members combined in the Terms is 2, 1, 0; that is, n, $n-1$, $n-n$, $=0$: but the Terms muſt be homogeneous, becauſe the Binomes are homogeneous (93.); therefore the Number of ſecond Members combined are 0, 1, 2. Alſo the ſecond Term of the firſt Series is a ſimilar Combination with the firſt of the ſecond Series, they are therefore to be aggregated, and their Number is 2, or n; to wit, the Number of Times which two Things can be taken ſingly (35); and as there are no other ſimilar Combinations, there muſt be three Terms, viz.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-bb \\ aa+ab \\ \hline aa \quad *-bb \end{array}$$

yy +

viz. $n+1$. Now let this Product be multiplied into $C+c$; it is plain that the Series of Terms from the Multiplication by C will be $ABC+aBC$
$+bAC+abC$; and that the Series of Terms from the Multiplication by c will be $cAB+caB$
$+cbA+abc$: so that the second Term of the first is a similar Combination with the first of the second Series, and the last of the first a similar Combination with the Penultimate of the second, whence they are to be respectively aggregated after this Manner,
$ABC+aBC$
$+bAC+abC$
$+cAB+caB$
$+cbA+abc$. Now the first Term of the first, and last of the second Series cannot be aggregated, being dissimilar to each other, and to every other Term; so that the Number of Terms is 4; to wit, $n+1$; and the Number of similar Combinations in each aggregated Term, is $1, \frac{3}{1}, \frac{3}{1}\times\frac{2}{2}, \frac{3}{1}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{3}$; viz. $1, n, \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{n}, \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$ (35): and the Number of first Members combined are 3, 2, 1, 0; viz. $n, n-1, n-2, n-n$: and consequently the Number of second Members are 0, 1, 2, 3 (93). After the same Manner, if there are more Binomes, because in every subsequent Multiplication of a foregoing Product by a Binome, the second and following Terms of the first Series of Products, viz. by the first Member of the Multiplier, are always similar Combinations with the first and following (except the last) of the second Series respectively, they are to be aggregated; and the whole

$$\begin{array}{r} yy + 2ay - \frac{1}{2}aa \\ yy - 2ay + aa \\ \hline aayy + 2a^3y - \frac{1}{2}a^4 \\ -2ay^3 - 4aayy + a^3y \\ y^4 + 2ay^3 - \frac{1}{2}aayy \\ \hline y^4 \quad * \quad -3\frac{1}{2}aayy + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 \end{array}$$

2ax

Number of Terms will always be $n + 1$; the Number of first Members will be n in the first Term, and decrease by Unity, and none in the last; and consequently, there will be no second Member in the first Term, and the second Members will be combined, one by one, two by two, 3 by 3, &c. in the 2d, 3d, 4th, &c. Terms respectively; and their Number in the last Term will be n; and the Number of similar Combinations in the Terms will be $1, n, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ &c. (35) continued to n Terms.

95. *Let the first Members of the Binomes, whose Number is* n, *become equal to each other; viz. let* $A = B = C$ &c. $= x$; *and let the Terms of the Product be ranged according to the Dimensions of* x; *it is manifest,* that, *the Terms of the Product will become the Powers of* x, *combined with the Combinations, that is, multiplied into the Products, of the second Members, one by one, two by two,* 3 *by* 3, &c. *in the 2d, 3d, 4th, &c. Terms respectively*; that, *the Indices of* x *will be* n, $n-1$, $n-2$, &c. $n-n$; *and* that, *the Dimensions of the Product will be denominated from* x^n. *The Combinations of the second Members are called the literal Coefficients of the Powers of* x; *the Number of similar Combinations in the Terms are called the numeral Coefficients, or Uncia; to wit,* $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ &c; *the Uncia of the second Term being always* n, *the Dimensions of the Product.* Thus putting $A = B = C = x$; the foregoing Product will become $x^3 + \begin{matrix} +a \\ +c \end{matrix} x^2 + \begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix} x + abc$.

96. *Hence, if* x *the first Member, which is common to the Binome Factors, is found in the last Term of a Product, whose*

$$\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$3a + \sqrt{\frac{abb}{c}}$$

$$\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c}$$

$$\frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$\frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{aab}{c}} - \frac{aab}{c}.$$

whoſe Terms are ranged according to the Dimenſions of x; *then, the ſecond Member of one Binome is nothing: and ſo often as* x *is found in the laſt Term, ſo many Binomes there are, whoſe ſecond Members are* = 0, *and the Product* of the Dimenſions of x in the higheſt Term *wants ſo many of its laſt Terms, as there are Units in the loweſt Index of* x. For if the Product was compleat, the Index of x would have decreaſed by Unity to nothing, that is, there would have been ſo many more Terms as there are Units in the loweſt Index of x.

97. *Let the firſt Member of the Binome Factors be* x, *as before, and the ſecond Members be unequal Numbers; the Terms of the Product (ranged always by the Dimenſions of* x) *will be its Powers whoſe Indices decreaſe by Unity, multiplied, into the ſecond Members*, one by one in the ſecond; into the Products of two in the third; into the Products of three in the fourth; and ſo on; the laſt Term being the Product of all the ſecond Members, and into which x does not enter; *But the ſecond Members being Numbers, the ſimilar Combinations of them will be united into one Sum, ſo that the Unciæ, and the Coefficients of the Terms which were heretofore called literal, are now the Sum of the ſecond Members in the ſecond Term, the Sum of their Products by two in the third; the Sum of their Products by three in the fourth; and ſo on; and conſequently grow greater and greater in the ſubſequent Terms: and the laſt Term will be the Product of them all, purely numeral.* Thus if $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, the above Product will be $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$; in which $9x^2 = 2x^2 + 3x^2 + 4x^2$, the Sum of the three Combi-

Combinations of 2, 3, and 4, singly with x^2; and $26x = (6x =) \overline{2 \times 3 \times x} + (8x =) \overline{2 \times 4 \times x} + (12x =) \overline{3 \times 4 \times x}$, the Sum of the three Products of 2, 3, and 4, viz. two Factors in each Product combined with x; and the last Term is $24 = 2 \times 3 \times 4$, the Product of them all together. Now if any of the second Members have contrary Signs, the similar Combinations are to be summed by Art. xxiv. so that the Sums may not increase in the subsequent Terms.

98. *Let now both* first *and* second *Members of the Binomes, whose Number is* n, *be equal, and being expressed by Species, be multiplied; that is, let the Binome* $x \pm a$ *be involved to the Power, whose Index is* n: *the Terms of the Power will consist of the Powers of* x, *whose Indices decrease from* n *to* 0 *combined with the Powers of* a, *whose Indices increase from* 0 *to* n; *and also with the Unicæ* $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, &c. *continued to* n *Terms, respectively.* For the second Members having become equal, as well as the first, their Combinations will become also the Powers of one Member; that is, the Indices of a will increase as those of x decrease, so that their Sum in each Term will be equal to n (93), so that what were heretofore called the literal Coefficients of the Terms are now become the Powers of a, and the Unciæ, or numeral Coefficients (which could not be expressed in Numbers when the second Members were all different (95) and their similar Combinations were particularly wrote down in the Aggregates; nor, when the second (97) Members being numeral, their similar Combinations were united,) may now be expressed in Numbers, to abbreviate the Expression; and it is manifest, that these *Unciæ will first increase and then decrease, and be the same when they decrease, as when they increased* (32). Thus if $a = b = c = a$, the above Product will be the Cube of $x \pm a$; and will be $xxx \begin{matrix} \pm a \\ \pm a \\ \pm a \end{matrix} xx \begin{matrix} + aa \\ + aa \\ + aa \end{matrix} x \pm aaa$, or writing the Unciæ $xxx \pm 3axx + 3aax \pm aaa$: or $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3$ (Art. XIV. 59. 88).

99. *Let*

99. *Let the above Binome* $x \pm a$ *have its ſecond Member changed into ſome Number, and be raiſed to the Power* n. *It is manifeſt that the Terms will conſiſt of the Powers of* x *decreaſing from* n *to* o, *combined with the Powers of the Number increaſing from* o *to* n; *and which are multiplied reſpectively into the Uncia*, $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, &c. for (97) the Sums of the Products are now the Sums of Powers, and thoſe Powers being equal to each other in every Term, their Sum will be equal to the Product of one into their Number: *and the Sums will grow greater and greater, as the Powers grow greater; though their Number the Uncia grows leſs.*

Thus, if $a = 4$, the Cube of $x \pm 4$ will be $x^3 \begin{matrix} \pm 4 \\ \pm 4 \\ \pm 4 \end{matrix} x^2 \begin{matrix} + 16 \\ + 16 \\ + 16 \end{matrix} x \pm 4 \times 4 \times 4$ (59, 88.); now it is plain that the Sum $\pm 4 \pm 4 \pm 4 =$ to the Uncia 3 multiplied into the 2d Member ± 4, and that the Sum $16 + 16 + 16 =$ to the Uncia 3 into the Square $+ 16$ of ± 4; wherefore the cube is $x^3 \pm 12 x^2 + 48 x \pm 64$ (59. 88.)

100. Wherefore univerſally *putting* $x \pm a$ *indefinitely for any Binome to be raiſed to any Power whoſe Index is any Affirmative Integer* n, *the following Invention of our Author, and which is called the* BINOMIAL THEOREM, *is an univerſal Module for raiſing it to that Power without the Labour of Multiplication*;

$$x^n \pm \frac{n}{1} \times x^{n-1} a + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times x^{n-2} a^2$$

$$\pm \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times x^{n-3} a^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times$$

$$\frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times x^{n-4} a^4 \text{ \&c. } \ldots\ldots \pm \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$$

$$\times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \ldots \frac{n-n}{n} \times x^{n-n} a^n.$$

101. Becauſe in the Series $\frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$

$\times$

$\times \frac{n-2}{3}$ &c. of Fractions for finding the Unciæ, the Numerators are the ſame decreaſing Laterals with the Indices of x, yet ſo that the Index of x in any Term is by One leſs than the correſponding Numerator (for $\frac{n}{1}$ is the Fraction, which multiplied into Unity, gives the Coefficient of the ſecond Term, in which Term the Index of x is only $n - 1$, and ſo on) and becauſe the Denominators are exactly the ſame increaſing Laterals with the Indices of a; therefore *the ſame Series may be enunciated thus, in any Term, if the Uncia of the preceding Term be multiplied by the Index of* x *more Unity, and the Product be divided by the Index of* a, *the Quote will be the Uncia of that Term.* And becauſe in any Term the Index of a is equal to the Number of preceding Terms, and the Index of x is equal to the Number of ſubſequent Terms; *the ſame Series is alſo thus enunciated, in any Term, if the preceding Uncia be multiplied into the Number of Terms following more One, and the Product be divided by the Number of preceding Terms, the Quote will be the Uncia of that Term.* And becauſe the Index of a may be called the Index of the Coefficient, as it marks its Place, whether it be 1ſt, 2d, &c. and becauſe the Index of x is called the Index of the Term; *the ſame Series is alſo enunciated thus, in any Term, if the preceding Uncia is multiplied into the Index of the Term more One, and divided by the Index of the Coefficient, the Quote is the Uncia of that Term.* Now becauſe *theſe Unciæ muſt decreaſe and be the ſame as before,* when the Numerators and Denominators of the generating Fractions become equal, or change their Value (32); therefore the ſame Thing will happen, *when the Indices of* x *and* a *become equal or change their Value in the ſame Term; whence it will be ſufficient to find the Unciæ for half the Number of Terms: Now the Number of Terms is given, being always* $n + 1$ (94); and the Series muſt terminate, n being by Suppoſition finite, and affirmative. *If the Terms of the Power be numbered* from the other End of the Series, viz. *from* a *to* x; it is evident that *the ſame Things will be demonſtrable* by ſubſtituting a for x, and x for a.

102. *Let the Power to which the Binome* $x + a$ *is to be raiſed be an affirmative mean Proportional, or one which is above*

above Unity; that is, a Power whose Index is the affirmative Fraction $\frac{m}{n}$ (78); *then the Module for the Unciæ of Number* (100) *will be changed into* $1, \frac{\frac{m}{n}}{1}, \frac{\frac{m}{n}}{1} \times \frac{\frac{m}{n}-1}{2}, \frac{\frac{m}{n}}{1} \times \frac{\frac{m}{n}-1}{2} \times \frac{\frac{m}{n}-2}{3}$, &c. *that is*, by reducing the Fractions to a more simple Form, *into* $1, \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n}, \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{m-2n}{3n}, \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{m-2n}{3n} \times \frac{m-3n}{4n}$, &c. [*For* $\frac{m}{n}-1 = \frac{m-n}{2n}$, and $\frac{m}{n}-2 = \frac{m-2n}{3n}$, &c. (Art. LIX.)] *and therefore the whole Module will become*

$$x^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{2n}} a \pm \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} x^{\frac{m-2n}{3n}} a^2 \pm \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{m-2n}{3n} x^{\frac{m-3n}{4n}} a^3 \pm \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{m-2n}{3n} \times \frac{m-3n}{4n} x^{\frac{m-4n}{5n}} a^4, \text{ &c.}$$

103. *Let the Power, to which the Binome* $x \pm a$ *is to be raised, be a mean Proportional below Unity*, that is, *a Power whose Index is a negative Fraction* $-\frac{m}{n}$ (78); *the Expression of the Unciæ will be the same, but the Module will become*

$$x^{-\frac{m}{n}} \mp \frac{m}{n} x^{\frac{-m-n}{2n}} a + \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} x^{\frac{-m-2n}{3n}} a^2 \mp \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{m-2n}{3n} x^{\frac{-m-3n}{4n}} a^3 + \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{m-2n}{3n} \times \frac{m-3n}{4n} x^{\frac{-m-4n}{5n}} a^4, \text{ &c.}$$

104. *Let the Power, to which the Binome* $x \pm a$ *is to be raised, be a Divisor, or the Denominator of a Fraction; that is, Let the Index be the negative Integer* $-n$ (76); then the Expression of the Unciæ will be $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$, (28) &c. for

$-\frac{n}{1}\times-\frac{n-1}{2}=\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$; &c. and the Module becomes

$x^{-n}\mp\frac{n}{1}x^{-n-1}a+\frac{n}{1}\times\frac{n+2}{2}x^{-n-2}a^2\mp\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}x^{-n-3}$

$a^3+\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}\times\frac{n+3}{4}x^{-n-4}a^4$, &c.

105. Becauſe that to extract any Root from any given Quantity is the ſame Thing, as to raiſe that Quantity to a Power, whoſe Index is a Fraction, the Denominator of which is the Name of the Root (76); and becauſe that to divide any Quantity by an Infinitinome, is the ſame as to multiply it by the Reciprocal of the Diviſor (145); *the Theorems of Numbers* 102, 103, 104, *are Modules for the Operations of raiſing Infinitinomes to Powers, and of extracting infinite Roots, in which the Expreſſion will always be an infinite Series.* For the Denominator (102, 103.) of the fractional Index being greater than the Numerator, the Exponents of the Terms muſt become Negative, and increaſe continually; and neither the Denominator nor any multiple of it can ever meaſure the Difference between the Numerator and Denominator, nor the Difference between the Numerator and a leſs Multiple of the Denominator; whence the Unciæ muſt increaſe continually: And when the Index is a negative Integer $-n$ (104), the continual Subduction of the Laterals from it, increaſes the Indices of the Terms negatively; whence the Operation for the Unciæ (104) becomes equivalent to the Generation of Figurates of the *n*th Order; and the Unciæ being thoſe Figurates (28) will increaſe fine fine.

106. *When the Index of the Power is an affirmative Fraction, all the Indices of* x, *except the Firſt, are Negative; and when the Index of the Power is Negative, whether it be Integer or Fractional, all the Indices of* x *are Negative; but in all Caſes the Indices of* a *are Affirmative. If the Power be* $\overline{x+a}^{\frac{m}{n}}$ *The Terms in all the odd Places after the Firſt will be Negative, and the Terms in all even Places Affirmative:* For all the generating Fractions except the Firſt being Negative (105), the Unciæ beginning at the ſecond Term (101) will be alternately Affirmative and Negative (59); that is, Affirmative in the even, and Negative

Negative in the odd Places. *If the Power be* $\overline{x - a}^{\frac{m}{n}}$ *all the Terms after the Firſt will be Negative:* For the Terms excluſive of the Unciæ are Affirmative and Negative alternately beginning at the Firſt (59); but the Unciæ are Affirmative and Negative alternately beginning at the Second (105, 59); wherefore all the Terms after the Firſt (59) are Negative. *If the Power be* $\overline{x + a}^{-\frac{m}{n}}$, *or* $\overline{x + a}^{-n}$ *the Terms in the odd Places will be Affirmative, and in the even Places Negative*; for all the Indices of x being Negative, the generating Fractions are all Negative; wherefore the Unciæ beginning at the firſt Term are Affirmative and Negative alternately. *If the Power be* $\overline{x - a}^{-\frac{m}{n}}$ *or* $\overline{x - a}^{-n}$ *all the Terms will be Affirmative.* For as well the Terms excluſive of the Unciæ, as the Unciæ, beginning from the firſt Term, will be Affirmative and Negative alternately; wherefore all their Products, the Terms, are Affirmative (59).

107. Becauſe $x^{n-1} = \frac{x^n}{x}$ (XVI), and $x^{n-2} = \frac{x^n}{x^2}$, and $x^{n-3} = \frac{x^n}{x^3}$, &c. the form of $\overline{x \pm a}^n$ in Number 100 may be changed into $x^n \pm \frac{n}{1} \frac{x^n a}{x} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \cdot \frac{x^n a^2}{x^2} \pm \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \frac{x^n a^3}{x^3}$, &c. if then we put $P = x$, and $Q = \frac{a}{x}$, ſo that $Q^2 = \frac{a^2}{x^2}$, $Q^3 = \frac{a^3}{x^3}$, &c, and $x \pm a = P \pm PQ$: the form of $\overline{x \pm a}^n$ will be $\overline{P \pm QP}^n = P^n \pm \frac{n}{1} P^n Q + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} P^n Q^2 \pm \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} P^n Q^3$, &c. Laſtly, if we put $P^n = A$; and the 2d, 3d, &c. Terms of this laſt Expreſſion

pression = to B, C, D, respectively; then $\overline{x \pm a}^n =$ $\overline{P \pm Q}^n = A \pm \frac{n}{1} QA + \frac{n-1}{2} QB \pm \frac{n-2}{3} QC \pm \frac{n-3}{4} QD + \frac{n-4}{5} QE$, &c. an Expression comprehending all Cases.

108. *Any Polynome may be involved to any Power by distinguishing it into two Parts, considering it as a Binome, and raising it to the Power required, by Number* 107; *and then, by the same in the Place of the Powers of those compound Parts, by substituting their Values.* Thus $\overline{a+b+c}^3 = \overline{a+b+c}^3 = \overline{a+b}^3 + 3c \times \overline{a+b}^2 + 3c \times \overline{a+b} + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$.

109. *In the Power* $\overline{x \pm a}^n$ *the Square of any Term is greater than the Product of the two Terms which are adjacent on each Side.* For the Square of the Species Part of it is equal to the Product of the adjacent Species (XIV. 71); but the Square of the middle Uncia is greater than the Product of the adjacent ones (32); so that the Square of the whole middle Term is greater than the Product of the adjacent Terms: *Also if each subsequent Term be divided by the next antecedent Term, the Quotes will grow less continually* (32): *Also in the Square of* $x \pm a$ *the Square of the middle Term is quadruple the Product of the Extremes* (33): *And in the Cube of it, the Square of either middle Term is triple the Product of the adjacent Terms: And in the Biquadrate of it, the Squares of the second and fourth Terms, are* $\frac{8}{3}$ *of the Product of the Terms adjacent to them; and the Square of the Third is* $\frac{9}{4}$ *of the Product of the Second and Fourth*, &c.

110. *In the Power* $\overline{x - a}^n$, *if* n *be odd, the last Term will be Negative; if even, Affirmative.* For *n* is the Number of negative Factors, and according as that Number is odd, or even (87, 88), so the Power a^n, or last Term, is Negative or Affirmative.

111. The Terms of every *Product by binomial Factors* being all Affirmative; and those of every *Product of residual Factors* being alternately Affirmative and Negative (59);

(59); and the Number of Terms in each being $n+1$, One more than the Number of Factors (94): It follows that *the Number of Succeſſions in the former Product, and of Alternations in the latter, ſhall be equal to* n, *the Number of Factors.*

112. *Let any Product of Binomes, having their ſecond Members numeral, be multiplied by a Binome whoſe ſecond Member is alſo numeral; then* 1. *if the ſecond Member of the Multiplier is leſs than the Quote, which ariſes by dividing any Term of the Multiplicand by its next antecedent Term, the correſponding Term of the Product and all its Terms ſubſequent will have their Signs the ſame with the Signs of the reſpective Terms of the Multiplicand;* 2. *If the ſecond Member of the Multiplier is equal to that Quote, the correſponding Term of the Product will vaniſh, and the Signs of the Terms adjacent on each Side will be contrary;* 3. *If the ſecond Member of the Multiplier is greater than that Quote, the correſponding Term of the Product and all its Terms ſubſequent will have their Signs contrary to thoſe of the reſpective Terms of the Multiplicand.*

Let the Multiplier be a Binomial: The Signs of the Terms in both Series of Products by the Members of the Multiplier being ſucceſſively the ſame with thoſe of the Multiplicand (57); and the ſecond Term and all the ſubſequent Terms of the former Series being to be added reſpectively to the firſt and ſubſequent Terms (except the laſt) of the ſecond Series (94), to make the Sums or Terms of the Product; in thoſe Sums the Sign of the greater Term in either Series muſt prevail, when they are contrary (XXIV); and they muſt be contrary, when there is an Alternation of Signs in the Terms of the Multiplicand (94): An Alternation therefore in this Caſe is always ſuppoſed. Putting then the ſecond Term of the binomial Multiplier $\left\{\begin{matrix}\text{leſs}\\\text{greater}\end{matrix}\right\}$ than that Term of the Multiplicand to which the Alteration is made, divided by its immediate Antecedent from which the Alteration begins, it ſhall alſo be $\left\{\begin{matrix}\text{leſs}\\\text{greater}\end{matrix}\right\}$ than every ſucceeding Term of the Multiplicand divided by its immediate Antecedent (109); therefore its Products into

that Term from which the Alternation begins, and into every ſucceeding Term of the Multiplicand, will be $\left\{\begin{matrix}\text{leſs}\\\text{greater}\end{matrix}\right\}$ than the ſimilar Terms of the firſt Series, to which they are reſpectively to be added (94); therefore the Signs of the Sums will be the $\left\{\begin{matrix}\text{ſame}\\\text{contrary}\end{matrix}\right\}$ ſucceſſively with thoſe of the Terms of the firſt Series (XXIV), that is, with thoſe of the Terms of the Multiplicand (57). Putting the ſecond Member of the binomial Multiplier equal to that Term of the Multiplicand to which the Alternation is made, divided by its immediate Antecedent from which the Alternation begins, its Product into that antecedent Term will be equal to the ſimilar Term of the firſt Series, to which it is added (94): Therefore their Sum, that is the correſponding Term of the Product, vaniſhes (XXIV): Now the ſecond Member, being equal to any Term divided by the preceding, muſt be leſs than every one of the preceding Terms divided by its immediate Antecedent (109); wherefore as before the Signs of the preceding Terms of the Product are the ſame reſpectively with thoſe of the Multiplicand; alſo it muſt be greater than every one of the ſucceeding Terms of the Multiplicand divided by its immediate Antecedent (109); therefore as before the Signs of the Sums or Terms of the Product will be the ſame with thoſe of the ſecond Series (XXIV); that is, contrary to thoſe of the Multiplicand (59). Now becauſe when a Term vaniſhes, the Signs of the Terms antecedent to it are the ſame with thoſe of the Multiplicand, and the Signs of the Terms ſubſequent to it are the contrary; and that there is an Alternation in the Signs of the Terms of the Multiplicand (94); it follows, that the Signs of the adjacent Terms muſt be contrary. Now let the Multiplier be a Reſidual: The Signs of the Terms in the firſt Series are the ſame (57), and thoſe in the Second the contrary reſpectively, to the Signs of the Terms of the Multiplicand (58); therefore when there is a Succeſſion of Signs in the Multiplicand, the correſponding Terms in each Series, which being ſimilar are to be added, have contrary Signs, and

the Sign of the Sum will be that of the greater; ſuppoſing therefore a Succeſſion of Signs in the Multiplicand, and putting the ſecond Member of the reſidual Multiplier equal to any Term of the Multiplicand to which the Succeſſion of Signs is made divided by its Antecedent from which the Succeſſion of Signs begins, its Product into that Antecedent will be equal to the Term of the firſt Series to which it is added; therefore the Sum is $= o$; and being equal to one Quote, it will be leſs than all the antecedent Quotes, and greater than all the ſubſequent Quotes (109); therefore the Signs of the former Series will prevail in all the Terms antecedent, and in all the ſubſequent, the Signs of the latter; therefore when there is a Succeſſion of Signs in the Multiplicand, and conſequently in the former Series, the Signs of the reſpective Terms of the Product will be contrary to thoſe of the Multiplicand; and conſequently the Signs of the Terms adjacent to that which vaniſhes muſt be contrary, the Sign of the ſubſequent Term being contrary to that of the ſubſequent Term of the Multiplicand; and the Signs in the Multiplicand being in Succeſſion (94, 59).

113. *If any given Product of Binomes, whoſe ſecond Members are Numeral, is multiplied into a Binomial, whoſe ſecond Member is alſo Numeral, one Succeſſion of Signs, and one only, will be added to the Terms of the Product, the Number of Alternations remaining the ſame as in the Multiplicand; and if the given Product is multiplied into a Reſidual, one Alternation of Signs, and one only, will be added in the Product; and the Number of Succeſſions will remain the ſame as in the Multiplicand.* Suppoſe the Multiplier a Binomial, the Signs of each Series are the ſame reſpectively with thoſe of the Mutliplicand (57); and the laſt Term of the Product has the ſame Sign with the laſt of the Multiplicand, and by this Term alone the Number of Terms is increaſed (94); now if the Signs of the firſt Series, or Multiplicand, prevail throughout, there is one Succeſſion, and one only, added (the Number of Alternations remaining as in the Multiplicand) to wit, from the Penultimate to the laſt Term. But if the Signs of the ſecond Series prevail in any Sum, they muſt prevail in all the ſubſequent Terms, except the laſt (112); and an Alternation in the Multiplicand has become a Succeſſion in the Pro-

duct (112), whereby the Succeſſions are increaſed by One only, and the Alternations diminiſhed by One only; but the Loſs of this Alternation is reſtored by an Alternation from the Penultimate to the Ultimate, which always retains the Sign of the Multiplicand: And if any Term of the Product vaniſhes, becauſe the Signs of the adjoining Terms muſt be contrary (112), by putting either Sign for it, there will be one Succeſſion and one Alternation, and conſequently one Succeſſion only, added to the Number in the Multiplicand, the Number of Alternations being the ſame. Suppoſe the Multiplier to be a Reſidual: The Sign of the laſt Term of the ſecond Series, that is, of the Product remains unalterably the contrary to that of the laſt Term of the Multiplicand (94, 58), and this Term only increaſes the Number of Terms in the Product: Now the Signs of the firſt Series being the ſame, and thoſe of the ſecond reſpectively contrary to thoſe of the Multiplicand, if the Signs of the firſt Series prevail, there is an Alternation, and one only from the Penultimate to the laſt of the Product added, the Succeſſions remaining as in the Multiplicand: If the Signs of the ſecond Series prevail in any Sum, a Succeſſion in the Multiplicand is become an Alternation in the Product, and the Signs of the ſecond Series prevail in all the ſubſequent Terms of the Product; the Alternations therefore are increaſed, and the Succeſſions diminiſhed by one only, but the Loſs of this Succeſſion is compenſated by a Succeſſion from the Penultimate to the laſt. And if any Term of the Product vaniſhes, becauſe the adjacent Terms muſt have contrary Signs, if the vaniſhed Term be ſuppoſed to be affected with either Sign, it will add both an Alternation and a Succeſſion; conſequently one Alternation, and one only, is added to the Number in the Multiplicand, the Number of Succeſſions being the ſame.

114. Hence, univerſally *in every Product of Binomes, whoſe ſecond Members are numeral, there are as many Alternations of Signs as there are Reſidual Factors, and as many Succeſſions as Binomial Factors; and converſely. Suppoſing that, when any Term vaniſhes, that Term is affected with either Sign.* Thus, to illuſtrate Nº. 112 and 113 together, if the Binome $x \pm 3$ be multiplied into $x \pm 2$, there will emerge

emerge the Products $x^2 \pm 5x + 6$ (59); and if these be multiplied by $x \mp a$, making a less than $\frac{6}{5}$, the Signs in the Products will be the same as in the Multiplicand, except that of the last Term, which, when the Multiplier is $x - a$, shall be the contrary. Let $x \mp a = x \mp 1$, and there will emerge $x^3 \pm 4x^2 + x \mp 6$; but if $x \mp a = x \mp \frac{6}{5}$, the Penultimate shall vanish, and the Signs of the adjacent Terms be contrary, as $x^3 \mp \frac{19}{5} x^2 \mp \frac{36}{5}$: Now making a greater than $\frac{6}{5}$, and less than 5, as $x \mp 4$, the Sign of the second Term of the Product will be the same with the Sign of the second Term in the Multiplicand, and the Signs of the subsequent Terms will be contrary, viz. $x^3 \pm x^2 - 14x \mp 24$. Let $x^2 \pm 5x + 6$ now be multiplied into $x \mp 5$, and the second Term will vanish, and the Signs of the subsequent Term will be contrary to those in the Multiplicand, viz. $x^3 - 19x \mp 30$; and if a be made greater than 5, the Sign of the second Term will also be contrary to that in the Multiplicand; let it be $x \mp 6$, and we shall have $x^3 \mp x^2 - 24x \mp 36$; in all which Cases, the Number of Alternations and Successions are respectively equal to the Number of residual and binomial Factors.

115. *In the Square of any Binome, the Sum of the Squares of the Members is greater than the Sum of the Products of the Members.* For each Product is a geometrical Mean between the Squares (Eucl. VIII. 17): Whence the Sum of the Squares is greater than the Sum of the Products (Eucl. V. 25.)

116. *If the Binome* $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ *expounded in Numbers,* ($\sqrt{a}$ *being greater than* $\sqrt{b}$) *be involved to a Power whose Index is* n, *the Terms of the Power can be united alternately; and if the Sums of the alternate Terms be connected with the Sign of the second Member of the Root, the Power will be a Binome, whose greater Member contains* $\sqrt{a}$, *and the less* $\sqrt{b}$,

when n *is odd*; *but when* n *is even, the greater Member will be rational* (90), *and the leſs will contain* $\sqrt{}$ a b. Let *n* be odd, the firſt Term conſiſts ſolely of the nth Power of $\sqrt{a}$, that is, of $\sqrt{a} \times a^{\frac{n-1}{2}}$; and the other Terms in the odd Places conſiſt of the Powers of $\sqrt{a}$, whoſe Indices are either $n-2$ or *n* leſs a Multiple of two, that is, of the rational Powers of $\sqrt{a}$ into $\sqrt{a}$, and of the Powers of $\sqrt{b}$ whoſe Indices are even, and which therefore are rational; therefore the Terms in the odd Places conſiſt of the rational Powers of $\sqrt{a}$ and of $\sqrt{b}$ multiplied into $\sqrt{a}$ only; that is, the only irrational Part of the Terms in the odd Places is $\sqrt{a}$, and they therefore will be entirely rational where *n* is even; they are therefore ſimilar in both Caſes, and may be united: Now the ſecond Term conſiſts of the Power of $\sqrt{a}$, whoſe Index is $n-1$, and the other Terms in the even Places contain the Powers of $\sqrt{a}$, whoſe Indices are *n* leſs the odd Laterals, multiplied either into $\sqrt{b}$, or, into the Products of the rational Powers of $\sqrt{b}$ into $\sqrt{b}$; ſo that the Powers of $\sqrt{a}$ in the even Places are rational, and the only irrational Parts of the Terms in the even Places is $\sqrt{b}$; but if *n* is even, the irrational Part of the Terms in the even Places will be $\sqrt{ab}$; becauſe the Powers of $\sqrt{a}$ will alſo be irrational as well as the Powers of $\sqrt{b}$; conſequently, the Terms in the even Places alſo are ſimilar, and agree in their irrational Part $\sqrt{b}$, when *n* is odd; or in $\sqrt{ab}$, when *n* is even, and can be united; and the Sums, connected as above, will form the Binome deſcribed above. Hence, n *being odd, if* $\sqrt{}$ a *be put rational, the firſt Member*; *but if* $\sqrt{}$ b, *the ſecond Member of the binome Power, will be rational*; *and* n *being even, if* $\sqrt{}$ a *be put rational, the irrational Part of the irrational Member of the binome Power will be only* $\sqrt{}$ b, *inſtead of* $\sqrt{}$ a b; *and ſo if* $\sqrt{}$ b *is put rational, it will be only* $\sqrt{}$ a *inſtead of* $\sqrt{}$ a b.

117. Hence it follows, that *any given Binome may be taken for the* n^{th} *Power of a binome Root, conceiving the Members of the given Binome to be the Sums of the Terms of the* n^{th} *Power united alternately, and connected with the Sign of the ſecond Member of the Root*; alſo that *the Difference of the Members of the given Binome is the* n^{th} *Power of*

of the Difference of the Members of the Root: And that consequently multiplying the Sum into the Difference, the Difference of the Squares of the Members of the given Binome is the nth *Power of the Difference of the Squares of the Members of the Root.* For universally let *the Sum or Difference of the Quantities* x *and* a *be raised to the* n^{th} *Power, and let the Sum of the Terms in the odd Places be called* A, *and the Sum of the Terms in the even Places be called* B, *then the Difference of the Squares of* A *and* B *shall be equal to the* n^{th} *Power of the Difference of the Squares of* x *and* a; *for* $A + B = \overline{x + a}^n$ and $A - B = \overline{x - a}^n$ therefore $\overline{A+B} \times \overline{A - B}$, that is, $A^2 - B^2$ (Eucl. II. 5.) $= \overline{x + a}^n \times \overline{x - a}^n$, that is, $\overline{x + a \times x - a}^n$, that is (Eucl. II. 5.) $\overline{x^2 - a^2}^n$.

118. *Any binome Surd in Numbers, both Members having the same Index* $\frac{1}{n}$, *as* $x^{\frac{1}{n}} \pm a^{\frac{1}{n}}$ *being given, let* m *be the least Integer which* $\frac{1}{n}$ *will measure, then shall* $x^{m-\frac{1}{n}} \mp x^{m-\frac{2}{n}} a^{\frac{m}{}} + x^{m-\frac{3}{n}} a^{\frac{2m}{}} \mp x^{m-\frac{4}{n}} a^{\frac{3m}{}}$, *&c. continued to* $\frac{m}{n}$ *terms, be a compound Surd, which multiplied by the proposed Surd, gives a rational Product* $x^m - a^m$; *and when* $\frac{m}{n}$ *is odd, the Product* $x^m + a^m$. For by Numbers 59 and 112, all the middle Terms of the Product will vanish, and the extreme Terms (80, 90) will be rational; and if the Surd is the Binomial $x^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{n}}$, and $\frac{m}{n}$ odd, the last Term of the compound Surd will be Affirmative; wherefore the Product will be $x^m + a^m$ (59). Thus if $x^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{3}{4}}$ be given, then $\frac{1}{n} = \frac{3}{4}$; therefore

fore $m = 3$, and $\frac{m}{n} = \frac{12}{3} = 4$; therefore the compound Surd is $x^{3-\frac{3}{4}} - x^{3-\frac{6}{4}} a^{\frac{3}{4}} + x^{3-\frac{9}{4}} a^{\frac{6}{4}} - x^{3-3} a^{\frac{9}{4}} = x^{\frac{9}{4}} - x^{\frac{6}{4}} a^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{3}{4}} a^{\frac{6}{4}} - a^{\frac{9}{4}}$; whence the Product is $(x^{\frac{9}{4}} \times x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{12}{4}} =) x^3 (- a^{\frac{9}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} = - a^{\frac{12}{4}} =) - a^3$. And by the same Reasoning

119. *Any binome Surd whose Numbers have different Indices being given, as* $x^{\frac{1}{n}} \pm a^{\frac{1}{l}}$, *let* m *be the least Integer, which* $\frac{1}{n}$ *and* $\frac{n}{l}$ *will measure, then shall* $x^{m-\frac{1}{n}} \mp x^{m-\frac{2}{n}} a^{\frac{1}{l}} + x^{m-\frac{3}{n}} a^{\frac{2}{l}} \mp x^{m-\frac{4}{n}} a^{\frac{3}{l}}$, *&c. continued to* $\frac{m}{n}$ *Terms give a compound Surd, which multiplied by the proposed shall give a rational Product* $x^m \mp a^{\frac{ml}{n}}$. Thus if $x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}}$ be given, then $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$, and $\frac{n}{l} = \frac{3}{2}$; therefore $m = 3$; and $x^{3-\frac{1}{2}} + x^{3-1} a^{\frac{1}{3}} + x^{3-\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} + x^{3-2} a + x^{3-\frac{5}{2}} a^{\frac{4}{3}} + x^{3-\frac{6}{2}} a^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{5}{2}} + x^2 a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}} a^{\frac{2}{3}} + x a + x^{\frac{1}{2}} a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{5}{3}}$: Whence the Product is $(x^{\frac{5}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{6}{2}} =) x^3 (- a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = - a^{\frac{6}{3}} =) - a^2$.

120. *A Product of even Dimensions, all whose Terms are rational, may be had from the Multiplication of Binomes, whose second Members are Radicals, whether the Radicals be all real or all imaginary, or some real and some imaginary, if they be taken equal in Pairs, and with contrary Signs; but to have a Product of odd Dimensions, all whose Terms shall be rational, one rational Factor at least is requisite.* For when the

the Dimenſions are even, the firſt Term and all the Terms whoſe Indices are even will be rational, and the Terms whoſe Indices are odd, which only can be affected with the radical Sign, will vaniſh upon Account of the Equality of thoſe Radicals which have contrary Signs (XXIV); and this Product being multiplied into a Binome, having a radical Member, muſt have all its Terms after the firſt Irrational. Thus $\overline{x - \sqrt{a^2}} \times \overline{x + \sqrt{a^2}}$, is $x^2 - a^2$; and $\overline{x - \sqrt{b^2}} \times \overline{x + \sqrt{b^2}}$, is $x^2 - b^2$; and $\overline{x - \sqrt{a^2}} \times \overline{x + \sqrt{a^2}} \times \overline{x - \sqrt{b^2}} \times \overline{x + \sqrt{b^2}}$, is $x^4 \begin{matrix} - a^2 \\ - b^2 \end{matrix} x^2 + a^2 b^2$; and $\overline{x - \sqrt{-a^2}} \times \overline{x + \sqrt{-a^2}}$, is $x^2 + a^2$ (92); and $\overline{x - \sqrt{-b^2}} \times \overline{x + \sqrt{-b^2}}$, is $x^2 + b^2$ (92); and $\overline{x - \sqrt{-b^2}} \times \overline{x + \sqrt{-b^2}} \times \overline{x - \sqrt{-a^2}} \times \overline{x + \sqrt{-a^2}}$, is $x^4 \begin{matrix} + a^2 \\ + b^2 \end{matrix} x^2 + a^2 b^2$; and $\overline{x - \sqrt{a^2}} \times \overline{x + \sqrt{a^2}} \times \overline{x - \sqrt{-b^2}} \times \overline{x + \sqrt{-b^2}}$, is $x^4 \begin{matrix} - a^2 \\ + b^2 \end{matrix} x + a^2 b^2$; and any of thoſe Products into $x \pm c$, will give a rational Product; but into $x \pm \sqrt{c}$, or into $x \pm \sqrt{-c}$, an irrational one.

121. *The ſame Product will ariſe from the Multiplication of Binomes, whoſe firſt Members have Coefficients different from Unity, and from the Multiplication of them after they are divided by their Coefficients, if the fractional Coefficients of the Product are made integral by multiplying all the Terms by the Product of the Denominators.* Thus $\overline{bx + a} \times \overline{dx - c} = bdx^2 \begin{matrix} + ad \\ - cb \end{matrix} x - ca$; and $\overline{x + \frac{a}{b}} \times \overline{x - \frac{c}{d}} = x^2 \begin{matrix} + \frac{a}{b} \\ - \frac{c}{d} \end{matrix} x - \frac{ac}{bd} = bdx^2 \begin{matrix} + ad \\ - cb \end{matrix} x - cq.$

122. *A Product of Binomes, which has all its Terms, may be ſquared thus: Let the Indices of the Terms be the Laterals deſcending from double the Index of the higheſt Term of the Product*

Product (83); *then to find the Coefficients, multiply into each other the Coefficients of thoſe Terms of the Product, the Sum of whoſe Indices is equal to the Index of the Term in the Square; alſo, into each other, the Coefficients of all the Pairs of the intermediate equidiſtant Terms; then the Products doubled, and added to the Square of an odd intermediate Coefficient, are the Coefficients of the Terms in the Square.* Thus to ſquare $x^2 + 5x + 6$; the Terms will be x^4, x^3, &c. the Coefficient of x^4 will be 1, the Square of that of x^2; the Coefficient of x^3 will be 1×5 doubled, viz. 10; the Coefficient of x^2 will be 1×6 doubled, more the Square of 5, viz. $12 + 25 = 37$; the Coefficient of x will be 5×6 doubled, viz. 60; and the laſt Term will be the Square of 6; the Square then is $x^4 + 10x^3 + 37x^2 + 60x + 36$. For the Products of the ſimilar Parts unite in Pairs (Eucl. II. 4.), and the Products of the Coefficients of the Terms, the Sum of whoſe Indices is the Index of the Term in the Square, are ſimilar; therefore, when doubled, will make its Coefficient; and the Square of the Coefficient of any odd Term being double the Product of equal Coefficients (Eucl. II. 4.), muſt not be doubled, but united ſingly with the Products which are ſimilar with it.

123. *The Coefficients of the Terms of the above-mentioned Square, in the odd Places, contain a Square joined with doubled Products; thoſe in the even Places contain doubled Products, and no Square:* For in the odd Places the Indices are even, therefore the Number of Coefficients of the Product, compounding thoſe Coefficients, are odd; and therefore there is then a Square in the Compoſition of each (122); and in the even Places the Indices are odd, whence the Number of compounding Coefficients is even, and no Square enters the Compoſition.

124. *The Number of Terms in the Square of a Product as above, when none but doubled Products are united, is equal to the Product of Half the Number of Terms in the Product multiplied into that Number more Unity.* For the whole Number is the Square of that Number (93); from which ſubducting its Root, viz. the Terms containing Squares, the Difference is the Number of Products, therefore Half this Difference (becauſe they unite in Pairs) added to the Root,

Root, that is, Half the Number of Terms multiplied into the Whole more one, is the Number of diſtinct Terms in the Square.

125. *Hence, in a given Square, it is known if any other Terms than thoſe containing doubled Products have coaleſced.* For putting the whole Number of Terms in the Root n, the Number in the Square is $\frac{n}{2} \times \overline{n+1}$ (124); ſubſtituting therefore for n, the Laterals 2, 3, 4, &c. ſucceſſively, if the reſulting Product is not the Number in the given Square, ſome Terms containing Squares are united; therefore, ſubducting the given Nnmber of Terms from the Number reſulting next greater by Subſtitution, half the Difference more One will be the Number of Terms which have united (36).

Of DIVISION.

XXXIV. *DIVISION is performed in Numbers, by ſeeking how many times the Diviſor is contained in the Dividend, as often ſubtracting, and writing ſo many Units in the Quotient; and by repeating that Operation upon Occaſion, as often as the Diviſor can be ſubtracted.*

Thus, to divide 63 by 7, ſeek how many times 7 is contained in 63, and there will come out preciſely 9 for the Quotient; and conſequently $\frac{63}{7}$ is equal to 9. Moreover, to divide 371 by 7, prefix the Diviſor 7, and beginning at the firſt Figures of the Dividend, coming as near them as poſſible, ſay how many times 7 is contained in 37, and you will find 5; then writing five in the Quotient, ſubtracting 5×7, or 35, from 37, and there will remain 2, to which ſet the laſt Figure of the Dividend, *viz.* 1; and then 21 will be the remaining Part of the Dividend for the next Operation; ſay therefore as before, how many times 7 is contained in 21? and the Anſwer will be 3; wherefore writing 3 in the Quotient, take 3×7, or 21, from 21, and there will remain 0. Whence

7) 371 (53
35
21
21
0

6. Whence it is manifeſt, that 53 is preciſely the Number, that ariſes from the Diviſion of 371 by 7.

And thus to divide 4798 by 23, firſt beginning with the initial Figures 47, ſay, how many times is 23 contained in 47? Anſwer 2; wherefore write 2 in the Quotient, and from 47 ſubtract 2 × 23, or 46, and there will remain 1, to which join the next Number of the Dividend; *viz.* 9, and you will have 19 to work upon next. Say therefore, how many times is 23 contained in 19? Anſwer 0; wherefore write 0 in the Quotient; and from 19 ſubtract 0 × 23, or 0, and there remains 19; to which join the laſt Number 8, and you will have 198 to work upon next. Wherefore in the laſt Place ſay, how many times is 23 contained in 198 (which may be gueſſed at from the firſt Figures of each, 2 and 19, by taking notice how many times 2 is contained in 19)? I anſwer 8; wherefore write 8 in the Quotient, and from 198 ſubtract 8 × 23, or 184, and there will remain 14 to be farther divided by 23; and ſo the Quotient will be $208\frac{14}{23}$. And if this Fraction is not liked, you may continue the Diviſion in Decimal Fractions as far as you pleaſe, by adding always a Cypher to the remaining Number. Thus to the Remainder 14 add 0, and it becomes 140. Then ſay, how many times 23 in 140? Anſwer 6; write therefore 6 in the Quotient; and from 140 ſubtract 6 × 23, or 138, and there will remain 2; to which ſet a Cypher (or 0) as before. And thus the Work being continued as far as you pleaſe, there will at length come out this Quotient; *viz.* 208,6086, &c.

```
23) 4789 (208,6086, &c.
    46
    ---
     19
     00
     --
     198
     184
     ---
     140
     138
     ---
      20
      00
      --
      200
      184
      ---
       160
```

XXXV.

XXXV. *After the ſame Manner the decimal Fraction* 3,5218 *is divided by the decimal Fraction* 46,1, *and there comes out* 0,07639, &c. *Where note, that there muſt be ſo many Figures cut off in the Quotient, for Decimals, as there are more in the laſt Dividend than in the Diviſor:* As in this Example 5, becauſe there are 6 in the laſt Dividend, *viz.* 0,004370, and 1 in the Diviſor 46,1 *(a)*.

```
46,1) 3,5218 (0,07639
      322,7
      ------
       2948
       2766
       ----
        1820
        1383
        ----
         4370
```

We

XXXV. *(a)* 126. *In the Diviſion of Integers, of Decimals, and of mixed Numbers, the Exceſs of the Index of the dividend Figure above the Index of the dividing Figure is the Index of the Figure in the Quote.* For the Index of the Dividend and Diviſor Figures being the Number of Multiplications, or Diviſions, of Unity by Ten in the Denominator of each (13), to divide, or to multiply, the Denominator of the Dividend by Ten, is to ſubduct Unity from, or to add Unity to, its Exponent; and to divide, or to multiply, the Denominator of the Dividend by any other Denominator, is to ſubduct the Index of the Diviſor from, or to add it to, the Index of the Dividend; but in the Diviſion of Integers by Integers, and of Decimals by Decimals, the Denominator of the Dividend is divided by the Denominator of the Diviſor; and in the Diviſion of Integers by Decimals, the Denominator of the Integer is multiplied by the Denominator of the Decimal; therefore, in the former Caſe, the Difference of the Indices, and in the latter, the Sum of the Indices, is the Index of the Quote; now the Index of a Decimal Diviſor is negative (14), and muſt therefore, in Addition, be ſubducted (XXIV); therefore, in all Caſes, the Difference of the Indices of the Dividend and Diviſor, is the Index of the Quote.

We have here ſubjoined more Examples, for Clearneſs Sake, viz.

9043) 20844115 (2305	72,4) 2099,6 (29
18086	1448
27581	6516
27129	6516
45215	0
45215	
0	

50,18

127. *The Index and Place of the higheſt Figure in any Quote, is the Index of that Figure of the Dividend, under which the Place of Units in the Diviſor falls, when firſt placed under the Dividend.* For the Index of each Figure in the Quote, being the Exceſs of the Index of the dividend Figure above that of the dividing Figure (126), and the Index of the loweſt Figure of the Diviſor being Cypher, the Index, and Place, and Claſs, of each Figure in the Quote, is the ſame with that of the loweſt Figure in each particular Dividend; therefore the Index of the higheſt Figure in the Quote, is the ſame with that of the loweſt Figure of the firſt Dividend; that is, the ſame with that of the Figure of the whole Dividend, under which the Place of Units in the Diviſor falls, when it is ſubſcribed.

128. Hence, *there muſt be as many Places in the Quote, as there are particular Dividends*; for the higheſt Figure in the Quote being of the ſame Place, or Claſs, with the loweſt Figure of the firſt Dividend, ſo many Figures muſt follow in the Quote, as there are Dividends; *that is, as Figures follow in the Dividend, after that Figure under which the Place of Units in the Diviſor falls.*

129. Hence, *if the Diviſor is not contained in any particular Dividend, a Cypher muſt be wrote in the Quote*; to keep

50,18) 137,995 (2,75
10036

37635
35126

25090
25090

0

0,0132) 0,951513 (3,9025
396

1191
1188

330
264

660
660

0

XXXVI.

keep up the Number of Places equal to the Number of Dividends, and Figures ſucceeding to that of the Dividend, under which the Place of Units in the Diviſor firſt fell.

130. *Decimals, in Diviſion, are conſidered as Integers*; the only Difference between them being, that in the former the Numerators are divided, but in the latter they are multiplied, by that Power of Ten, whoſe Index is the Number of Places from Unity (13); therefore *their Numerators are divided, as in Integers.* As to the Diviſion of their Denominators, in all Diviſions of Decimals, or of mixed Numbers, by Decimals, *the Exponent of the firſt Figure to the Left-hand, that is, of the higheſt Figure of the Quote, is the Exceſs of the Index of the loweſt Figure of the firſt particular Dividend, above the Index of the loweſt Figure of the Diviſor* (126); *that is, the Sum of the Indices of the laſt Figures to the Right in the Diviſor and Quote, is equal to the Index of the laſt Figure to the Right in the Dividend; that is, the Number of decimal Places in the Diviſor and Quote together, is the Number of Places in the Dividend, however they may have been increaſed by the Addition of Cyphers in the Operation.*

131. Hence,

XXXVI. *In Algebraick Terms, Diviſion is performed by the Reſolution of what is compounded by Multiplication.* Thus *a b* di-

---

131. Hence, *if the Dividend contains decimal Places, but the Diviſor none, the Number of Places of Decimals in the Quote will be the ſame as in the Dividend; and if the Diviſor has decimal Places, but the Dividend none, an equal Number of decimal Cyphers may be added to the Dividend*; whence there are no Decimals in the Quote.

132. *If both Diviſor and Dividend have Cyphers on the Right-hand, they may be entirely expunged, provided the Number expunged in each is equal* (Eucl. VII. 18.); *and if there are Cyphers on the Right of the Diviſor, and none on that of the Dividend, the Cyphers and an equal Number of the Right-hand Figures may be cut off during the Operation; but they muſt be reſtored to the Reſidue, if there is any; and if there is none, theſe Figures are the Reſidue.* For the Index of the higheſt, or firſt, Figure to the Left in the Quote, is the Index of the loweſt, or laſt, to the Right of the firſt Dividend leſſened by the Index of the loweſt, or laſt, ſignificant Figure to the Right of the Diviſor; that is, by the Number of Cyphers (18); therefore the Cyphers being cut off, an equal Number of Figures muſt be cut off from the Right of the Dividend; and as they cannot contain the Diviſor, which conſiſts of more Places, they muſt be either the Reſidue, or a Part of the Reſidue.

133. Hence, *an Integer is divided by any Power of Ten, by cutting off from the Right-hand ſo many Places for Decimals, as there are Units in the Index of the Power:* For the negative Index of the laſt Figure in this Quote, will be equal to the Index of the only ſignificant Figure of the Diviſor (130), whence their Sum is Cypher, that is, the Index of the Right-hand Figure of the Dividend. And *a mixed Number, or Decimal, is divided by any Power of Ten, by removing the Seperatrix ſo many Places to the Left, as there are Units in the Index of the Power.* For Unity making no Difference between the Figures of the Dividend and of the Quote, it will ſuffice, in order to know

the

ab divided by a gives for the Quotient b, $6ab$ divided by $2a$ gives $3b$; and divided by $-2a$ gives $-3b$. $-6ab$

---

the Quote, to diminiſh the Index of the Right-hand Figure of the Dividend, by the Index of the Power; that is, by the Number of Cyphers; that is, to augment its negative Value, by moving the Line ſo many Places to the Left, as the negative Indices increaſe to the Right; and the affirmative Index of the Diviſor being added to the negative Index of the Right-hand Figure of this Quote, will reduce it (XXIV); and the Sum will be the Exponent of the Right-hand Figure of the Dividend; Hence is deduced the *Rule for the Reduction of Sexageſimals into Decimals*; to wit, *divide the Sexageſimals by* 60; for the Diviſion by 60 not only divides by 6, but alſo moves the Line one Place to the Left.

134. *If the Diviſor is not an aliquot Part of the Dividend, the Diviſion may be terminated by annexing the Fraction mentioned Art* XXXVII. *or it may be continued until either an accurate Quote is had, or that it runs out into an infinite Series. It is continued by joining Cyphers to the Right Hand of the Reſidue* (53); *and the Figures in the Quote reſulting from continuing the Diviſion, become a Decimal Fraction, of ſo many Places, as Cyphers have been annexed to the Reſidue.* For thus, both Dividend and Diviſor are multiplied into the ſame Power of Ten (53), and conſequently the Value of the Quote is not altered (Eucl. VII. 17).

135. *An accurate Quote will be found by this Continuation of the Diviſion; that is, the vulgar Fraction annexed and reduced to its loweſt Terms will be reducible to an accurate Decimal, and the Diviſion will terminate, if the Diviſor can be meaſured by the Numbers* 2 *or* 5. For 2 and 5 being the only Meaſures of Ten, if they meaſure the Diviſor, the Diviſor will alſo meaſure ſome Power of Ten, and ſome Multiple of ſome Power of Ten, and conſequently the Product of the Reſidue into ſome Power of Ten (Eucl. VII. 32.); wherefore the Diviſion will terminate, and an accurate Quote is had in Decimals.

— $6ab$ divided by $2a$ gives — $3b$; and divided by — $2a$ gives $3b$. $16abc^3$ divided by $2ac$ gives $8bcc$. — $84a^2x^4$ divided

136. *The Quote will run into an infinite Series; that is, the vulgar Fraction, in its loweſt Terms, will not be reducible to an accurate Decimal, when the Diviſor cannot be meaſured by* 2 *or* 5. For 2 and 5 being the only Meaſures of Ten, and being alſo Prime to the Diviſor, the Diviſor and its Powers are Prime to Ten and its Powers (Eucl. VIII. 6.); but it is alſo Prime to the Dividend (Eucl. VII. 24.); therefore the Diviſor and its Powers are Prime to the Multiples of Ten and its Powers; and therefore to the Product of the Dividend into Ten, or into any Power of Ten (Eucl. VII. 26.); and therefore cannot divide it accurately; for if it could, a Number would meaſure a Number to which it is Prime, which is impoſſible (Eucl. VII. 21.).

137. *When the Quote runs into an infinite Series, if there happens any Reſidue equal to a former one, the ſame Figures muſt return and circulate in the Quote.* For Cyphers being always added to the Reſidue, that is, the Dividend being always the ſame Multiple of the Reſidue, when any Reſidue is equal to a former one, the Dividend muſt be equal to a former Dividend, and thence the Quote equal alſo to a former one; and conſequently the ſubſequent Reſidue equal to the former ſubſequent Reſidue, the ſubſequent Dividend equal to the former ſubſequent Dividend; and ſo the ſubſequent Quote equal to the former ſubſequent Quote, and ſo on.

138. *The Number of periodical Figures will never be more than the Diviſor leſs Unity; that is, the Denominator of the vulgar Fraction leſs Unity.* For the Reſidue being always leſs than the Diviſor, it may be any Number leſs by Unity than the Diviſor; but in ſo many Diviſions at moſt, as there are Units in the Diviſor, one of the former Reſidues muſt return again; and therefore the ſame Quote muſt alſo return, and continue the Circulation.

139. *It*

divided by — $12aaxx$ gives $7axx$ (*b*). Likewiſe $\frac{6}{35}$ divided

---

139. *It being generally ſufficient to have an aſſigned Number of Decimals in the Quote, the Diviſion will be uſefully abbreviated, eſpecially when the Diviſor is an indefinite Number, by keeping only ſo many Figures, or one more, to the Left-hand of both Dividend and Diviſor, as the required Decimals and Places of Integers in the Quote together make*; (126) *but it will be neceſſary to keep one Place more in the Dividend than in the Diviſor, if the Left-hand Figure of the Dividend be leſs than that of the Diviſor* (54); *then divide the Dividend, and the Reſidues continually unaugmented by ſo many Figures of the Diviſor to the Left, as are found to be contained in each Reſidue, always writing a Cypher before the Quotient Figure for every Place above one, that the Diviſor is ſhortened for the Diviſion of any particular Reſidue.* For theſe Cyphers, if the Diviſor is ſhortened of more Places than one, muſt be inſerted in order to keep the true Values, and Places, of the ſignificant Figures of the Quote (18); alſo, by leſſening the Diviſor and not increaſing the Reſidues, both Dividend and Diviſor are diminiſhed in the ſame Proportion; therefore the Quote will be true, except perhaps in the loweſt Place or two to the Right-hand.

140. *In every Diviſion, whether by Figures or Species, the Product of the Quote into the Diviſor is equal to the Dividend*; that is, the Dividend is equal to the Sum of all the Products of the whole Diviſor into all the Parts of the Quote; but the Parts of the Quote are an Integer and a Fraction, whoſe Numerator is the Reſidue and Denominator the Diviſor; therefore the Product of the Diviſor into the integral and Fractional Parts of the Quote, is equal to the Dividend.

XXXVI. (*b*) 141. Becauſe that which was compounded by Multiplication is reſolved by Diviſion, the Product in Multiplication being the Dividend in Diviſion; and becauſe in Multiplication, ſimilar Signs gave an affirmative Product, and diſſimilar Signs a negative one; therefore in Diviſion, *ſimilar Signs in the Dividend*

divided by $\frac{2}{5}$ gives $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ divided by $\frac{a}{b}$ gives $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ divided by $\frac{3acy}{2bb}$ gives $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{5}$ divided by 3 gives $\frac{2}{5}$; and reciprocally $\frac{6}{5}$ divided by $\frac{2}{5}$ gives $\frac{3}{1}$, or 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ divided by $2a$ gives $\frac{15aaz}{cc}$; and reciprocally divided by $\frac{15aaz}{cc}$ gives $2a$. Likewise $\sqrt{15}$ divided by $\sqrt{3}$ gives $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ divided by $\sqrt{cd}$ gives $\sqrt{ab}$ (c). $\sqrt{a^3c}$ by $\sqrt{ac}$ gives $\sqrt{aa}$, or a. $\sqrt[3]{35aay^3z}$ divided by $\sqrt[3]{5ayy}$ gives $\sqrt[3]{7ayz}$. $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ divided by $\frac{a^2}{c}$ gives $\sqrt{\frac{abb}{c}}$. $\frac{42ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ divided by $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ gives $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. And so $\frac{}{a+b}$

---

and Diviſor, will make the Quote affirmative; but diſſimilar ones, negative; that is, $+a) +ab (+b, +a) -ab (-b, -a) +ab (-b, -a) -ab (+b$.

(c) *Powers and Radicals muſt be brought to the ſame Name before they can be divided*, otherwiſe the Quote could have no certain Index.

142. *The Quote of Powers and of Radicals, of the ſame Denomination but of different Quantities, has the ſame Index with the Dividend and Diviſor*; ſo that the Quote of ſuch Powers is the ſame Power of the Quote of their Roots, and the Quote of ſuch Roots is the ſame Root of their Quote. Thus $a^m) b^m \left(\frac{b}{a}\right)^m$; for $a^m) b^m = \frac{b^m}{a^m} = \left[\frac{b}{a}\right]^m$. For the Diviſion of Powers and Radicals of the ſame Quantity, ſee Numbers 81 and 82; and for the Diviſion by a compound Surd, ſee Number 159.

(d) For

$\overline{a+b}\sqrt{ax}$ divided by $a+b$ gives $\sqrt{ax}$; and reciprocally divided by $\sqrt{ax}$ gives $a+b$. And $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ divided by $\frac{1}{a+b}$ gives $a\sqrt{ax}$, or divided by a gives $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$, or $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; and reciprocally divided by $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ gives a. *But in Divisions of this Sort you are to take care, that the Quantities divided by one another be of the same Kind,* viz. that Numbers be divided by Numbers, and Species by Species, Radical Quantities by Radical Quantities, Numerators of Fractions by Numerators, and Denominators by Denominators; also in Numerators, Denominators, and Radical Quantities, the Quantities of each Kind must be divided by homogeneous ones, or Quantities of the same Kind (*d*).

XXXVII. *Now if the Quantity to be divided cannot be thus resolved by the Divisor proposed, it is sufficient, when both the Quantities are Integers, to write the Divisor underneath, with a Line between them* (*e*). Thus to divide ab by

(*d*) For the Dividend, is an Aggregate of the Divisor alone (21).

XXXVII. (*e*) 143. *This Fraction truly expresses the Quote.* For the Numerator being some of the equal Parts into which an Unit is divided, and the Denominator, all those equal Parts, or the Unit itself, (7) the Fraction is to Unity, as the Numerator to the Denominator; but the Dividend is to the Divisor, as the Quote is to Unity (21); wherefore the Fraction and the Quote have the same Ratio to Unity, and are equal (Eucl. V. 9.)

Hence we have the Origin of the Notation of Vulgar Fractions, in which the Numerator, or Number above the Line, is placed there to shew, that it is a Dividend less than the Divisor, or Denominator placed below; so

 that

by c, write $\frac{ab}{c}$; and to divide $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ by a, write $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$, or $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. And so $\sqrt{ax-xx}$ divided by $\sqrt{cx}$ gives $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$, or $\sqrt{\frac{ax-cx}{cx}}$. And $\overline{aa+ab}\sqrt{aa-2xx}$ divided by $\overline{a-b}\sqrt{aa-xx}$ gives $\frac{aa+ab}{a-b}\sqrt{\frac{ax-2xx}{aa-xx}}$. And $12\sqrt{5}$ divided by $4\sqrt{7}$ gives $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

XXXVIII.

---

that a Fraction is called an improper one, if the Numerator is equal to, or greater than the Denominator; because it ought to expreſs ſome only of the equal Parts, whoſe whole Number is ſubſcribed; and if the Diviſion was made, the Quote would not be fractional, but integral, or mixed.

144. *Now, becauſe the Ratio of the Numerator to the Denominator will continue unvaried, if they are both multiplied or both divided by the ſame Number, it follows, that the ſame Fraction may be expreſſed an infinite Number of Ways*, by equal Multiplication; but the moſt commodious Form is that which conſiſts of the loweſt Terms, and it is found by an equal Diviſion of them both; hence alſo it appears, that *the Terms of equal Fractions are proportional* (Eucl. VII. 18.); *and converſely, that if the Terms are proportional, the Fractions are equal.*

145. *As a Fraction is to Unit, ſo is Unit to the reciprocal Fraction.* For the Fraction is to Unit, as its Numerator to its Denominator; but Unit is to the reciprocal Fraction, as the Numerator to the Denominator; whence, as the Fraction is to Unit, ſo is Unit to the reciprocal Fraction. Hence, *a Multiplier may be found, when a Diviſor is given; and alſo a Diviſor, when a Multiplier is given:* By which Method a Variety of uſeful Rules are derived, for Eaſe and Expedition, in common and mercantile Accompts,

XXXVIII,

XXXVIII. *But when these Quantities are Fractions, multiply the Numerator of the Dividend into the Denominator of the Divisor, and the Denominator into the Numerator, and the first Product will be the Numerator, and the latter the Denominator of the Quotient* (*f*). Thus to divide $\frac{a}{b}$ by $\frac{c}{d}$ write

---

XXXVIII. (*f*) 146. As the Divisor is to Unity, so is the Dividend to the Quote (21); but as a Fraction is to Unity, so is its Numerator to its Denominator; therefore, as the Numerator of the dividing Fraction is to its Denominator, so is the Dividend, whether Integer or Fraction, to the Quote; and therefore, *in all Cases of Division by a Fraction, the Dividend is to be multiplied by the Denominator, and divided by the Numerator of the dividing Fraction*, as in Number 126.

147. Hence, *a Fraction is divided by an Integer* (which is a Fraction whose Denominator is Unity) *either by dividing the Numerator, or by multiplying the Denominator of the Fraction by the Integer.* For it is the same thing to diminish any given Number of Parts in any given Ratio, the Magnitude of the Parts being unchanged; or, to diminish the Magnitude of the Parts in the same Ratio, their Number being unchanged; but their Magnitude is always diminished in any Ratio, by increasing the Divisor or Denominator in that Ratio (60); therefore, by multiplying the Integer into the Denominator, that Magnitude of the Parts is diminished in the Ratio of the Integer to Unity, their Number being unchanged: And by dividing the Numerator by it, the Number of the Parts is diminished in the same Ratio, their Magnitude being unchanged.

148. *The Quote of two Fractions is found* [there being always a Division by the Numerator of the Divisor, and a Multiplication by the Denominator of the Divisor (146, 147).] *First by dividing the Numerator of the Dividend by the Numerator of the Divisor, and the Denominator of the Dividend by the Denominator of the Divisor.* For the Dividend is multiplied by the Denominator of the Divisor,

write $\frac{ad}{bc}$, that is, multiply a by d and b by c. In like manner,

---

in having its own Denominator divided by it; (146, 147) and the Dividend is directly divided by the Numerator.

149. *Secondly, by multiplying the Numerator of the Dividend by the Numerator, and the Denominator of the Dividend by the Denominator of the Reciprocal of the Divisor* (145). For thus the Dividend is multiplied directly by the Denominator of the Divisor, and it is divided by the Numerator, because its own Denominator is multiplied by it (147).

Now it is evident, that this Method of Division is equivalent to a Division of the Numerators (after the Fractions have been reduced to one common Denomination) and expunging the common Denomination, or rather an Abbreviation of this Operation; (LIX.) and that the *Rule* commonly given *for dividing Fractions which have the same Denominator, directing the Division to be made by the Numerators, and to expunge the common Denominator*, is a further Abbreviation of this, and saves the Trouble of reducing the Quote to lower Terms, by dividing its Terms by this common Denominator (144). In like Manner, the Rule for Multiplication, Number 65, is an Abbreviation of a Multiplication by the Numerators, (after the Fractions have been reduced to a common Denominator) and subscribing the common Denominator; and the Direction to subscribe the common Denominator, when the given Factors have one, to the Product of their Numerators, is a further Abbreviation.

150. *Thirdly, by multiplying the Quote of the Denominators, by the Numerator of the Divisor:* For thus the Dividend is multiplied by the Denominator of the Divisor, because its own Denominator is divided by it (147); and it is divided by the Numerator of the Divisor, because its own Denominator, in the Quote of the Denominators, is multiplied by it.

151. *Lastly, by multiplying the Quote of the Numerators, by the Denominator of the Divisor;* For thus the Dividend

is

manner, $\frac{3}{7}$ by $\frac{5}{4}$ gives $\frac{12}{35}$. And $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ divided by $\frac{2c}{5a}$ gives $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$, and divided by $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ gives $\frac{15a^3x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$. After the same manner, $\frac{ad}{b}$ divided by c (or by $\frac{c}{1}$) gives $\frac{ad}{bc}$. And c (or $\frac{c}{1}$) divided by $\frac{ad}{b}$ gives $\frac{bc}{ad}$. And $\frac{3}{7}$ divided by 5 gives $\frac{3}{35}$. And 3 divided by $\frac{5}{4}$ gives $\frac{12}{5}$. And $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$ divided by a gives $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. And $\sqrt{a+b}\sqrt{cx}$ divided by $\frac{a}{c}$ gives $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$. And $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ divided by $3\sqrt{cd}$ gives $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{cca}}$; and divided by $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ gives $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. And $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ divided by $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ gives $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$, and so in others.

XXXIX. *A Quantity compounded of several Terms, is divided by dividing each of its Terms by the Divisor.* Thus $aa+3ax-xx$ divided by a gives $a+3x-\frac{xx}{a}$. *But when the Divisor consists also of several Terms, the Division is*

---

is multiplied by the Denominator of the Divisor, because the Quote of the Numerators is multiplied by it; and it is directly divided by the Numerator of the Divisor. The second Method is most useful, being free from compound Fractions.

is performed as in Numbers. Thus to divide $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ by $a - b$, ſay, how many Times is a contained in a^3, viz. the firſt Term of the Diviſor in the firſt Term of the Dividend? Anſwer aa. Wherefore write aa in the Quotient; and having ſubtracted $a - b$ multiplied into aa, or $a^3 - aab$ from the Dividend, there will remain $2aac - 3abc + bbc$ yet to be divided. Then ſay again, how many Times a in $2aac$? Anſwer $2ac$. Wherefore write alſo $2ac$ in the Quotient, and having ſubtracted $a - b$ into $2ac$, or $2aac - 2abc$ from the aforeſaid Remainder, there will yet remain $-abbc + bc$. Wherefore ſay again, how many Times a in $-abc$? Anſwer $-bc$, and then write $-bc$ in the Quotient; and having, in the laſt Place, ſubtracted $+a - b$ into $-bc$, viz. $-abc + bbc$ from the laſt Remainder, there will remain nothing; which ſhews that the Diviſion is at an end, and the Quotient coming out $aa + 2ac - bc$.

XL. *But that theſe Operations may be duly reduced to the Form which we uſe in the Diviſion of Numbers, the Terms both of the Dividend and the Diviſor muſt be diſpoſed in Order, according to the Dimenſions of that Letter which is judged moſt proper for the Operation*; ſo that thoſe Terms may ſtand firſt, in which that Letter is of moſt Dimenſions, and thoſe in the ſecond Place whoſe Dimenſions are next higheſt; and ſo on to thoſe wherein that Letter is not at all involved, or into which it is not at all multiplied, which ought to ſtand in the laſt Place. Thus in the Example we juſt now brought, if the Terms are diſpoſed according to the Dimenſions of the Letter a, the following Diagram will ſhew the Form of the Work, viz.

$$
\begin{array}{l|l}
a - b) a^2 + 2aac - aab - 3abc + bbc & (aa + 2ac - bc \\
\hline
a^3 - aab & \\
\hline
0 + 2aac - 3abc & \\
\quad 2aac - 2abc & \\
\hline
\quad 0 - abc + bbc & \\
\quad\quad - abc + bbc & \\
\hline
\quad\quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Where

Where may be seen, that the Term a^3, or a of three Dimensions, stands in the first Place of the Dividend, and the Terms $\begin{matrix} 2aac \\ -aab \end{matrix}$, in which a is of two Dimensions, stand in the second Place, and so on. The Dividend might also have been writ thus;

$$a^3 \begin{matrix} +2c \\ -b \end{matrix} aa - 3bca + bbc.$$

Where the Terms that stand in the second Place are united, by collecting together the Factors of the Letter, according to which the Order is made (*g*). And thus if the Terms were to be disposed according to the Dimensions of the Letter b, the Business must be performed as in the following Diagram, the Explication whereof we shall here subjoin.

$$\begin{array}{l}
-b+a)\ cbb \begin{matrix} -3ac \\ -aa \end{matrix} b \begin{matrix} +a^3 \\ +2aac \end{matrix} \left(-cb \begin{matrix} +2ac \\ +aa \end{matrix}\right. \\
\quad\ \ \underline{cbb - acb} \\
\qquad\quad 0 \begin{matrix} -2ac \\ -aa \end{matrix} b \begin{matrix} +a^3 \\ +2aac \end{matrix} \\
\qquad\qquad\quad \begin{matrix} -2ac \\ -aa \end{matrix} b \begin{matrix} +2aac \\ +a^3 \end{matrix} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0
\end{array}$$

Say,

XL. (*g*) By ranging both Dividend and Divisor according to the Dimensions of the same Letter, it will readily be found, how often the first Term of the Divisor is contained in the first Term of the Dividend; also, the Products of the Terms of the Divisor into each particular Term of the Quote, as they are found, will come readily under the similar Terms of the Dividend, in order to be subducted from them.

The Number of Terms in the Quote of a compound algebraic Quantity, divided by another, is the Number of Terms of the Dividend divided by the Number of Terms in the Divisor, provided that none of the Terms have been united, or destroyed by contrary Signs; for the Number of Terms in the Dividend, is the Product of the Numbers in the Divisor and Quote.

Say, How many Times is $-b$ contained in $-cb$? Anſwer $-c$. Wherefore having writ $-c$ in the Quotient, ſubtract $\overline{-b+a} \times -c$, or $bc-ac$, and there will remain in the ſecond Place $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}$ b. To this Remainder add, if you pleaſe, the Quantities that ſtand in the laſt Place, viz. $\begin{matrix}a^3\\2aac\end{matrix}$, and ſay again, how many Times is $-b$ contained in $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}$ b? Anſwer $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$. Theſe therefore being writ in the Quotient, ſubtract $-b+a$ multiplied by $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$ or $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}$ b $\begin{matrix}+2aac\\+a^3\end{matrix}$, and there will remain nothing. Whence it is manifeſt, that the Diviſion is at an End, the Quotient coming out $-cb+2ac+aa$, as before.

And thus, if you were to divide $aay^4-aac^4+yyc^4+y^6-2y^4cc-a^6-2a^4cc-a^4yy$ by $yy-aa-cc$. I order or place the Quantities according to the Dimenſions of the Letter y, thus:

$$yy\ \begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\ y^6\ \begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}\ y^4\ \begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}\ yy\ \begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc.\\-aac^4\end{matrix}$$

Then I divide as in the following Diagram. Here are added other Examples, in which you are to take Notice, that where the Dimenſions of the Letter, which this Method of ordering ranges, does not always proceed in the ſame Arithmetical Progreſſion, but ſometimes interrupted, in the defective Places this Mark $\cdot$ is put.

$$yy\ \begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\ y^6\ \begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}\ y^4\ \begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}\ yy\ \begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc.\\-aac^4\end{matrix}$$

$$y^6\ \begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\ y^4. \qquad \Big(y^4\ \begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}\ y^2\ \begin{matrix}+a^4\\+aacc.\end{matrix}$$

$$-2a^4$$

$$
\begin{array}{lll}
 & & -2a^4 \\
0 & \begin{matrix}+2aa \\ -cc\end{matrix}\, y^4 & -aacc\, y^2 \\
 & & +c^4 \\
\hline
0 & & +a^4 \\
 & & +aacc\, y^2 \\
 & & +a^4 \qquad -a^6 \\
 & & +aacc\, y^2 - 2a^4cc \\
 & & \qquad\quad -aac^4 \\
\hline
 & & 0 \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a+b)\ \underline{aa * -bb}\ (a-b \\
\qquad\quad \underline{aa+ab} \\
\qquad\quad 0-ab \\
\qquad\quad \underline{-ab-bb} \\
\qquad\qquad 0 \qquad 0\ (h).
\end{array}
$$

$yy - 2ay$

(*h*) 152. Becauſe Diviſion reſolves what Multiplication has compounded, therefore *if any Quantity is diviſible by another, whether ſimple, or binome, or trinome, &c. that Diviſor was a Factor, or Root, in its Compoſition.*

153. *If a Quantity, having all its Terms rational, is diviſible by a Binome, one of whoſe Members is irrational, it ſhall be diviſible alſo by the ſame Binome having its irrational Member affected with the contrary Sign; and according as that Member is real or imaginary, ſo muſt the Member of the contrary Binome be* (120).

154. *If the higheſt Term of a Dividend has no Coefficient but Unity, and no fractional Term, none of its binome Diviſors can have Coefficients different from Unity, or their ſecond Members fractional; but if the higheſt Term has a Coefficient different from Unity, either one, or all ſuch Diviſors have Coefficients differing from Unity; or one, or all of them, have their ſecond Members fractional* (121).

155. *If algebraic Diviſion is not terminated by a Fraction, as in Art.* XXXVII. *it will run into an infinite Series; and by obſerving the firſt three or four Terms, the Law, which the Terms obſerve, will be known; by which Means, without any more Diviſion, the Quote or Series may be continued on; and*

theſe

$$yy - 2ay + aa) \quad (yy + 2ay - \tfrac{1}{2}aa$$
$$y^4 * - 3\tfrac{1}{2}aayy + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4$$
$$y^4 - 2ay^3 + aayy$$
$$0 + 2ay^3 - 4\tfrac{1}{2}aayy$$
$$+ 2ay^3 - 4\ aayy + 2a^3y$$
$$0 - \tfrac{1}{2}aayy + a^3y$$
$$- \tfrac{1}{2}aayy + a^3y - \tfrac{1}{2}a^4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

---

these Series being, in general Symbols or Species, are univerſal Rules for expreſſing all Quantities by infinite Series, an infinite Number of Ways. Thus,

A. $x-1)\ x^4\ (x^3+x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}$, &c. $=$
x^4-x^3
x^3-x
x^2-x
x, &c.

$\frac{x^4}{x-1}$ the Series deſcends, or aſcends, according as x is greater or leſs than Unity; the common Diviſor or Multiplier being x.

B. $x+1)\ x^4\ (x^3-x^2+x-1+x^{-1}-x^{-2}$, &c. the ſame
x^4+x^3
$-x^3-x^2$
$+x^2+x$
$-x$, &c.

the Terms being alternately affirmative and negative.

C. $a-b)\ x\ (\frac{xb^0}{a} + \frac{xb}{a^2} + \frac{xb^2}{a^3} + \frac{xb^3}{a^4}$, &c. $= xa^{-1} +$
$x - \frac{xb}{a}$
$\frac{xb}{a} - \frac{xb^2}{a^2}$
$\frac{xb}{a} - \frac{xb^2}{a^2}$
$\frac{xb^2}{a^2}$

$xba^{-2} + xb^2a^{-3} + xb^3a^{-4}$ (76), &c.

&c. the Terms all poſitive, the common Multiplier $\frac{b}{a}$.

D. $a + b)$

$$aa + ab\sqrt{2} + bb \quad (aa - ab\sqrt{2} + bb$$

$$a^4 \quad * \quad * \quad * \quad + b^4$$

$$a^4 + a^3b\sqrt{2} + aabb$$

$$-a^3b\sqrt{2} - aabb$$

$$-a^3b\sqrt{2} - 2aabb - ab^3\sqrt{2}$$

$$+ aabb + ab^3\sqrt{2}$$

$$+ aabb + ab^3\sqrt{2} + b^4$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Some

D. $a+b) x\left(\frac{xb^0}{a} - \frac{xb}{a^2} + \frac{xb^2}{a^3} - \frac{xb^3}{a^4}\right.$, &c. $= xa-1 - xba-2 + xb^2a-3 - xb^3a-4$ the same, the Terms alternately affirmative and negative.

156. *If in* D *we put the Numerator of any Fraction for* x, *and its Denominator less Unity for* a, *and Unity for* b, *we have all vulgar Fractions, except* $\frac{1}{2}$, *expressed by an infinite Series.* For $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = 1 + 1 + 1$, &c.

Thus, $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$, &c.
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$, &c.

Thus, $\frac{2}{3} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{2} - \frac{2}{4} + \frac{2}{8} - \frac{2}{16} + \frac{2}{32} - \frac{2}{64}$, &c.
$= 1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{4} - \frac{2}{8} + \frac{2}{16} - \frac{2}{32}$.

Thus, $\frac{3}{4} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{3} - \frac{3}{9} + \frac{3}{27} - \frac{3}{81} + \frac{3}{243} - \frac{3}{729}$, &c.
$= 1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{9} - \frac{3}{27} + \frac{3}{81} - \frac{3}{243}$.

157. *If in* C *we substitute for* x *the Numerator of a vulgar Fraction, and for* a *the Denominator more Unity, and*

Some begin Diviſion from the laſt Terms, but it comes to the ſame Thing, if, inverting the Order of the Terms, you

---

for b *Unity, we have another Law for expreſſing all vulgar Fractions.*

Thus, $\frac{1}{2} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$, &c. therefore $\frac{2}{2} = 1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}$, &c.

Thus, $\frac{2}{3} = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{64} + \frac{2}{256}$, &c. therefore $\frac{3}{3} = 1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256}$, &c.

Thus, $\frac{3}{4} = \frac{3}{5-1} = \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \frac{3}{625}$, &c. therefore $\frac{4}{4} = 1 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \frac{4}{625}$, &c.

158. Whence it appears, that if x be put univerſally for any Integer, then

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{x-1}{x^3} + \frac{x-1}{x^4}, \text{ &c.} = 1$$

$$\frac{2x-2}{x} + \frac{2x-2}{x^2} + \frac{2x-2}{x^3} + \frac{2x-2}{x^4}, \text{ &c.} = 2$$

$$\frac{3x-3}{x} + \frac{3x-3}{x^2} + \frac{3x-3}{x^3} + \frac{3x-3}{x^4}, \text{ &c.} = 3, \text{ &c.}$$

which gives *an univerſal Rule for expreſſing all Integers by infinite Series, an infinite Number of Ways.*

But all theſe Series are at once derived from the binomial Theorem: For all Fractions may be conſidered as compounded of Radicals, multiplied either into rational or ſurd Quantities; thus $\frac{x}{a+b} = x \times \overline{a+b}^{-1}$: and $\frac{x}{\sqrt{a-b}} = x \times \overline{a-b}^{-\frac{1}{2}}$; wherefore having a general

Ex-

you begin from the firſt. There are alſo other Methods of

Expreſſion in Number 107, to which particular Caſes may be compared, we may thence derive the particular Series reſulting from Diviſion. Thus (ſee C and D in 155) $\frac{x}{a \pm b} = x \times \overline{a \pm b}^{-1} = A \pm \frac{n}{1} QA + \frac{n-1}{2} QB$, &c. $= x - \frac{m}{n} \mp a x - \frac{m-n}{2n}$, &c. (103) $= x a^{-1} \mp x b a^{-2} + x b^2 a^{-3}$, &c. (155).

159. *When a binome Surd is to be divided by another, the Quote will be expreſſed in the moſt ſimple Form, by multiplying both Numerator and Denominator, by that Surd which multiplied into the Denominator gives a rational Product* (118).

Thus, $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{12}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{12}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{100} + 2\sqrt{60} + 6}{5 - 3} = \frac{16 + 2\sqrt{60}}{2} = 8 + 2\sqrt{15}$.

And in general, when any Quantity is divided by a binome Surd as $x^n \pm a^1$, *where* n *and* 1 *repreſent any Fractions whatſoever, take* m *the leaſt integer Number, which is meaſured by* n *and* $\frac{n}{1}$, *multiply both Numerator and Denominator by* $x^{m-n} + x^{m-2n} a^1 + x^{m-3n} a^{21}$, *&c. and the Denominator of the Product will become rational* (119); *and equal to* $x^m - a^{\frac{m1}{n}}$; *then divide all the Members of the Numerator, by this rational Quantity, and the Quote ariſing will be that of the propoſed Quantity divided by the binome Surd, in its leaſt Terms.*

of dividing, but it is ſufficient to know the moſt eaſy and commodious.

Of EXTRACTION *of* ROOTS.

XLI. *WHEN the Square Root of any Number is to be extracted, it is firſt to be noted with Points in every other Place, beginning from Unity; then you are to write down ſuch a Figure for the Quotient, or Root, whoſe Square ſhall be equal to, or neareſt, leſs than the Figure or Figures to the firſt Point. And then ſubtracting that Square, the other Figures of the Root will be found one by one, by dividing the Remainder by the double of the Root as far as extracted, and each Time taking from that Remainder the Square of the Figure that laſt came out, and the Decuple of the aforeſaid Diviſor augmented by that Figure.*

Thus to extract the Root out of 99856, firſt point it after this Manner, 99856; then ſeek a Number whoſe Square ſhall equal the firſt Figure 9, viz. 3, and write it in the Quotient; and then having ſubtracted from 9, 3×3, or 9, there will remain 0; to which ſet down the Figures to the next Point, viz. 98 for the following Operation. Then, taking no Notice of the laſt Figure 8, ſay, How many times is the Double of 3, or 6, contained in the firſt Figure 9? Anſwer 1; wherefore having writ 1 in the Quotient, ſubtract the Product of 1×61, or 61, from 98, and there will remain 37, to which connect

```
. . .
99856 (316
6
---
098
 61
---
3756
3756
---
   0
```

Thus, $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{16}+2+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16}+2+\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} \times \frac{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{40}+2\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{80}}{2}$

$= 2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{10}.$

connect the laſt Figures 56, and you will have the Number 3756, in which the Work is next to be carried on. Wherefore alſo neglecting the laſt Figure of this, viz. 6, ſay, How many times is the Double of 31, or 62, contained in 375, (which is to be gueſſed at from the initial Figures 6 and 37, by taking Notice how many times 6 is contained in 37?) Anſwer 6; and writing 6 in the Quotient, ſubtract 6 x 626, or 3756, and there will remain 0; whence it appears that the Buſineſs is done; the Root coming out 316.

And ſo if you were to extract the Root out of 22178791, firſt having pointed it, ſeek a Number, whoſe Square (if it cannot be exactly equalled) ſhall be the next leſs Square to 22, the Figures to the firſt Point, and you will find it to be 4. For 5 x 5, or 25, is greater than 22; and 4 x 4, or 16, leſs; wherefore 4 will be the firſt Figure of the Root. This, therefore, being writ in the Quotient, from 22 take the Square 4 x 4, or 16, and to the Remainder 6 adjoin moreover the next Figures 17, and you will have 617, from whoſe Diviſion by the Double of 4 you are to obtain the ſecond Figure of the Root, viz. neglecting the laſt Figure 7, ſay, how many times is 8 contained in 61? Anſwer 7; wherefore write 7 in the Quotient, and from 617 take the Product of 7 into 87, or 609, and there will remain 8; to which join the two next Figures 87, and you will have 887, by the Diviſion whereof by the Double of 47, or 94, you are to obtain the third Figure; as ſay, How many times is 94 contained in 88? Anſwer 0; wherefore write 0 in the

```
. . . .
22178791 (4709,43637, &c.
16
---
617
609
---
 88791
 84681
---
 411000
 376736
---
 3426400
 2825649
---
 60075100
 56513196
---
 356190400
 282566169
---
 73624231
```


o

Quotient, and adjoin the two laſt Figures 91, and you will have 88791, by whoſe Diviſion by the Double of 470, or 940, you are to obtain the laſt Figure, viz. ſay, How many times 940 in 8879? Anſwer 9; wherefore write 9 in the Quotient, and you will have the Root 4709.

But ſince the Product 9 × 9409 or 84681 ſubtracted from 88791, leaves 4110, that is a Sign *that* the *Number* 4709 *is not the Root* of the *Number* 22178791 *preciſely*, but that it is a little leſs. And *in this Caſe, and in others like it, if you deſire the Root ſhould approach nearer, you muſt carry on the Operation in Decimals, by adding to the Remainder two Cyphers in each Operation.* Thus the Remainder 4110 having two Cyphers added to it, becomes 411000; by the Diviſion whereof by the Double of 4709, or 9418, you will have the firſt Decimal Figure 4. Then having writ 4 in the Quotient, ſubtract 4 × 94184, or 376736 from 411000, and there will remain 34264. And ſo having added two more Cyphers, the Work may be carried on at Pleaſure, the Root at length coming out 4709,43637, &c.

XLII. *But when the Root is carried on half-way, or above, the reſt of the Figures may be obtained by Diviſion alone.* As in this Example, if you had a mind to extract the Root to nine Figures, after the five former 4709,4 are extracted, the four latter may be had, by dividing the Remainder by the Double of 4709,4 (*a*).

And

XLII. (*a*) The Diviſion by the Double of the Root found to Half the Number of Places, differs from the whole Operation of Extraction in this only, that the Square of each Figure added to the Root is not now ſubducted from the Reſolvend; now, as in both Operations, the additional Figure is always determined by the firſt Figures to the Left of the Reſolvend and of the doubled Root, the ſame Figures will be determined both ways for ſo many Places as there were Figures rightly determined before, but no further; for after juſt ſo many ſubſequent Diviſions, thoſe Figures of the Reſolvend,

from

And after this Manner, if the Root of 32976 was to be extracted to five Places in Numbers: After the Figures are pointed, write 1 in the Quotient, as being the Figure whose Square 1 × 1, or 1, is the greatest that is contained in 3 the Figure to the first Point; and having taken the Square of 1 from 3, there will remain 2; then having set the two next Figures, viz. 29 to it, (viz. to 2) seek how many times the Double of 1, or 2, is contained in 22, and you will find indeed that it is contained more than ten times; but you are never to take your Divisor ten times, no, nor nine times in this Case; because the Product of 9 × 29, or 261, is greater than 229, from which it would be to be taken. Wherefore say only 8: And then having writ 8 in the Quotient, and subtracted 8 × 28, or 224, there will remain 5; and having set down to this the Figures 76, seek how many times the Double of 18, or 36, is contained in 57, and you will find 1, and so write 1 in the Quotient; and having subtracted 1 × 361, or 361 from 576, there will remain 215. Lastly, to obtain the remaining Figures, divide this Number 215 by the Double of 181, or 362, and you will have the Figures 59, which being writ in the Quotient, you will have the Root 181,59.

```
     . . .
     32976 (181,59
     —
     1
     —
  2) 229
     224
  ———————
 36)  576
      361
  ———————
362) 215 (59, &c.
```

After the same way Roots are also extracted out of Decimal Numbers, Thus the Root of 329,76 is 18,159; and the Root of 3,2976 is 1,8152; and the Root of 0,032976 is 0,18159, and so on. But the Root of 3297,6 is 57,4247; and the Root of 32,976 is 5,74247.

 And

---

from which the Squares of the added Figures were not subducted, will become the first toward the Left-hand of the Resolvend, and being too great will (when divided by the doubled Root) determine the succeeding Figures of the Root too great.

And thus the Root of 9,9856 is 3,16. But the Root of 0,99856 is 0,999279, &c. as will appear from the following Diagrams.

```
     3297,60 (57,4247, &c.          9,9856 (3,16
     25                             9
    ----                           ---
10)  797                        6) 98
     749                           61
    ----                           ----
114)  4860                      62) 3756
      4576                          3756
     -----                          ----
1148)  284 (247                      0
```

```
     0,998560 (0,999279, &c,
        81
      ----
18)   1885
      1701
      -----
198)  18460
      17901
      -----
1998)  559 (279  (b).
```

XLIII. I will comprehend the Extraction of the Cubic Root, and of all others, under one general Rule, consulting rather the Ease of understanding the Praxis than the Expeditiousness of it, lest I should too much retard the Learner in Things that are of no frequent Use, viz. *every third Figure beginning from Unity* (*c*) *is first*

(*b*) Beside this Method of Approximation to the Roots of surd Powers (31) by Decimals, see others and their Investigation in Number 306.

XLIII. (*c*) 160. Because that when Unity is continually multiplied into any Digit, the Number of Places in

firſt of all to be pointed, if the Root to be extracted be a Cubic one; or every fifth, if it be a Quadrato-Cubic, or of the fifth Power,

---

in the Product can never exceed the Number of Places in the Factors, when the Factor is always the ſame, the Number of Places in the Power can never be a greater Multiple of the Number of Places in the Root, than the Number of Multiplications is of Unity; that is, than the Index of the Power is of Unity (XIV): It follows, that *if the Number of Places in the Power be ſeparated into Periods according to the Index of the Power, proceeding from Unity to the Left in Integers, and to the Right in Decimals, the Number of Periods is equal to the Number of Places in the Root.*

161. *The Square Root of an Integer muſt be either an Integer, or a Surd, i. e. irrational and incommenſurable to Unity.* For let the Integer propoſed be B, and let the Square Root be greater than a, but leſs than $a+1$; if it can be commenſurate with Unity, let it be $a+\frac{m}{n}=\frac{an+m}{n}$ (Eucl. VII. 17); therefore $\frac{\overline{an+m}^2}{n^2}$ is equal to the Integer B; but $\frac{\overline{an+m}^2}{n^2}$ can never be equal to any integer Number; therefore the Root cannot be commenſurate to Unity. Now $\frac{\overline{an+m}^2}{n^2}$ cannot be equal to any Integer, becauſe m and n being prime to each other (Eucl. VII. 24.), $an+m$ is prime to n; therefore $\overline{an+m}^2$ is prime to n^2; wherefore $\frac{\overline{an+m}^2}{n^2}$ is a Fraction in its loweſt Terms, and cannot be equal to any Integer. *The Square, therefore, of a mixed Number is ſtill mixed, and no Integer.* In the ſame Manner the Cube of a mixed Number is mixed, &c.

162. Hence *the Square Roots (not being Laterals) of all Numbers are Incommenſurables; alſo the Cube Roots (not being Laterals) of all Numbers are Incommenſurables;* and *Quantities, that are to one another in the Proportion of ſuch Numbers, muſt have their Square Roots, or Cube Roots, incommen-*

Power, &c. and then such a Figure is to be writ in the Quotient, whose greatest Power (i. e. whose Cube, if it be a cubic Power, or whose Quadrato-Cube, if it be the fifth Power, &c.) shall either be equal to the Figure or Figures before the first Point, or the next less; and then having subtracted that Power, the next Figure will be found by dividing the Remainder augmented by the next Figure of the Resolvend, by the next greatest Power of the Quotient, multiplied by the Index of the Power, to be extracted; that is, by the triple Square of the Quotient, if the Root be a cube one; or by the quintuple Biquadrate, i. e. five times the Biquadrate, if the Root be of the fifth Power, &c. And having again subtracted the greatest Power of the whole Quotient from the first Resolvend, the third Figure will be found by dividing that Remainder augmented by the next Figure of the Resolvend, by the next greatest Power of the whole Quotient multiplied by the Index of the Power to be extracted; and so on, in infinitum.

Thus to extract the Cube Root of 13312053, the Number is first to be pointed after this Manner, viz. 13312053. Then you are to write in the Quotient the Figure 2, whose Cube 8 is the next less Cube to the Figures 13 (which is not a perfect Cube Number), or to the first Point; and having subtracted that Cube, there will remain 5; which being augmented by the next Figure of the Resolvend 3, and divided by the triple

---

commensurable. But though they are incommensurable with Unity, *they are commensurable in Power with it*; because their Powers are Integers, i. e. Multiples of an Unit; they may also be sometimes commensurate one to another, when they have a common Measure, by which being divided they have rational Coefficients combined with the Root of that common Measure; for their Ratio is then effable by Numbers, to wit, by those Coefficients.

163. *The Difference between an irrational Root, and the next greater and next less rational Roots, of the same Name with it, is less than Unity:* For the rational Roots of the same Name, which are the next greater and less, are Laterals (161), and differ but by Unity.

triple Square of the Quotient 2, by seeking how many times 3 × 4, or 12, is contained in 53, it gives 4 for the second Figure of the Quotient. But since the Cube of the Quotient 24, viz. 13824 would come out too great to be subtracted from the Figures 13312 that precede the second Point, there must only 3 be writ in the Quotient. Then the Quotient 23 being in a separate Paper or Place multiplied by 23 gives the Square 529, which again multiplied by 23 gives the Cube 12167, and this taken from 13312, will leave 1145; which augmented by the next Figure of the Resolvend 0, and divided by the triple Square of the Quotient 23, viz. by seeking how many times 3 × 529, or 1587, is contained 11450, it gives 7 for the third Figure of the Quotient. Then the Quotient 237, multiplied by 237, gives the Square 56169, which again multiplied by 237 gives the Cube 13312053, and this taken from the Resolvend leaves 0. Whence it is evident, that the Root sought is 237.

```
                    13312053 (237
Subtract the Cube   8
                    ---
          12) rem.  53 (4 or 3
              ---------------
Subtract Cube 12167
        1587) rem. 11450 (7
              ---------------
Subtract Cube 13312053
                Remains 0
```

And so to extract the Quadrato-Cubical Root of 36430820, it must be pointed over every fifth Figure, and the Figure 3, whose Quadrato-Cube (or fifth Power) 243 is the next less to 364, viz. to the first Point must be writ in the Quotient. Then the Quadrato-Cube 243 being subtracted from 364, there remains 121, which augmented by the next Figure of the Resolvend, viz. 3, and divided by five times the Biquadrate of the Quotient, viz. by seeking how many times 5 × 81, or 405, is contained in 1213, it gives 2 for the second Figure. That

```
                36430820 (32,5
                ---------
                243
          405) 1213 (2
                ----
                33554432
      5242880) 2876388,0 (5
```

Quotient 32 being thrice multiplied by itself, makes the Biquadrate 1048576; and this again multiplied by 32, makes the Quadrato-Cube 33554432, which being subtracted from the Resolvend leaves 2876388. Therefore 32 is the Integer Part of the Root, but not the exact Root; wherefore, if you have a mind to prosecute the Work in Decimals, the Remainder, augmented by a Cypher, must be divided by five times the aforesaid Biquadrate of the Quotient, by seeking how many times 5×1048576, or 5242880, is contained in 2876388,0, and there will come out the third Figure, or the first Decimal 5. And so by subtracting the Quadrato-Cube of the Quotient 32,5 from the Resolvend, and dividing the Remainder by five times its Biquadrate, the fourth Figure may be obtained. And so on *in infinitum.*

XLIV. *When the Biquadratic Root is to be extracted, you may extract twice the Square Root, because* $\sqrt{4}$ *is as much as* $\sqrt{2} \times 2$. *And when the Cubo-Cubic Root is to be extracted, you may first extract the Cube Root, and then the Square Root of that Cube Root, because* $\sqrt{6}$ *is the same as* $\sqrt{2} \times 3$; whence some have called these Roots not Cubo-Cubic ones, but Quadrato-Cubes, and the same is to be observed in other Roots, whose Indexes are not prime Numbers.

XLV. *The Extraction of Roots out of simple Algebraic Quantities, is evident, even from the Notation itself*; as that $\sqrt{aa}$ is a, and that $\sqrt{aacc}$ is ac, and that $\sqrt{9aacc}$ is $3ac$, and that $\sqrt{49a^4xx}$ is $7aax$. And also, that $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$, or $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$, is $\frac{aa}{c}$; and that $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$, is $\frac{aab}{c}$; and that $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$, is $\frac{3az}{5b}$; and that $\sqrt{\frac{4}{9}}$ is $\frac{2}{3}$; and that $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{27a^3}}$, is $\frac{2bb}{3a}$; and that $\sqrt[4]{aabb}$, is $\sqrt{ab}$. Moreover, that $b\sqrt{aacc}$, or b into $\sqrt{aacc}$, is b into ac, or abc. And that $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$, is $3c \times \frac{3az}{5b}$; or $\frac{9acz}{5b}$.

$\frac{9acx}{5b}$. And that $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$, is $\frac{a+3x}{c}\times\frac{2bxx}{9a}$; or $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$. (*d*)

XLVI. I say, these are all evident, because it will appear, at first Sight, that the proposed Quantities are produced by multiplying the Roots into themselves (as aa from $a\times a$, $aacc$ from ac into ac, $9aacc$ from $3ac$ into $3ac$, &c.) But *when Quantities consist of several Terms, the Business is performed as in Numbers.* Thus, to extract the Square Root out of $aa+2ab+bb$, in the first Place, write the Root of the first Term aa, viz. a in the Quotient, and having subtracted its Square $a\times a$, there will remain $2ab+bb$ to find the Remainder of the Root by. Say, therefore, How many times is the Double of the Quotient, or $2a$, contained in the first Term of the Remainder $2ab$? I answer b; therefore write b in the Quotient, and having subtracted the Product of b into $\overline{2a+b}$, or $2ab+bb$, there will remain nothing. Which shews that the Work is finished, the Root coming out $a+b$ (*e*).

$aa+2ab+bb$	$(a+b$
aa	
—	
0	
	$+2ab+bb$
	0 0

And

XLV. (*d*) The Roots of single Quantities are extracted by dividing their Indices by the Number denominating their Root (85). If the Index of the Root be a Divisor of the Index of the Power, the Root will be rational; otherwise, irrational (86). If the Index of the Root be even, the Root may be positive or negative, if the Power is positive (88). If the Power is negative, no Root with an even Index can be assigned (89). If the Index of the Root be odd, the Root will have the same Sign with the Power or given Quantity (88).

XLVI. (*e*) *The general Theorem, Number* 107, *for the Involution of Binomials, will serve also for their Evolution*; because

And thus, to extract the Root out of $a^4 + 6a^3b + 5a^2bb - 12ab^3 + 4b^4$, firſt, ſet in the Quotient the Root of the firſt Term a^4, viz. aa, and having ſubtracted its Square $aa \times aa$, or a^4, there will remain $6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$ to find the Remainder of the Root. Say, therefore, How many times is $2aa$ contained in $6a^3b$? Anſwer $3ab$; wherefore write $3ab$ in the Quotient, and having ſubtracted the Product of $3ab$ into $2aa + 3ab$, or $6a^3b + 9aabb$, there will yet remain $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$ to carry on the Work. Therefore ſay again, How many times is the Double of the Quotient, viz. $2aa + 6ab$ contained in $-4aabb - 12ab^3$, or, which is the ſame Thing, ſay, How many times is the Double of the firſt Term of the Quotient, or $2aa$, contained in the firſt Term of the Remainder $-4aabb$? Anſwer $-2bb$. Then having writ $-2bb$ in the Quotient, and ſubtracted the Product $-2bb$ into $2aa + 6ab - 2bb$, or $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$, there will remain nothing. Whence it follows, that the Root is $aa + 3ab - 2bb$.

$$a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4 \;(aa + 3ab - 2bb$$
$$a^4$$
$$-$$
$$0.$$
$$+6a^3b + 9aabb$$
$$0 \quad -4aabb$$
$$-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$$
$$0 \qquad 0 \quad 0$$

And thus the Root of the Quantity $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ is $x - \frac{1}{2}a$; and the Root of the Quantity $y^4 + 4y^3 - 8y + 4$ is $yy + 2y - 2$; and the Root of the Quantity

---

becauſe to extract any Root of a given Quantity, is the ſame Thing as to raiſe that Quantity to a Power, whoſe Exponent is a Fraction which has its Denominator equal to the Number which expreſſes the Name of the Root to be extracted (78).

tity $16a^4 - 24aaxx + 9x^4 + 12bbxx - 16aabb + 4b^4$ is $3xx - 4aa + 2bb$, as may appear by the Diagrams underneath:

$$xx - ax + \tfrac{1}{4}aa \;(x - \tfrac{1}{2}a$$
$$xx$$
$$0$$
$$-ax + \tfrac{1}{4}aa$$
$$0 \quad 0$$

$$9x^4 - 24aa + 12bb\,x^2 + 16a^4 - 16aab^2 + 4b^4 \;(3x^2 - 4aa + 2bb$$
$$9x^4$$
$$0$$
$$-24aa + 12bb\,x^2 + 16a^4 - 16a^2b^2 + 4b^4$$
$$0 \quad 0$$

$$y^4 + 4y^3 * - 8y + 4 \;(yy + 2y - 2$$
$$y^4$$
$$0$$
$$4y^3 + 4yy$$
$$0 \quad -4yy$$
$$-4yy - 8y + 4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

XLVII. If you would extract the Cube Root of $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, the Operation is performed thus:

$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \;(a + b$$
$$a^3$$
$$3aa)\;0 + 3aab \;(b$$
$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Extract firſt the Cube Root of the firſt Term a^3, viz. a, and ſet it down in the Quotient: Then, ſubtracting its Cube a^3, ſay, How many times is its triple Square, or $3aa$, contained in the next Term of the Remainder $3aab$? and there comes out b; wherefore write

write b in the Quotient, and ſubtracting the Cube of the Quotient, there will remain 0. Therefore $a+b$ is the Root.

After the ſame manner, if the Cube Root is to be extracted out of $z^6+6z^5-40z^3+96z-64$, it will come out $zz+2z-4$. And ſo in higher Roots.

Of the REDUCTION *of* FRACTIONS, *and* RADICAL QUANTITIES.

THE Reduction of Fractions and Radical Quantities is of Uſe in the preceding Operations, and that either to the leaſt Terms, or to the ſame Denomination.

Of the REDUCTION *of* FRACTIONS *to the leaſt Terms.*

XLVIII. *FRACTIONS are reduced to the leaſt Terms, by dividing the Numerators and Denominators by the greateſt Diviſor.* Thus the Fraction $\frac{aac}{bc}$ is reduced to a more Simple one $\frac{aa}{b}$ by dividing both aac and bc by c; and $\frac{203}{667}$ is reduced to a more ſimple one $\frac{7}{23}$ by dividing both 203 and 667 by 29; and $\frac{203aac}{667bc}$ is reduced to $\frac{7aa}{23b}$ by dividing by $29c$. And ſo $\frac{6a^3-9acc}{6aa+3ac}$ becomes $\frac{2aa-3cc}{2a+c}$ by dividing by $3a$. And $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ becomes $\frac{aa+bb}{a}$ by dividing by $a-b$. (*a*).

And

XLVIII. (*a*) Eucl. VII. 35.

And after this Method, the Terms after Multiplication or Diviſion, may be for the moſt part abridged. As if you were to multiply $\frac{2ab^3}{3ccd}$ by $\frac{9acc}{bdd}$, or divide it by $\frac{bdd}{9acc}$ (*b*), there will come out $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, and by Reduction $\frac{6aabb}{d^3}$. But in theſe Caſes, *it is better to abbreviate the Terms before the Operation, by dividing thoſe Terms firſt by the greateſt common Diviſor, which you would be obliged to do afterwards* (*c*). Thus, in the Example before us, if I divide $2ab^3$ and bdd by the common Diviſor b, and $3ccd$ and $9acc$ by the common Diviſor $3cc$, there will come out the Fraction $\frac{2abb}{d}$ to be multiplied by $\frac{3a}{dd}$, or to be divided by $\frac{dd}{3a}$, there coming out $\frac{6aabb}{d^3}$ as above. And ſo $\frac{aa}{c}$ into $\frac{c}{b}$ becomes $\frac{aa}{1}$ into $\frac{1}{b}$, or $\frac{aa}{b}$. And $\frac{aa}{c}$ divided by $\frac{b}{c}$ becomes aa divided by b, or $\frac{aa}{b}$. And $\frac{a^3 - axx}{xx}$ into $\frac{cx}{aa + ax}$ becomes $\frac{a-x}{x}$, into $\frac{c}{1}$, or $\frac{ac}{x} - e$. And 28 divided by $\frac{7}{3}$ becomes 4 divided by $\frac{1}{3}$, or 12.

Of

(*b*) Number 145 and 149.

(*c*) Hence the Rule, *Multiplicatio comparat heterologos Terminos, et multiplicat homologos: Diviſio comparat homologos Terminos, et multiplicat heterologos.* That is, the heterologous Terms before Multiplication, and the homologous Terms before Diviſion, are to be reduced to their loweſt Expreſſions.

Of the INVENTION *of* DIVISORS.

XLIX. TO this Head may be referred the Invention of Diviſors, by which any Quantity may be divided. *If it be a ſimple Quantity, divide it by its leaſt Diviſor, and the Quotient by its leaſt Diviſor, till there remain an indiviſible Quotient, and you will have all the prime Diviſors of that Quantity. Then multiply together each Pair of theſe Diviſors, each Ternary or three of them, each Quaternary, &c. and you will alſo have all the compounded Diviſors.* As, if all the Diviſors of the Number 60 are required, divide it by 2, and the Quotient 30 by 2, and the Quotient 15 by 3, and there will remain the indiviſible Quotient 5. Therefore the prime Diviſors are 1, 2, 2, 3, 5; thoſe compoſed of the Pairs 4, 6, 10, 15; of the Ternaries 12, 20, 30; and of all of them 60. Again, If all the Diviſors of the Quantity $21abb$ are deſired, divide it by 3, and the Quotient $7abb$ by 7, and the Quotient abb by a, and the Quotient bb by b, and there will remain the prime Quotient b. Therefore the prime Diviſors are 1, 3, 7, a, b, b; and thoſe compoſed of the Pairs 21, $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; thoſe compoſed of the Ternaries $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; and thoſe of the Quaternaries $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; that of the Quinaries $21abb$. After the ſame Way all the Diviſors of $2abb - 6aac$ are 1, 2, a, $bb - 3ac$, $2a$, $2bb - 6ac$, $abb - 3aac$, $2abb - 6aac$ (*a*).

L. *If*

XLIX. (*a*) For the Product of all thoſe prime Diviſors being equal to the Dividend, and prime Quantities being prime to each other (Eucl. VII. 31), every other prime Quantity will be Prime to each of thoſe Diviſors, and conſequently Prime to their Product (Eucl. VII. 30), that is, to the Dividend, and therefore cannot meaſure it; that is, the Dividend will admit no other prime Diviſors, and therefore no other compound Diviſors, but ſuch as are compounded of its own prime Diviſors.

L. *If after a Quantity is divided by all its ſimple Diviſors, it remains ſtill compounded, and you ſuſpect it has ſome compounded Diviſor, diſpoſe it according to the Dimenſions of any of the Letters in it, and in the Room of that Letter ſubſtitute ſucceſſively three or more Terms of this Arithmetical Progreſſion, viz.* 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, *and ſet the reſulting Terms together with all their Diviſors, by the correſponding Terms of the Progreſſion, ſetting down alſo the Signs of the Diviſors, both affirmative and negative. Then ſet alſo down the Arithmetical Progreſſions which run through the Diviſors of all the Numbers proceeding from the greater Terms to the leſs, in the Order that the Terms of the Progreſſion* 3, 2, 1, 0, — 1, — 2 *proceed, and whoſe Terms differ either by Unity, or by ſome Number which divides the higheſt Term of the Quantity propoſed. If any Progreſſion of this Kind occurs, that Term of it which ſtands in the ſame Line with the Term* 0 *of the firſt Progreſſion, divided by the Difference of the Terms, and joined with its Sign to the aforeſaid Letter, will compoſe the Quantity by which you are to attempt the Diviſion* (*b*).

L. (*b*) By Suppoſition the Diviſor (when found) meaſures the Dividend; if, therefore, the ſame Number is ſubſtituted in both, the Number reſulting from the Subſtitution in the Diviſor will meaſure the Number reſulting from the Subſtitution in the Dividend: But the Diviſor being ſuppoſed to be of one Dimenſion, and a Binome, that is, of the Form $nx \pm a$, the Numbers reſulting from the ſucceſſive Subſtitution of the Laterals in its firſt Member in the Place of x, will form an arithmetical Progreſſion, whoſe common Difference will be n, the Coefficient of the firſt Member (46); and they are alſo Diviſors of the Numbers reſulting from the Subſtitution of the ſame Laterals in the Dividend: But when Cypher is ſubſtituted for x in the Diviſor, (its firſt Member being deſtroyed by the Multiplication with 0) the Number reſulting muſt be a, its ſecond Member; therefore that arithmetical Progreſſion, whoſe common Difference is the Coefficient of the firſt Member of the Diviſor, and whoſe Term, which is placed over-againſt Cypher,

As if the Quantity be $x^3 - xx - 10x + 6$, by ſubſtituting, one by one, the Terms of this Progreſſion 1. 0. — 1, for x, there will ariſe the Numbers — 4, 6, + 14, which, together with all their Diviſors, I place right againſt the Terms of the Progreſſion 1. 0. — 1. after this Manner.

1	4	1. 2. 4.	+ 4.
0	6	1. 2. 3. 6	+ 3.
— 1	14	1. 2. 7. 14	+ 2.

Then, becauſe the higheſt Term x^3 is diviſible by no Number but Unity, I ſeek among the Diviſors a Progreſſion whoſe Terms differ by Unity, and (proceeding from the higheſt to the loweſt) decreaſe as the Terms of the lateral Progreſſion 1. 0. — 1. And I find only one Progreſſion of this Sort, viz. 4. 3. 2. whoſe Term therefore

---

Cypher, is the ſecond Member of the Diviſor, muſt run through the Diviſors of the Numbers reſulting from the Subſtitution of the ſame Laterals for x in the Dividend. Now the firſt Member of the Diviſor is to meaſure the firſt Term of the Dividend, and the common Difference of the Progreſſion is to be the Coefficient of the firſt Member of the Diviſor; therefore that Progreſſion, running through the Diviſors of the Numbers reſulting from the Subſtitution of the Laterals in the Dividend, is to be choſen, whoſe common Difference meaſures the Coefficient of the firſt Term of the Dividend. But as it often happens that the Coefficient of the firſt Term of the Dividend will admit various Diviſors, and conſequently the Progreſſions, whoſe common Differences will all meaſure it, will be various; ſo among the Diviſors to be formed according to this Rule, Trial muſt be made to diſtinguiſh the true one. It is evident, however, that if the Dividend admits a Diviſor of this Form, it will be found among the Diviſors framed according to this Rule; conſequently if no Diviſor of this Form can be found by the Rule, or none which will divide the Dividend, the Dividend admits not a Diviſor of this Form.

fore + 3 I chuſe, which ſtands in the ſame Line with the Term 0 of the firſt Progreſſion 1. 0. — 1. and I attempt the Diviſion by $x + 3$, and find it ſucceeds, there coming out $xx - 4x + 2$.

Again, if the Quantity be $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$, for y I ſubſtitute ſucceſſively 2. 1. 0. — 1. — 2. and the reſulting Numbers 30. 7. 20. 3. 34. with all their Diviſors, I place by them as follows.

2	30	1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30	+ 10.
1	7	1. 7.	+ 7.
0	20	1. 2. 4. 5. 10. 20	+ 4.
— 1	31	1. 3.	+ 1.
— 2	34	1. 2. 17. 34	— 2.

And among the Diviſors I perceive there is this decreaſing arithmetical Progreſſion + 10. + 7. + 4. + 1. — 2. The Difference of the Terms of this Progreſſion, viz. 3, divides the higheſt Term of the Quantity $6y^4$. Wherefore I adjoin to the Letter y the Term + 4, which ſtands in the Row oppoſite to the Term 0, divided by the Difference of the Terms, viz. 3, and I attempt the Diviſion by $y + \frac{4}{3}$, or, which is the ſame Thing, by $3y + 4$, and the Buſineſs ſucceeds, there coming out $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

And ſo, if the Quantity be $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140a^2 + 64a + 30$; the Operation will be as follows.

2	42	1. 2. 3. 6. 7. 14. 21. 42	+ 3. + 3. + 7.
1	23	1. 23	+ 1. — 1. + 1.
0	30	1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30	— 1. — 5. — 5.
— 1	297	1. 3. 9. 11. 27. 33. 99. 297	— 3. — 9. — 11.

Here are three Progreſſions, whoſe Terms — 1. — 5. — 5, divided by the Differences of the Terms 2, 4, 6, give three Diviſors to be tried $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$, and $a - \frac{5}{6}$. And the Diviſion by the laſt Diviſor $a - \frac{5}{6}$, or $6a - 5$, ſucceeds, there coming out $4a^4 - 5a^3 + 4aa - 20a - 6$.

LI. If no Diviſor occur by this Method, or none that divides the Quantity propoſed, we are to conclude, that that Quantity does not admit a Diviſor of one Dimenſion. But perhaps it may, if it be a Quantity of more than three Dimenſions (*c*), admit a Diviſor of two Dimenſions. And if ſo, that Diviſor will be found by this Method. *Subſtitute in that Quantity for the Letter or Species as before, four or more Terms of this Progreſſion* 3, 2, 1, 0. — 1. — 2. — 3. *Let all the Diviſors of the Numbers that reſult be ſingly added to and ſubtracted from the Squares of the correſpondent Terms of that Progreſſion, multiplied into ſome Numeral Diviſor of the higheſt Term of the Quantity propoſed, and right againſt the Progreſſion let be placed the Sums and Differences. Then note all the collateral Progreſſions which run through thoſe Sums and Differences. Then ſuppoſe* ∓ C *to be a Term of ſuch like Progreſſions that ſtands againſt the Term* 0 *of the firſt Progreſſion, and* ∓ B *the Difference which ariſes by ſubducting* ∓ C *from the next ſuperior Term which ſtands againſt the Term* 1 *of the firſt Progreſſion, and* A *to be the aforeſaid numeral Diviſor of the higheſt Term, and* 1 *to be the Letter which is the propoſed Quantity, then* A 1 1 ± B 1 ± C *will be the Diviſor to be tried* (*d*).

Thus

LI. (*c*) 164. *If a compound Quantity of three Dimenſions admits not a Diviſor of one Dimenſion, it will not admit one of two; and univerſally, a Quantity which admits not Diviſors, whoſe Indices are leſs than Half its own Index, will not admit Diviſors whoſe Indices are greater than half its own Index*, and which would be the Indices of the Quotes, if it was diviſible by ſuch Diviſors; for being indiviſible by the Diviſors, it will be ſo by the Quotes.

(*d*) If the ſame Number be ſubſtituted in both Diviſor and Dividend, the Number reſulting from the Subſtitution in the Diviſor will divide the Number reſulting from the Subſtitution in the Dividend: But the Diviſor being of two Dimenſions, that is, a Trinome A l^2 ± B l ± C, its firſt Term is the Square of the Quantity repreſented by l, multiplied into ſome Submultiple A of the

Thus ſuppoſe the propoſed Quantity to be $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$, for x I write ſucceſſively 3, 2, 1, 0. — 1, — 2, and the Numbers that come out 39. 6. 1. — 6. — 21. — 26. I diſpoſe or place together with

the Coefficient of the higheſt Term of the Dividend; and if the whole Diviſor was ſubducted from its firſt Term, the Reſidue would be its ſecond and third Terms with contrary Signs $\mp Bl \mp C$ (XXVII); and if the Laterals 2, 1, 0, — 1, — 2, &c. were ſucceſſively ſubſtituted for l, in the firſt Member $\mp Bl$ of this Reſidue, the reſulting Members would deſcend in an arithmetical Progreſſion, whoſe common Difference is the Coefficient of the firſt Member of the Reſidue; and conſequently, if, in order to find this common Difference, each Term of this Progreſſion was ſubducted from the next Superior, the Reſidue would be the Coefficient of the ſecond Member of the Diviſor with a contrary Sign (46); and when 0 were ſubſtituted, the reſulting Number would be the Number right againſt Cypher in the lateral Progreſſion, to wit, the laſt Member of the Diviſor, with a contrary Sign. Therefore if the ſame Laterals 2, 1, 0, -1, -2, be ſucceſſively ſubſtituted for l in the Dividend; and if all the Diviſors of the reſulting Numbers be ſeverally ſubducted from the Squares of the ſubſtituted Laterals, multiplied into the Coefficient of the firſt Term of the Diviſor, to wit, the Submultiple of the Coefficient of the higheſt Term of the Dividend; there will be an arithmetical Progreſſion in thoſe Reſidues, whoſe common Difference being found by ſubducting any Term of it from the next Superior (conſequently by ſubducting the Term right againſt Cypher in the lateral Progreſſion from its next Superior) will be the Coefficient of the ſecond Term of the Diviſor with a contrary Sign; and whoſe Term, which is right againſt Cypher in the Progreſſion of Laterals, is the laſt Term of the Diviſor with a contrary Sign. Now becauſe from the Subſtitution of a Lateral for l, a negative Number might emerge; and that to ſubduct a Negative is equivalent to adding it affirmatively;

their Diviſors in the ſame Line with them, and I add and ſubtract the Diviſors to and from the Squares of the Terms of the firſt Progreſſion, multiplied by the Numeral Diviſor of the Term x^4, which is Unity, viz. to and from the Terms 9. 4. 1. 0. 1. 4, and I diſpoſe likewiſe the Sums and Differences on the Side. Then I write, as follows, the Progreſſions which occur among the ſame. Then I make uſe of the Terms of

---

matively; therefore the affirmative Diviſors of the reſulting Numbers are not only to be ſubducted from the Squares of the ſubſtituted Laterals multiplied into the Submultiple of the Coefficient of the higheſt Term of the Dividend, but alſo to be added to them, that by this Method the negative Diviſors may alſo be ſubducted from them. Now becauſe it may be, that the common Difference of the Progreſſion, which runs through the Reſidues, may not be the Coefficient of the ſecond Term of the Diviſor (as in Art. L), with its Sign changed; and moreover, becauſe the Coefficient of the higheſt Term of the Dividend may admit various Diviſors; and becauſe the aſſumed Submultiple of it may not be the Coefficient of the firſt Term of the Diviſor; therefore Trial is to diſtinguiſh among the Diviſors, formed by the Rule, the true ones. However, the more Laterals there are ſubſtituted for the Letter in the Dividend, the fewer are the Diviſors which are to be tried; for tho' various Progreſſions may occur, yet they will all be at laſt broken off, thoſe only excepted, from which the true Diviſors can be formed, by the preceding Rules. Becauſe any Progreſſion being indefinitely continued, and a Diviſor being thereby formed, 'tis plain that any Number being ſubſtituted in the Diviſor, the Number reſulting would meaſure the Number reſulting from the Subſtitution of the ſame Number in the Dividend; and that therefore the Diviſor is a true one. Hence it follows, that if no Diviſor can be found by this Method, the Quantity propoſed will be indiviſible by a Diviſor of two Dimenſions.

of theſe Progreſſions 2 and — 3, which ſtands oppoſite to the Term 0 in that Progreſſion which is in the firſt Column, ſucceſſively for $\mp C$, and I make

3	39	1. 3. 13. 39	9	—30. —4. 6. 8. 10. 12. 22. 48	—4. 6
2	6	1. 2. 3. 6	4	—2. 1. 2. 3. 5. 6. 7. 10	—2. 3
1	1	1.	1	0. 2.	0. 0
0	6	1. 2. 3. 6	0	—6. —3. —2. —1. 1. 2. 3. 6	2. —3
—1	21	1. 3. 7. 21	1	—20. —6. —2. 0. 2. 4. 8. 22	4. —6
—2	26	1. 2. 13. 26	4	—22. 9. 2. 3. 5. 6. 17. 30	6. —9

uſe of the Differences that ariſe by ſubtracting theſe Terms from the ſuperior Terms 0 and 0, viz. — 2 and + 3 reſpectively for $\mp B$. Alſo Unity for A; and x for l. And ſo in the room of $All \pm Bl \pm C$, I have theſe two Diviſors to try, viz. $xx + 2x - 2$, and $xx - 3x + 3$, by both of which the Buſineſs ſucceeds.

Again, if the Quantity $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8yy - 14y + 14$ be propoſed, the Operation will be as follows. Firſt I attempt the Buſineſs by adding and ſubtracting the Diviſors to and from the Squares of the Terms of the Progreſſion 2. 1. 0, — 1, making uſe of 1 for A, but the Buſineſs does not ſucceed. Where-

3	170		27		—7. 17
2	38	1. 2. 19. 38	12	—16. —7. 10. 11. 13. 14. 31. 50	—7. —11
1	10	1. 2. 5. 10	3	—7. 2. 1. 2. 4. 5. 8. 13	—7. 5
0	14	1. 2. 7. 14	0	—14. —7. —2. —1. 1. 2. 7. 14	—7. — 1
—1	10	1. 2. 5. 10	3	—7. —2. 1. 2. 4. 5. 8. 13	—7. — 7
—2	190		12	0	—7. —13

fore in the room of A, I make uſe of 3, the other numeral Diviſor of the higheſt Term $3y^5$; and theſe Squares being multiplied by 3, I add and ſubtract the Diviſors to and from the Products, viz. 12. 3. 0. 3, and I find theſe two Progreſſions in the reſulting Terms, — 7. — 7. — 7. — 7, and 11. 5. — 1. — 7. For Expedition Sake, I neglected the Diviſors of the outermoſt Terms 170 and 190. Wherefore, the Progreſſions being continued upwards and downwards, I take the next Terms,

Terms, viz. — 7 and 17 at the Top, and — 7, and — 13 at Bottom, and I try if theſe being ſubducted from the Numbers 27 and 12, which ſtand againſt them in the fourth Column, their Differences divide thoſe Numbers 170 and 190, which ſtand againſt them in the ſecond Column. And the Difference between 27 and — 7, that is, 34, divides 170; and the Difference of 12 and — 7, that is, 19, divides 190. Alſo the Difference between 27 and 17, that is, 10, divides 170; but the Difference between 12 and — 13, that is, 25, does not divide 190. Wherefore I reject the latter Progreſſion. According to the former, $\mp C$ is — 7, and $\mp B$ is nothing; the Terms of the Progreſſion having no Difference. Wherefore the Diviſor to be tried $Al \mp Bl \mp C$ will be $3yy + 7$. And the Diviſion ſucceeds, there coming out $y^3 - 2yy - 2y + 2$.

If after this way, there can be found no Diviſor which ſucceeds, we are to conclude, that the propoſed Quantity will not admit of a Diviſor of two Dimenſions. The ſame Method may be extended to the Invention of Diviſors of more Dimenſions, by ſeeking in the aforeſaid Sums and Differences not arithmetical Progreſſions, but ſome others, the firſt, ſecond, and third, &c. Differences of whoſe Terms are in arithmetical Progreſſion: But the Learner ought not to be detained about them.

LII. *Where there are two Letters in the propoſed Quantity, and all its Terms aſcend to equally high Dimenſions, put Unity for one of thoſe Letters; then, by the preceding Rules, ſeek a Diviſor, and compleat the deficient Dimenſions of this Diviſor, by reſtoring that Letter for Unity.*

As if the Quantity be $6y^4 - cy^3 - 21ccyy + 3c^3y + 20c^4$, where all the Terms are of four Dimenſions; for c I put 1, and the Quantity becomes $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$, whoſe Diviſor, as above, is $3y + 4$; and having compleated the deficient Dimenſion of the laſt Term by a correſpondent Dimenſion of c, you have $3y + 4c$ for the Diviſor ſought. So, if the Quantity be $x^4 - bx^3 - 5bbxx + 12b^3x - 6b^4$; putting 1 for b, and having found $xx + 2x - 2$ the Diviſor of the reſulting Quantity $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$, I compleat its deficient Dimenſions by reſpective Dimenſions

sions of b, and so I have $xx + 2bx + 2bb$, the Divisor sought.

LIII. *When there are three or more Letters in the Quantity proposed, and all its Terms ascend to the same Dimensions, the Divisor may be found by the precedent Rules; but more expeditiously after this Way: Seek all the Divisors of all the Terms in which some one of the Letters is not, and also of all the Terms in which some other of the Letters is not; as also of all the Terms in which a third, fourth, and fifth Letter is not, if there are so many Letters; and so run over all the Letters: And in the same Line with those Letters place the Divisors respectively. Then see, if in any Series of Divisors going through all the Letters, all the Parts involving only one Letter can be as often found as there are Letters (excepting only one) in the Quantity proposed*; and likewise if the Parts involving two Letters *may be found as often as there are Letters (excepting two) in the Quantity proposed. If so; all those Parts taken together under their proper Signs will be the Divisor sought.*

As if there were proposed the Quantity $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$; the Divisors of one Dimension of the Terms $8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$, in which x is not, will be found by the preceding Rules to be $2b - 3c$, and $4b - 6c$; and of the Terms $12x^3 + 9cxx + 8ccx + 6c^3$, in which b is not, there will be only one Divisor $4x + 3c$; and of the Terms $12x^3 - 14bxx - 12bbx + 8b^3$, in which there is not c, there will be the Divisors $2x - b$ and $4x - 2b$. I dispose these Divisors in the same Lines with the Letters x, b, c, as you here see;

x	$2b - 3c.$ $4b - 6c.$
b	$4x + 3c.$
c	$2x - b.$ $4x - 2b.$

Since there are three Letters, and each of the Parts of the Divisors only involve one of the Letters, those Parts ought to be found twice in the Series of Divisors. But the Parts $4b$, $6c$, $2x$, b of the Divisors $4b - 6c$ and $2x - b$, only occur once, and are not found any where out of those Divisors whereof they are Parts. Where-

fore

fore I neglect thoſe Diviſors. There remain only three Diviſors $2b - 3c$, $4x + 3c$, and $4x - 2b$. Theſe are in the Series going through all the Letters x, b, c, and each of the Parts $2b$, $3c$, $4x$, are found in them twice, as ought to be, and that with the ſame Signs, provided the Signs of the Diviſor $2b - 3c$ be changed, and in its Place you write $-2b + 3c$. For you may change the Signs of any Diviſor. I take therefore all the Parts of theſe, viz. $2b$, $3c$, $4x$, once apiece under their proper Signs, and the Aggregate $-2b + 3c + 4x$ will be the Diviſor which was to be found. For if by this you divide the propoſed Quantity, there will come out $3xx - 2bx + 2cc - 4bb$.

Again, if the Quantity be $12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26a^2x^3 + 12abx^3 + 6bbx^3 + 24a^3xx - 8aabxx - 8abbxx - 24b^3xx - 4a^3bx + 6aabbx - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32aab^3 - 12b^5$; I place the Diviſors of the Terms in which x is not, by x; and thoſe Terms in which a is not, by a; and thoſe in which b is not, by b, as you here ſee. Then I perceive that all

x	$b.\ 2b.\ 4b.\ aa + 3bb.\ 2aa + 6bb.\ 4aa + 12bb.$
	$bb - 3aa.\ 2bb - 6aa.\ 4bb - 12aa.$
a	$4xx - 3bx + 2bb.\ 12xx - 9bx + 6bb.$
b	$x.\ 2x.\ 3x - 4a.\ 6x - 8a.\ 3xx - 4ax.\ 6xx - 8ax.$
	$2xx + ax - 3aa.\ 4xx + 2ax - 6aa.$

thoſe that are but of one Dimenſion are to be rejected, becauſe the Simple ones, $b.\ 2b.\ 4b.\ x.\ 2x$, and the Parts of the compounded ones, $3x - 4a.\ 6x - 8a$, are found but once in all the Diviſors; but there are three Letters in the propoſed Quantity, and thoſe Parts involve but one, and ſo ought to be found twice. In like manner, the Diviſors of two Dimenſions $aa + 3bb.\ 2aa + 6bb.\ 4aa + 12bb.\ bb - 3aa.$ and $4bb - 12aa$ I reject, becauſe their Parts $aa.\ 2aa.\ 4aa.\ bb.$ and $4bb.$ involving only one Letter a or b, are not found more than once. But the Parts $2bb$ and $6aa$ of the Diviſor $2bb - 6aa$, which is the only remaining one in the Line with x, and which likewiſe involve only one Letter, are found again, or twice, viz. the Part $2bb$ in the Diviſor $4xx - 3bx + 2bb$, and the Part $6aa$ in the Diviſor

viſor $4xx + 2ax - 6aa$. Moreover, theſe three Diviſors are in a Series ſtanding in the ſame Lines with the three Letters x, a, b; and all their Parts $2bb$, $6aa$, $4xx$, which involve only one Letter, are found twice in them, and that under their proper Signs; but the Parts $3bx$, $2ax$, which involve two Letters, occur but once in them. Wherefore, all the divers Parts of theſe three Diviſors, $2bb$, $6aa$, $4xx$, $3bx$, $2ax$, connected under their proper Signs, will make the Diviſors ſought, viz. $2bb - 6aa + 4xx - 3bx + 2ax$. I therefore divide the Quantity propoſed by this Diviſor, and there ariſes $3x^3 - 4axx - 2aab - 6b^3$.

LIV. *If all the Terms of any Quantity are not equally high, the deficient Dimenſions muſt be filled up by the Dimenſions of any aſſumed Letter; then having found a Diviſor by the precedent Rules, the aſſumed Letter is to be blotted out.* As if the Quantity be $12x^3 - bxx + 9xx - 12bbx - 6bx + 8x + 8b^3 - 12b^2 - 4b + 6$; aſſume any Letter, as c, and fill up the Dimenſions of the Quantity propoſed by its Dimenſions, after this Manner, $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$. Then having found out its Diviſor $4x - 2b + 3c$, blot out c; and you will have the Diviſor required, viz. $4x - 2b + 3$.

Sometimes Diviſors may be found more eaſily than by theſe Rules. As *if ſome Letter in the propoſed Quantity be of only one Dimenſion; you may ſeek for the greateſt common Diviſor of the Terms in which that Letter is found, and of the remaining Terms in which it is not found; for that Diviſor will divide the whole. And if there is no ſuch common Diviſor, there will be no Diviſor of the whole.* For Example, if there be propoſed the Quantity $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c - 8a^4$; let there be ſought the common Diviſor of the Terms $+ cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$, in which c is only of one Dimenſion, and of the remaining Terms $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$, and that Diviſor, viz. $xx + 2ax - 2aa$, will divide the whole Quantity.

LV. *But*

LV. *But the greateſt common Diviſor of two Numbers, if it is not known, or does not appear at firſt Sight, it is found by a perpetual Subtraction of the leſs from the greater, and of the Remainder from the laſt Quantity ſubtracted. For that will be the ſought Diviſor, which at length leaves nothing.* Thus, to find the greateſt common Diviſor of the Numbers 203 and 667, ſubtract thrice 203 from 667, and the Remainder 58 thrice from 203, and the Remainder 29 twice from 58, and there will remain nothing; which ſhews, that 29 is the Diviſor ſought (*e*).

LVI. *After the ſame Manner the common Diviſor in Species, when it is compounded, is found, by ſubtracting either Quantity, or its Multiple, from the other; provided both thoſe Quantities and the Remainder be ranged according to the Dimenſions of any Letter, as is ſhewn in Diviſion, and be each Time managed by dividing them all by their Diviſors, which are either ſimple, or divide each of its Terms as if it were a ſimple one.* Thus, to find the greateſt common Diviſor of the Numerator and Denominator of this Fraction $\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$ multiply the Denominator by x, that its firſt Term may become the ſame with the firſt Term of the Numerator. Then ſubtract it, and there will remain $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, which being rightly ordered by dividing by $-2a$, it becomes $x^3 - 6a^2x + 4a^3$. Subtract this from the Denominator, and there will remain $-axx - 2aax + 2a^3$; which again divided by $-a$, becomes $xx + 2ax - 2aa$. Multiply this by x, that its firſt Term may become the ſame with the firſt Term of the laſt ſubtracted Quantity $x^3 - 6aax + 4a^3$, from which it is to be likewiſe ſubtracted, and there will remain $-2axx - 4aax + 4a^3$, which divided by $-2a$, becomes alſo $xx + 2ax - 2aa$. And ſince this is the ſame with the former Remainder, and conſequently being ſubtracted from it, will leave nothing, it will be the Diviſor ſought; by

LV. (*e*) Eucl. VII. 2.

by which the propoſed Fraction, by dividing both the Numerator and Denominator by it, may be reduced to a more Simple one, viz. to $\frac{xx-5ax+4aa}{x-3a}$. And ſo, if you have the Fraction $\frac{6a^5+15a^4b-4a^3cc-10aabcc}{9a^3b-27aabc-6abcc+18bc^3}$, its Terms muſt be firſt abbreviated, by dividing the Numerator by aa, and the Denominator by $3b$: Then ſubtracting twice $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ from $6a^3+15aab-4acc-10bcc$, there will remain $\begin{matrix}15b\\+18c\end{matrix}\ aa\ \begin{matrix}-10bcc\\-12c^3\end{matrix}$. Which being ordered, by dividing each Term by $5b+6c$ after the ſame Way as if $5b+6c$ was a ſimple Quantity, it becomes $3aa-2cc$. This being multiplied by a, ſubtract it from $3a^3-9aac-2acc+6c^3$, and there will remain $-6acc+6c^3$, which being again ordered by a Diviſion by $-3c$, becomes alſo $2cc-3ac$, as before. Wherefore $3aa-2cc$ is the Diviſor ſought. Which being found, divide by it the Parts of the propoſed Fraction, and you will have $\frac{2a^3+5aab}{3ab-9bc}$ (*f*).

LVII. *Now, if a common Diviſor cannot be found after this Way, it is certain there is none at all; unleſs, perhaps, it may ariſe out of the Terms that abbreviate the Numerator and Denominator of the Fraction.* As, if you have the Fraction $\frac{aadd-ccdd-aacc+c^4}{4aad-4acd-2acc+2c^3}$, and ſo diſpoſe

its

LVI. (*f*) If all the Terms of both Quantities have a common Diviſor, divide them by it, and by it multiply the common Diviſor, when found; ſo ſhall the Product be the greateſt common Diviſor: But no Quantity, by which the Terms of one Quantity only have been abbreviated, can enter the Compoſition of a Diviſor, which is to be common to both.

its Terms, according to the Dimenſions of the Letter d, that the Numerator may become $\frac{aa}{-cc}dd - \frac{aacc}{+c^4}$, and the Denominator $-\frac{4aa}{4ac}d + \frac{2acc}{2c^3}$. Theſe muſt firſt be abbreviated by dividing each Term of the Numerator by $aa - cc$, and each of the Denominator by $2a - 2c$, juſt as if $aa - cc$ and $2a - 2c$ were ſimple Quantities. And ſo, in Room of the Numerator there will come out $dd - cc$, and in Room of the Denominator $2ad - cc$, from which, thus prepared, no common Diviſor can be obtained. But, out of the Terms $aa - cc$ and $2a - 2c$, by which both the Numerator and Denominator are abbreviated, there comes out a Diviſor, viz. $a - c$, by which the Fraction may be reduced to this, viz. $\frac{add + cdd - acc - c^3}{4ad - 2cc}$. Now, if neither the Terms $aa - cc$ and $2a - 2c$ had not had a common Diviſor, the propoſed Fraction would have been irreducible.

LVIII. And this is a general Method of finding common Diviſors: *But moſt commonly they are more expeditiouſly found by ſeeking all the prime Diviſors of either of the Quantities, that is, ſuch as cannot be divided by others, and then by trying if any of them will divide the other without a Remainder.* Thus, to reduce $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ to the leaſt Terms, you muſt find the Diviſors of the Quantity $aa - ab$, viz. a and $a - b$; then you muſt try whether either a, or $a - b$, will alſo divide $a^3 - aab + abb - b^3$ without any Remainder.

Of

Of the REDUCTION *of* FRACTIONS *to a common Denominator.*

LIX. *FRACTIONS are reduced to a common Denominator by multiplying the Terms of each by the Denominator of the other* (*a*).

Thus, having $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ multiply the Terms of one $\frac{a}{b}$ by d, and alſo the Terms of the other $\frac{c}{b}$ by b, and they will become $\frac{ad}{bd}$ and $\frac{bc}{bd}$, whereof the common Denominator is bd. And thus a and $\frac{ab}{c}$, or $\frac{a}{1}$ and $\frac{ab}{c}$ become $\frac{ac}{c}$ and $\frac{ab}{c}$. *But where the Denominators have a common Diviſor, it is ſufficient to multiply them alternately by the Quotients.* Thus the Fraction $\frac{a^3}{bc}$ and $\frac{a^3}{bd}$ are reduced to theſe $\frac{a^3d}{bcd}$, and $\frac{a^3c}{bcd}$, by multiplying alternately by the Quotients c and d, ariſing by the Diviſion of the Denominators by the common Diviſor b.

This Reduction is moſtly of Uſe in the Addition and Subtraction of Fractions, which, if they have different Denominators, muſt be firſt reduced to the ſame Denominator before they can be added (*b*).

LIX. (*a*) Eucl. VII. 17. (*b*) Art. XVIII. Note (*b*).

Thus $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ by Reduction becomes $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$, or $\frac{ad+bc}{bd}$, and $a + \frac{ab}{c}$ becomes $\frac{ac+ab}{c}$. And $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ becomes $\frac{a^3d - a^3c}{bcd}$, or $\frac{d-c}{bcd}\, a^3$. And $\frac{c^4+x^4}{cc-xx} - cc - xx$ becomes $\frac{2x^4}{cc-xx}$. And ſo $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ becomes $\frac{14}{21} + \frac{15}{21}$, or $\frac{14+15}{21}$, that is, $\frac{29}{21}$. And $\frac{11}{6} - \frac{3}{4}$ becomes $\frac{22}{12} - \frac{9}{12}$, or $\frac{13}{12}$. And $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ becomes $\frac{9}{12} - \frac{5}{12}$, or $\frac{4}{12}$, that is, $\frac{1}{3}$. And $3\frac{4}{7}$, or $\frac{3}{1} + \frac{4}{7}$ becomes $\frac{21}{7} + \frac{4}{7}$, or $\frac{25}{7}$. And $25\frac{1}{2}$ becomes $\frac{51}{2}$.

Where there are more Fractions than two, they are to be added gradually.

Thus, having $\frac{aa}{x} - a + \frac{2xx}{3a} - \frac{ax}{a-x}$; from $\frac{aa}{x}$, take a, and there will remain $\frac{aa-ax}{x}$, to this add $\frac{2xx}{3a}$, and there will come out $\frac{3a^3 - 3aax + 2x^3}{3ax}$, from whence, laſtly, take away $\frac{ax}{a-x}$, and there will remain $\frac{3a^4 - 6a^3x + 2ax^3 - 2x^4}{3aax - 3axx}$. And ſo if you have $3\frac{4}{7} - \frac{2}{3}$, firſt, you are to find the Aggregate of

$3\frac{4}{7}$,

$3\frac{4}{7}$, viz. $\frac{25}{7}$, and then to take from it $\frac{2}{3}$ and there will remain $\frac{61}{21}$ (*c*).

Of the REDUCTION *of* RADICAL QUANTITIES *to their leaſt Terms.*

LX. *A Radical Quantity, where the Root of the whole cannot be extracted, is reduced by extracting the Root of ſome Diviſor of it* (*a*).

Thus $\sqrt{aabc}$, by extracting the Root of the Diviſor aa, becomes $a\sqrt{bc}$. And $\sqrt{48}$, by extracting the Root of the Diviſor 16, becomes $4\sqrt{3}$. And $\sqrt{48aabc}$, by extracting the Root of the Diviſor $16aa$, becomes $4a\sqrt{3bc}$,

(*c*) *A Fraction is reduced to its Equivalent which ſhall have a given Denominator, by multiplying the given Denominator by the Numerator, and by dividing the Product by the Denominator of the Fraction; for this Quote will be the Numerator of the equivalent Fraction*; for it will have the ſame Ratio to the given Denominator, as the Numerator of the Fraction had to its Denominator. And this is an Abbreviation of the Reduction to a common Denominator, and of a ſubſequent Reduction into the loweſt Terms, by dividing them by the former Denominator. Alſo *a Fraction is reduced to its Equivalent which ſhall have a given Numerator, by multiplying the given Numerator into the Denominator, and by dividing the Product by the Numerator of the Fraction; for this Quote will be the Denominator of the equivalent Fraction.* This alſo is an Abbreviation of the two Reductions, into a common Denominator, and into the loweſt Terms.

LX. (*a*) For the Radical is the ſame, being ſtill the Product of the Diviſor into the Quote, but the Diviſor is now rational.

$4a\sqrt{3bc}$. And $\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$, by extracting the Root of its Diviſor $\frac{aa-4ab+4bb}{cc}$, becomes $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$. And $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aammm}{pzz}}$, by extracting the Root of the Diviſor $\frac{aamm}{ppzz}$, becomes $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. And $6\sqrt{\frac{75}{98}}$, by extracting the Root of the Diviſor $\frac{25}{49}$, becomes $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, or $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$, and by farther extracting the Root of the Denominator, it becomes $\frac{15}{7}\sqrt{6}$ (*b*). And ſo $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, or $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$, by extracting the Root of the Denominator, becomes $\sqrt{ab}$ (*c*). And $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$, by extracting the Cube Root of its Diviſor $8a^3$, becomes $2a\sqrt[3]{b+2a}$. After the ſame manner $\sqrt[4]{a^3x}$, by extracting the Square Root of its Diviſor aa, becomes $\sqrt{a}$ into $\sqrt[4]{ax}$ (*d*), or by extracting the Biquadratic Root of the Diviſor a^4, it becomes $a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$ (*e*). And ſo $\sqrt[6]{a^7x^5}$ is changed into $a\sqrt[6]{ax^5}$ (*f*), or

---

(*b*) For $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}=\frac{30}{7}\times\frac{1}{2}\sqrt{6}=\frac{15}{7}\sqrt{6}$.

(*c*) For $a\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{a^2b}{a}}=\sqrt{ab}$.

(*d*) For $\sqrt[4]{aa}=\sqrt{a}$.

(*e*) For $\sqrt[4]{a^3x}=\sqrt[4]{\frac{a^4}{a}x}=a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$.

(*f*), or into $ax\sqrt[6]{\frac{a}{x}}$ (*g*), or into $\sqrt{ax} \times \sqrt[3]{aax}$ (*h*).

Moreover, *this Reduction is not only of Use for abbreviating of Radical Quantities, but also for their Addition and Subtraction, if they agree in their Roots when they are reduced to the most simple Form; for then they may be added, which otherwise they cannot* (*i*).

Thus, $\sqrt{48} + \sqrt{75}$ by Reduction becomes $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$, that is $9\sqrt{3}$. And $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{16}{27}}$ by Reduction becomes $4\sqrt{3} - \frac{4}{9}\sqrt{3}$, that is, $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. And thus, $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}} + \sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$, by extracting what is Rational in it, becomes $\frac{2b}{c}\sqrt{ab} + \frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, that is, $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. And $\sqrt[3]{8a^3b + 16a^4} - \sqrt[3]{b^4 + 2ab^3}$ becomes $2a\sqrt[3]{b+2a} - b\sqrt[3]{b+2a}$, that is, $2a - b\sqrt[3]{b+2a}$.

(*f*) For $\sqrt[6]{a^6} = a$, therefore $\sqrt[6]{a^7} = a\sqrt[6]{a}$.

(*g*) For $\sqrt[6]{a^7x^5} = \sqrt[6]{a^7\frac{x^6}{x}} = ax\sqrt[6]{\frac{a}{x}}$.

(*h*) For $\sqrt[6]{a^7x^5} = \sqrt[6]{a^3x^3} \times \sqrt[6]{a^4x^2}$; but $\sqrt[6]{a^3x^3} = \sqrt{ax}$; and $\sqrt[6]{a^4x^2} = \sqrt[3]{aax}$; therefore $\sqrt[6]{a^7x^5} = \sqrt{ax} \times \sqrt[3]{aax}$.

(*i*) Art. XVIII. Note (*b*).

Of the REDUCTION *of* RADICAL QUANTITIES *to the ſame Denomination.*

LXI. *WHEN you are to multiply or divide Radicals of a different Denomination, you muſt firſt reduce them to* (*a*) *the ſame Denomination, by prefixing that radical Sign whoſe Index is the leaſt Number, which their Indices divide without a Remainder, and by multiplying the Quantities under the Signs ſo many Times, excepting one, as that Index is become greater* (*b*).

For ſo $\sqrt{a}\,x$ into $\sqrt[3]{a\,a}\,x$ becomes $\sqrt[6]{a^3x^3}$ into $\sqrt[6]{a^4}\,x\,x$, that is, $\sqrt[6]{a^7x^5}$. And $\sqrt{a}$ into $\sqrt[4]{a}\,x$ becomes $\sqrt[4]{a\,a}$ into $\sqrt[4]{a}\,x$, that is, $\sqrt[4]{a^2}\,x$. And $\sqrt{6}$ into $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ becomes $\sqrt[4]{36}$ into $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$, that is, $\sqrt[4]{30}$. By the ſame Reaſon, $a\sqrt{bc}$ becomes $\sqrt{a\,a}$ into $\sqrt{bc}$, that is, $\sqrt{a\,a\,bc}$. And $4a\sqrt{3bc}$ becomes $\sqrt{16\,a\,a}$ into $\sqrt{3\,bc}$, that is, $\sqrt{48\,a\,a\,bc}$. And $2a\sqrt[3]{b+2a}$ becomes $\sqrt[3]{8a^3}$ into $\sqrt[3]{b+2a}$, that is, $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$

LXI. (*a*) For in all Compariſons and Relations the Quantities are underſtood to be homogeneous, or of the ſame Kind. Art. XXXVI.

(*b*) For to reduce Radicals to the ſame Denomination, is to reduce their Indices to the ſame Denomination, and at the ſame time to involve the Quantities according to the Number of Units by which the Indices are reſpectively increaſed; but this Involution is made always by one Multiplication leſs than that Number (Art. XIV). That is, the Radicals are to be involved by the alternate Indices, and the Indices reduced to the ſame Denomination; whence their Values are not altered.

$\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$. And ſo $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ becomes $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$, or $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$. And $\frac{6ab}{\sqrt{18ab^3}}$ becomes $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$, or $\sqrt{2ab}$. And ſo in others (*c*).

Of the REDUCTION *of* RADICALS *to more ſimple Radicals, by the Extraction of Roots* (*a*).

LXII. THE Roots of Quantities, which are compoſed of Integers and Radical Quadraticks, extract thus:

Let A *denote the greater Part of any Quantity, and* B *the leſſer Part; and* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ *will be the Square of the greater Part of the Root; and* $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ *will be the Square of the leſſer Part, which is to be joined to the greater Part with the Sign of* B (*b*).

(*c*) *Rationals are reduced to the Form of Irrationals of a given Index, by involving them according to that Index, and affecting the Power with the Sign of Irrationality.*

LXII. (*a*) For this Reduction of *compound Radicals*, ſee Number 159.

(*b*) *Simple Surds are commenſurable in Power* (162). When *the Square Root of a Radical* is required, it *may be found nearly by extracting the Root of a rational Quantity, which approximates to its Value* (Art. XLI. Numb. 163). Thus to find the Square Root of $3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$; we firſt calculate the Value of $\sqrt{2}=1{,}41421$ (Art. XLI); whence $3+2\sqrt{2}=5{,}82842$; and $\sqrt{5{,}82842}=2{,}41$, &c.

As if the Quantity be $3 + \sqrt{8}$, by writing 3 for A, and $\sqrt{8}$ for B, $\sqrt{AA - BB} = 1$, and thence the Square of the greater Part of the Root $\frac{3+1}{2}$, that is, 2, and the Square of the leſs $\frac{3-1}{2}$, that is, 1. Therefore the Root is, $1 + \sqrt{2}$ (*b*). Again, if you are to extract the Root

---

165. *Sometimes we are able to expreſs the Roots of Radicals exactly by other Radicals*, as in this Example, $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$: for $\sqrt{1 + \sqrt{2}} \times \sqrt{1 + \sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Now *this can be done*, firſt, *when the Quantity propoſed, being partly rational, and called* A, *and partly irrational, and called* B, *the Square Root of* $A^2 - B^2$ *can be extracted.* For then the Members of the Root are quadratic Radicals, the Sum of whoſe Squares being rational are united, and greater than their double irrational Product (115, 116); accordingly A being the Sum of their Squares, and B the Sum of their Products, AA will contain the Sum of their Biquadrates, together with double the Product of their Squares; and BB will be quadruple the Product of their Squares (Eucl. II. 4.); whence $A^2 - B^2$ will be the Sum of their Biquadrates leſs by double the Product of their Squares; conſequently $\sqrt{AA - BB}$ will be the Difference of their Squares (Eucl. II. 7.); and therefore $A + \sqrt{AA - BB}$, to wit, the Sum of their Squares added to the Difference of their Squares is double the Square of the greater (22); and $A - \sqrt{AA - BB}$, is double the Square of the leſs (36); whence $\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2}$ is the Square of the greater; and $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$ is the Square of the leſs; and the Radicals themſelves are $\sqrt{\frac{A \pm \sqrt{AA - BB}}{2}}$.

Root of $\sqrt{32} - \sqrt{24}$, by putting $\sqrt{32}$ for A, and $\sqrt{24}$ for B, $\sqrt{AA - BB}$ will be $= \sqrt{8}$, and thence $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{8}}{2}$, and $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2}$, that is, $3\sqrt{2}$ and $\sqrt{2}$ will be the Squares of the Parts of the Root. The Root therefore is $\sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$. After the same Manner, if out of $aa + 2x\sqrt{aa - xx}$ you are to extract the Root, for A write aa, and for B write $2x\sqrt{aa - xx}$, and AA — BB will be $= a^4 - 4aaxx + 4x^4$, the Root whereof is $aa - 2xx$. Whence the Square of one Part of the Root will be $aa - xx$, and that of the other xx; and so the Root will be $x + \sqrt{aa - xx}$ (c). Again, if you have $aa + 5ax - 2a\sqrt{ax + 4xx}$, by writing $aa + 5ax$ for A, and $2a\sqrt{ax + 4xx}$ for B, AA — BB will be $= a^4 + 6a^3x + 9aaxx$, whose Root is $aa + 3ax$.

(c) 166. Again, *Radicals will be reducible to more simple Radicals, if the Members of the Root, though not quadratic Surds, or Roots of Integers, are yet the Roots of like Surds*; which is known by extracting the Roots of some Divisors of the given Radicals; if they agree in their irrational Part (Art. LX.): For then the greater A is the Sum of the rational Coefficients of the Roots multiplied into their irrational Part. Thus $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ being given, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, and $\sqrt{24} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2}$; whence $\sqrt{32} = 4\sqrt{2} = A$; and $A^2 - B^2 = 32 - 24 = 8$; whence $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; and $\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$; and $\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; whence the Root $\sqrt{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{18} - \sqrt{2}} = \sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$.

$3ax$. Whence the Square of the greater Part of the Root will $aa + 4ax$, and that of the leſſer Part ax, and the Root $\sqrt{aa + 4ax} - \sqrt{ax}$ (*d*). Laſtly, If you have $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$, putting $6 + \sqrt{8} = A$, and $- \sqrt{12} - \sqrt{24} = B$, $AA - BB$ will be $= 8$; whence the greater Part of the Root is $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$, that is, as above $1 + \sqrt{2}$, and the leſſer Part $\sqrt{3}$, and conſequently the Root itſelf $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ (*e*).

LXIII. *But where there are more of this Sort of radical Terms, the Parts of the Root may be ſooner found, by dividing the Product of any two of the Radicals by ſome third Radical, which ſhall produce a rational and integer Quotient. For the Root of twice that Quotient will be double of the Part of the Root ſought.* As in the laſt Example, $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$, $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$, and $\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$. Therefore

---

167. (*d*) Again, *If, after extracting the Square Root of a Diviſor of each Part of the given Radical, the irrational Parts are different, and are not Multiples one of the other, or of ſome Number which meaſures them both by a ſquare Number; then the Quantity given muſt be a Trinome, and to proceed by this Rule, A itſelf muſt be made a Binome.*

168. (*e*) Laſtly, *If a Quadrinome be given, having one rational Term, the Root muſt be a Trinome* (124, 125), and the Sum of the Squares of all the Terms of the Root is the rational Term; wherefore this Term added to any other Term of the given Quantity, will contain the compleat Square of two Terms of the Root taken as a Binome, together with the Square of the third Term (Eucl. II. 4.), and are the greater Part of the Quadrinome; and being denoted by A, the Root may be extracted by this Rule; though it will lead into perplexed Calculations.

fore the Parts of the Root are 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, as above (*f*).

There is alſo a Rule of extracting higher Roots out of numeral Quantities conſiſting of two Parts, whoſe Squares are commenſurable.

LXIV. *Let there be the Quantity* $A \pm B$. *And its greater Part* A. *And the Index of the Root to be extracted* c.. *Seek the leaſt Number* n, *whoſe Power* n^c *may be divided by* $AA - BB$ *without any Remainder, and let the Quotient be* Q. *Compute* $\sqrt[c]{\overline{A + B} \times \sqrt{Q}}$ *in the neareſt integer Numbers. Let it be* r. *Divide* $A\sqrt{Q}$ *by the greateſt rational Diviſor. Let the Quotient be* s, *and let* $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ *in the next greateſt Integers be called* t. *And* $\frac{ts \pm \sqrt{ttss - n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *will be the Root ſought if the Root can be extracted* (*g*).

As

LXIII. 169. (*f*) For each Term of the propoſed, which is not entirely rational, is the double Product of two Terms of the Root; the Product therefore of two Terms of the propoſed is quadruple the Product of four Terms of the Root, or elſe, if the ſame Term of the Root be in both Factors, double the Square of one multiplied into double the Product of two other Terms of the Root: *If*, therefore, *the Product of two Terms of the propoſed divided by a third gives a rational and integer Quote*, that Diviſor muſt be the double Product of two Terms of the Root; and that Quote muſt be the double Square of one Term of the Root; which were all contained in the Product: Therefore double of the Quote will be quadruple the Square of that Term of the Root; and therefore *the Root of the double Quote will be double that Term of the Root.*

LXIV. (*g*) Becauſe by Conſtruction $\frac{n^c}{AA - BB} = Q$, therefore $AAQ - BBQ = n^c$: Let $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$ be

As if the Cube Root be to be extracted out of $\sqrt{968} + 25$; AA — BB will be = 343; and 7, 7, 7, will

---

be the Root c of $A\sqrt{Q} \pm B\sqrt{Q}$, and let $x\sqrt{y}$ be the greater Member; then becauſe $\overline{xxy - z}^{c} = AAQ - BBQ$ (117), and $AAQ - BBQ = n^{c}$, therefore $\overline{xxy - z}^{c} = n^{c}$; and $xxy - z = n$: But $xxy - z = \overline{x\sqrt{y} + \sqrt{z}} \times \overline{x\sqrt{y} - \sqrt{z}}$ (Eucl. II. 5.); therefore $\overline{x\sqrt{y} + \sqrt{z}} \times \overline{x\sqrt{y} - \sqrt{z}} = n$. Hence $x\sqrt{y} + \sqrt{z} : \sqrt{n} :: \sqrt{n} : x\sqrt{y} - \sqrt{z}$ (Eucl. VII. 19.); but alſo $r : \sqrt{n} :: \sqrt{n} : \frac{n}{r}$ (Eucl. VII. 19.): Now by Conſtruction $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$ is greater than $\sqrt{n}$, whence $\sqrt{n}$ is greater than $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$; alſo r is greater than $\sqrt{n}$, whence $\sqrt{n}$ is greater than $\frac{n}{r}$: Wherefore if r is leſs than $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$, then $\frac{n}{r}$ is greater than $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$ (74); and conſequently $x\sqrt{y} - \sqrt{z} - \frac{n}{r}$ is negative: Alſo if $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$ is leſs than r, then $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$ will be greater than $\frac{n}{r}$ (74); and $x\sqrt{y} - \sqrt{z} - \frac{n}{r}$ is poſitive. But the Difference between $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$ and r muſt be leſs than an Unit (163), and the Difference between $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$ and $\frac{n}{r}$ is leſs than the Difference between $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$ and r (75), and therefore the Difference between $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$ and $\frac{n}{r}$ is ſtill much leſs than an Unit; conſequently, adding them together, $2x\sqrt{y} - r - \frac{n}{r}$, that is, the Difference between $2x\sqrt{y}$ and

will be its Divisors; therefore $n = 7$, and $Q = 1$. Moreover, $\overline{A + B} \times \sqrt{Q}$, or $\sqrt{968 + 25}$, having extracted the former Part of the Root, is a little greater than 56; and its Cube Root in the neareſt Numbers is 4; therefore $r = 4$. Moreover, $A\sqrt{Q}$ or $\sqrt{968}$, by taking out whatever is rational, becomes $22\sqrt{2}$. There-

---

and $r + \frac{n}{r}$ is leſs again than an Unit; that is, $2x\sqrt{y} - \overline{r + \frac{n}{r}} \sqsupset 1$; whence $x\sqrt{y} - \overline{r + \frac{n}{r}} \sqsupset \frac{1}{2}$; and $x - \frac{\overline{r + \frac{n}{r}}}{2\sqrt{y}} \sqsupset \frac{1}{2}$; that is, much leſs than Half an Unit: Now let $r + \frac{n}{r} = t$, and $\sqrt{y} = s$, then $ts = x\sqrt{y}$, and $xxy = ttss$; but $xxy - z = n$; therefore by Subduction $z = ttss - n$; and therefore $\sqrt{z} = \sqrt{ttss - n}$. Whence $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z} = \sqrt[c]{A\sqrt{Q} \pm B\sqrt{Q}} = ts \pm \sqrt{ttss - n}$; and conſequently $\frac{ts \pm \sqrt{ttss - n}}{\sqrt[c]{\sqrt{Q}}}$, that is, $\frac{ts \pm \sqrt{ttss - n}}{\sqrt[2c]{Q}} = \sqrt[c]{A \pm B}$; if the Root c can be extracted from $A \pm B$. Now as c may be odd or even, and the greater Term A either irrational or rational, ſo a Variety of Caſes are here to be conſidered.

176. *If* A *is irrational,* B *rational, and* c *even; the Root* c *cannot be extracted.* Becauſe to extract a Root, whoſe Index c is even, from $A \pm B$; it is always neceſſary that the greater Member A ſhould be rational; to the End that the Exceſs of the Sum of the Powers of the Parts of the Root above the Sum of their double Product may be a real Quantity.

Therefore $\sqrt{2}$ its radical Part is s, and $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, or $\frac{5\frac{5}{4}}{2\sqrt{2}}$ in the neareſt integer Numbers is 2. Therefore $t=2$. Laſtly, ts is $2\sqrt{2}$, $\sqrt{tsss-n}$ is 1, and $\sqrt[26]{Q}$, or $\sqrt[6]{1}$, is 1. Therefore $2\sqrt{2}+1$ is the Root ſought, if it can be extracted. I try therefore by Multiplication if the Cube of $2\sqrt{2}+1$ be $\sqrt{968}+25$, and it ſucceeds (*b*).

Again, if the Cube Root is to be extracted out of $68-\sqrt{4374}$, AA — BB will be $=250$, whoſe Diviſors are 5, 5, 5, 2. Therefore $n=5\times 2=10$, and $Q=4$ (*i*). And $\sqrt[c]{\overline{A+B}\times\sqrt{Q}}$, or $\sqrt[3]{\overline{68+\sqrt{4374}}\times 2}$ in the neareſt integer Numbers is $7=r$. Moreover, $A\sqrt{Q}$, or $68\sqrt{4}$, by extracting or taking out what is rational, becomes $136\sqrt{1}$. Therefore $s=1$, and $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, or $\frac{7+\frac{10}{7}}{2}$ in the neareſt integer Numbers is $4=t$. Therefore $ts=4$, $\sqrt{tsss-n}=\sqrt{6}$, and

$\sqrt[2c]{Q}=$

(*b*) 171. Again, *If* A *is irrational*, B *rational*, *and* c *odd*, *then* $A\sqrt{Q}$ is irrational; and being reduced to its leaſt Terms (LX), will have its radical Part the ſame with $\overline{x\sqrt{y^c}}$ (116): Whence $s=\sqrt{y}$, and $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ will differ leſs than $\frac{1}{2}$ an Unit from x; therefore *the Root can be rightly determined.*

(*i*) For that the Power n^c ſhould be a Multiple of AA — BB, Q muſt be an Integer: If, therefore, no prime Diviſor of A^2-B^2 involved to c will give Q an Integer, ſome compound Diviſor, and the leaſt which will ſerve, muſt be taken.

$\sqrt[3]{Q} = \sqrt[6]{4}$, or $\sqrt[3]{2}$; and so the Root to be tried is $\frac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$ (*k*).

Again,

(*k*) 172. Again, *If* A *is rational*, B *irrational, and* c *odd, then* $A\sqrt{Q}$ is rational and already in its lowest Terms, and $x\sqrt{y}$ is rational (116), and $Q = 1$, and $s = \sqrt{y} = 1$, and $x\sqrt{y} = \frac{r + \frac{a}{r}}{2}$ accurately, and *the Root accurately determined.*

173. Again, *If* A *is rational*, B *irrational, and* c *even, then* $A\sqrt{Q}$ is rational, and $s = 1$; but $x\sqrt{y}$ may be either rational, or irrational (116): *If* $x\sqrt{y}$ *is rational*, then $\sqrt{y} = s = 1$; and *the Root is accurately determined*, as in Number 172. *But if* $x\sqrt{y}$ *is irrational, the Root is generally indeterminable; however*, $B\sqrt{Q}$ *may be used in the Stead of* $A\sqrt{Q}$, *because* $\sqrt{y}$ *must be equal to* s (116).

174. Again, *If* A *and* B *are both irrational, and* c *odd, then* the irrational Part of each will be different (116); but $A\sqrt{Q}$, when reduced to its least Terms, will have its irrational Part the same with $x\sqrt{y}$; that is, $\sqrt{y} = s$; whence *the Root can be determined*, as in the Case of Number 171.

175. Lastly, *If* A *and* B *being both irrational,* c *is even, then the Root cannot be determined.* For every Power, whose Index is even, implies the Terms to be alternately rational and irrational; and consequently one Member of the Binome, arising from the Union of the alternate Terms, to be also rational; whether the Terms of the Root were both, or either of them, irrational (116).

176. Hence it appears, that *when* c *is odd, the Root can be determined, whether* A *the greater Member be rational or irrational; but that when* c *is even, and the greater Member* A, *or both Members are irrational, no Root can be extracted;*

Again, if the fifth Root be to be extracted out of $29\sqrt{6}+41\sqrt{3}$; AA — BB will be $=3$, and consequently $n=3$, $Q=81$, $r=5$, $s=\sqrt{6}$, $t=1$, $ts=\sqrt{6}$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{3}$, and $\sqrt[2c]{Q}=\sqrt[10]{81}$, or $\sqrt[5]{9}$; and so the Root to be tried is $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

But

---

tracted; and that *when* c *is even, and the greater Member* A *is rational, it is ambiguous whether the greater Part of the Root is rational or irrational.*

177. *In this ambiguous Case, if a Root cannot be found whose greater Part is rational,* by proceeding by the Rule, and as in Number 172; yet a Root, whose greater Part is irrational, and less Part is rational, may be found, as was hinted in Number 173, *by subducting* $\frac{n}{r}$ *from* r, *so that* $t=\frac{r-\frac{n}{r}}{2s}$, *and* $x\sqrt{y}=ts\pm\sqrt{ttss+n}$; *the Expression being the same as when* c *is odd, with the Sign of* n *changed; and if this does not succeed, and a prime Number stands under the radical Sign, no further Trial need be made.*

178. *But if a compositе Number stands under the radical Sign, the Root may possibly have both its Members irrational, and that compositе Number being the Product of their irrational Parts* (116), *the rational Parts may be sought for in the nearest Integers, and Trial made with a Root, whose Members consist of these Integers combined with the radical Factors. In this Manner they are sought immediately; but to avoid Ambiguity, and needless Trouble, it is better to depress them by extracting first the Square Root* (LXII); for the Square Root can be extracted still; that is, the Index may be halved (85) until it becomes odd, which will bring the Affair to the Extraction of a Root whose Index is odd.

But *if in theſe Sorts of Operations, the Quantity be a Fraction, or its Parts have a common Diviſor, extract ſeparately the Roots of the Terms, and of the Factors.* As if the Cube Root be to be extracted out of $\sqrt{242 - 12\frac{1}{4}}$, this, having reduced its Parts to a common Denominator, will become $\frac{\sqrt{968 - 25}}{2}$. Then having extracted ſeparately the Cube Root of the Numerator and the Denominater, there will come out $\frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$. Again, if you are to extract any Root out of $\sqrt[3]{3993 + \sqrt[6]{17578125}}$; divide the Parts by the common Diviſor $\sqrt[3]{3}$, and there will come out $11 + \sqrt{125}$. Whence the propoſed Quantity is $\sqrt[3]{3}$ into $\overline{11 + \sqrt{125}}$, whoſe Root will be found by extracting ſeparately the Root of each Factor $\sqrt[3]{3}$, and $11 + \sqrt{125}$ (*l*).

---

179. (*l*) *In the Reſolution of Cubic Equations, by Carden's Rule, we have Binomes of this Form* $A \pm B\sqrt{-q}$, *whoſe Cube Roots muſt be found.* Let p be a Diviſor of A, and l a Diviſor of B: *Becauſe* $\sqrt[c]{A^2 - B^2} = x^2 - z^2$ (117), *in this Caſe* $\sqrt[3]{A^2 + B^2 q} = (x^2 - z^2) = p^2 + l^2 \times q$: *If we divide the Part under the radical Sign by its greateſt rational Diviſor, the Quote is* $\sqrt{-q}$, *and ſubducting* p^2 *from* $\sqrt[3]{A^2 + B^2 q}$, *the Remainder is* $l^2 \times q$, *a known Multiple of* l, *the Diviſor of* B: *And* p *and* l *muſt be affected with ſuch Signs, as that* $p \times \overline{p^2 - 3l^2 q} = A$, *may have the Sign of* A, *and that* $l \times \overline{3p^2 - l^2 q} = B$, *may*

have the Sign of B. Thus to find $\sqrt[3]{81+\sqrt{-2700}}$; $81+\sqrt{-2700}=81+30\sqrt{-3}$, whence $A=81$, $B=30$, $q=3$, $\sqrt[3]{A^2+B^2q}=\sqrt[3]{81\times 81+2700}$ $=21=p^2+l^2q$; assume $p=\pm 3$, then $\sqrt[3]{A^2+B^2q}$ $-p^2=21-9=l^2\times q=8=2\times 2\times 3$: Therefore $l=2$, a Divisor of $B=30$. Now because we have $+81$, and $p^2-3l^2q=9-36=-27$, therefore it is $-3=p$; and because we have $+30$, and $3p^2$ $-l^2q=27-12=+15$, therefore it is $l=2$, whence the Root is $-3+2\sqrt{-3}$. Now because the Cube Roots of 1, are 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, and $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (299), therefore by Multiplication the other Cube Roots are $-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{-3}$, and $\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Or because (by dividing the given Binomial by the greatest Cube it contains, and multiplying the Root of the Quote by the Root of that Cube) $81+\sqrt{-2700}=27\times$ $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}$; and because the Roots of $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}$, are $-1+2\sqrt{-\frac{1}{3}}$, $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{-\frac{1}{3}}$, and $\frac{3}{2}$ $+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{3}}$; multiplying therefore these by 3 the Root of 27, we have the Roots required, the same as above.

180. *If the Coefficient of the imaginary Member of the Binome has a contrary Sign, the Root will be the same with the Signs of the imaginary Parts changed:* Thus the Cube Roots of $81-\sqrt{-2700}=81-30\sqrt{-3}$, will be

$-3-2$

Of the FORM *of an* EQUATION.

LXV. *EQUATIONS are Ranks of Quantities either equal to one another, or, taken together, equal to nothing* (*a*). *These are to be considered* chiefly after two Ways;

$-3-2\sqrt{-3}$, $-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{-3}$, and $\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Wherefore $\sqrt[3]{81+\sqrt{-2700}}+\sqrt[3]{81-\sqrt{-2700}}$ $=-3\times 2=-6$, or $=\frac{-3}{2}\times 2=-3$, or $\frac{9}{2}\times 2=9$, the imaginary Parts vaniſhing, by the Contrariety of their Signs.

But ſuch Roots, whether expreſſible in rational Numbers or not, are found by evolving by the Theorem of Number 107, *and ſumming the alternate Terms:* Thus $\overline{81+30\sqrt{-3}}^{\frac{1}{3}}$, or rather $\overline{81}^{\frac{1}{3}}\times\overline{1+\frac{10}{27}\sqrt{-3}}^{\frac{1}{3}}$, being expanded into a Series; the Sum of the odd Terms will continually approach to $4,5=\frac{9}{2}$; and the Sum of the Coefficients of the even Terms to $\frac{1}{2}$, which is the Coefficient of the imaginary Part. See De Moivre's Appendix to Saunderſon's Algebra, and Tranſ. Philoſ. N° 451.

LXV. (*a*) In each Form the Quantity, or the Aggregate of the Quantities on each Side of the Sign of Equality $=$ is called *a Member of the Equation*. Thus in the Equation $x=p+q$, x is one Member, and $p+q$ the other; and in the Equation $x-p-q=0$, $x-p-q$

Ways; *either as the laſt Concluſions to which you come in the Reſolution of Problems; or as Means,* by the Help whereof you are to obtain *final Equations. An Equation of the former Kind is compoſed only out of one unknown Quantity involved with known ones, if the Problem be determined, and propoſes ſomething certain to be found out* (*b*). *But thoſe of the latter Kind involve ſeveral unknown Quantities, which, for that Reaſon, muſt be compared among one another, and ſo connected, that out of all there may emerge a new Equation, in which there is only one unknown Quantity which we ſeek mixed with known Quantities.* Which Quantity, that it may be the more eaſily diſcovered, *that Equation muſt be transformed* moſt commonly various Ways, *until it becomes the moſt Simple that it can, and alſo like ſome of the following Degrees* of them, in which x *denotes the Quantity ſought, according to whoſe Dimenſions the Terms, as you ſee, are ordered, and* p, q, r, s, *denote any other Quantities from which, being known and determined,* x *is alſo determined,* and may be inveſtigated by Methods hereafter to be explained.

LXVI.
$$x = p$$
$$xx = px + q.$$
$$x^3 = px^2 + qx + r.$$
$$x^4 = px^3 + qx^2 + rx + s. \quad \&c.$$

Or,
$$x - p = 0.$$
$$xx - px - q = 0.$$
$$x^3 - pxx - qx - r = 0.$$
$$x^4 - px^3 - qx^2 - rx - s = 0. \quad \&c. (c)$$

After

---

is one, and Cypher the other Member; and an Equation is eaſily tranſmuted from one into the other Form, by Art. LXVII. &c.

(*b*) See Art. LXXV. Numb. 194.

LXVI. (*c*) *In the Reſolution of a final Equation the firſt Form,* viz. $x = p$, $x^2 = px + q$, &c. *is preferable,* and to be uſed as in Art. LXXIV, becauſe when the Value of the unknown is ſought, it ought alone to make one Member

After this Manner therefore the Terms of Equations are to be ordered according to the Dimenſions of the unknown

---

Member of the Equation: *But in all other Caſes the Form, in which Cypher is one Member, is moſt eligible*; becauſe the Aggregate of the Terms in the other Member (the Terms being ranged by the Dimenſions of the unknown) is then the Product of ſo many Binomes as the Equation has Dimenſions, as is ſhewn in Art. CXIII. Whence, as the Rules for Evolution are found by obſerving and tracing back the Steps of Involution, as in Numb. 107; ſo we may diſcover Rules for the Reſolution of Equations, by obſerving their Generation from the Multiplication of Binomes. And as compound Equations are Products equal to nothing, ſo the Factors or Binomes are equal to nothing; that is, the Binomes are ſimple Equations of the ſame Form.

181. *The ſecond Term of every generating Binome, or ſimple Equation, muſt have its Sign contrary to its real* Sign; that is, if it be an affirmative Quantity, it is to be affected with a negative Sign; but if a negative one, with an affirmative Sign. For if $x = p$, then by ſubducting p from Equals, the Reſidues will be equal; that is, $x - p = 0$; and if $x = -p$ by adding p to Equals, the Sums will be equal, viz. $x + p = 0$.

182. Again, the whole Aggregate of the Terms being equal to 0, each Term, which is alſo an Aggregate of Terms (94, 95) is $= 0$; that is, *a new Equation can be deduced from every Term after the firſt, by which the Coefficients of the Terms may be determined*; and this is one of the moſt fruitful Principles of this Art, for the Reſolution of compound Problems; the given Quantities being repreſented as undetermined. Thus,

If $x^3 \pm \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} x^2 \pm \begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix} x \pm abc = 0$, then $a \pm b \pm c = 0$,

alſo $ab \pm ac \pm bc = 0$, and $\pm abc = 0$.

known Quantity, ſo that thoſe may be in the firſt Place, in which the unknown Quantity is of the moſt Dimenſions, as x, xx, x^3, x^4, &c. and thoſe in the ſecond Place, in which x is of the next greateſt Dimenſion, as p, px, px^2, px^3, and ſo on. As to what regards the Signs, they may ſtand any how; and one or more of the intermediate Terms may be ſometimes wanting. Thus, $x^3 \mp bbx + b^3 = 0$, or $x^3 = bbx - b^3$, is an Equation of the third Degree, and $Z^4 \overset{+a}{-b} Z^3 \mp \overset{+ab^3}{-b^4} = 0$, is

---

183. As Ideas are aſſociated to Words by conſtant Uſe, ſo *let conſtant Uſe aſſociate the Idea of the Coefficient of the ſecond Term of an Equation to the Letter* p, *that of the third Term to* q, *that of the fourth to* r, *&c.* Thus ſhall $x \pm p = 0$, $x^2 \pm px \pm q = 0$, $x^3 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0$, &c. repreſent conſtantly an Equation of the 1ſt, 2d, 3d, &c. Degree, or of 1, 2, 3, &c. Dimenſions, reſpectively; and are called the Formulas of each Degree; in which the Coefficients are determined, as thoſe in Numb. 182 are undetermined: Thus if the final Equation deduced from a Problem is of three Dimenſions, let it be $x^3 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0$, and ſuppoſed $= x^3 \overset{\pm a}{\mp b} x^2 \overset{+ab}{\mp ac} x \pm abc \overset{\mp bc}{}$ $= 0$; whence (LXVII) $x^3 \overset{\pm p}{\mp a} x^2 \overset{\pm q}{\mp ab} x \overset{\pm r}{\mp abc} = 0$; whence (182) $\pm p \mp a \mp b \mp c = 0$, $\pm q \mp ab \mp ac \mp bc = 0$, and $\pm r \mp abc = 0$; whence the Values of $\pm p$, $\pm q$, and $\pm r$, may be found; which Values being ſubſtituted in the Formula, become the true Expreſſions of thoſe Coefficients. After this Manner a Formula being an univerſal Expreſſion for all Equations of the ſame Degree, the Reſolutions of the Formulas become alſo general Formulas for the Reſolutions of all particular Equations of the ſame Degree.

is an Equation of the fourth Degree: For *the Degree of an Equation is always eſtimated by the greateſt Dimenſion of the unknown Quantity, without any Regard to the known ones, or to the intermediate Terms. But by the Defect of the intermediate Terms, the Equation is moſt commonly rendered much more ſimple, and may be ſometimes depreſſed to a lower Degree.* For thus, $x^4 = qxx + s$ is to be reckoned an Equation of the ſecond Degree, becauſe it may be reſolved into two Equations of the ſecond Degree. For, ſuppoſing $xx = y$, and y being accordingly writ for xx in that Equation, there will come out in its ſtead $yy = qy + s$, an Equation of the ſecond Degree; by the Help whereof when y is found, the Equation $xx = y$ alſo of the ſecond Degree, will give x (*d*).

And theſe are the Concluſions to which Problems are to be brought. But before I go upon their Reſolution, it will be neceſſary to ſhew the Methods of transforming and reducing Equations into Order, and the Methods of finding the final Equations. I ſhall comprize the Reduction of a ſingle Equation in the following Rules.

(*d*) Any Equation of this Form $x^{2n} = qx^n + s$, where the greateſt Index of the unknown Quantity x is double of the Index of x in the other Term, may be reduced to a Quadratic $y^n = qy + s$, by putting $x^n = y$, and conſequently $x^{2n} = y^2$; and this Quadratic being reſolved by Art. LXXIV. gives y, and therefore alſo x, by the Equation $x^n = y$, univerſally.

184. *The Terms being all in one Member, if the Index of the unknown in the Penultimate is a Diviſor of its Indices in all the Terms, the Dimenſions of the Equation will be reduced to thoſe indicated by the Quote of the greateſt Index divided by the leaſt.* Thus $x^6 \pm qx^4 \pm sx^2 \pm v = 0$, can be reduced to the cubic $y^3 \pm qy^2 \pm sy \pm v = 0$; and $x^8 \pm rx^4 \pm v = 0$, to the Quadratic $y^2 \pm ry \pm v = 0$; but $x^6 \pm px^4 \pm rx^2 \pm v = 0$ is irreducible, becauſe 2 will not divide the Index 5. See Numb. 254.

Of ordering a Single or Final EQUATION.

LXVII. RULE I. *IF there are any Quantities that may deſtroy one another, or may be joined into one by Addition or Subtraction, the Terms are that Way to be diminiſhed.*

As if you have $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$, take from each Side $2x$, and add $3a$, and there will come out $5b = 8a + x$. And thus, $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, by ſtriking out the equivalent Quantities $\frac{2ab}{a} - b = b$, becomes $\frac{bx}{a} = a$.

To this Rule may alſo be referred the ordering of the Terms of an Equation, which is uſually performed by the Tranſpoſition of the Members to the contrary Sides under the contrary Sign (*a*). As if you had the Equation $5b = 8a + x$, you are to find x; take from each Side $8a$, or, which is the ſame Thing, tranſpoſe $8a$ to the contrary Side with its Sign changed, and there will come out $5b - 8a = x$. After the ſame Way, if you have $aa - 3ay = ab - bb + by$, and you are to find y; tranſpoſe $-3ay$ and $ab - bb$, ſo that there may be the Terms multiplied by y on the one Side, and the other Terms on the other Side, and there will come out $aa - ab + bb = 3ay + by$, whence you will have y by the fifth Rule

---

LXVII. (*a*) For to take away any Quantity from one Member, and to place it with a contrary Sign in the other, is to add, or to ſubduct it from both (Art. XXVII): And it is certain, that when to, or from equal Quantities you add, or ſubduct the ſame Quantity, the Sums, or Reſidues, muſt be reſpectively equal (Euc. Axiom 3.)

Rule following, viz. by dividing each Part by $3a + b$, for there will come out $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. And thus the Equation $abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^2$, by due ordering and Tranſpoſition becomes $x^3 = -\frac{aa}{3ab}x - \frac{a^3}{abb}$ or $x^3 + \frac{qa}{3ab}x + \frac{a^3}{abb} = 0$ (*b*).

LXVIII. RULE II. *If there is any Quantity by which all the Terms of the Equation are multiplied, all of them muſt be divided by that Quantity; or, if all are divided by the ſame Quantity, all muſt be multiplied by it too.*

Thus, having $15bb = 24ab + 3bx$, divide all the Terms by b, and you will have $15b = 24a + 3x$; then by 3, and you will have $5b = 8a + x$. Or having $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$, multiply all by c, and there comes out $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx$.

LXIX. RULE III. *If there be any irreducible Fraction, in whoſe Denominator there is found the Letter, according to whoſe Dimenſions the Equation is to be ordered, all the Terms of the Equation muſt be multiplied by that Denominator, or by ſome Diviſor of it.*

As if the Equation $\frac{ax}{a - x} + b = x$ be to be ordered according

(*b*). The Uſes of Tranſpoſition are, 1ſt. To exterminate Quantities which are found in both Members. 2d. To bring all the Quantities into one Member. 3d. To diſengage the known and the unknown Quantities from each other, by placing them in the oppoſite Members. And, laſtly, to change negative Quantities into affirmative, by transferring them to the oppoſite Member; thus $-x^3 + px^2 - qx + r = 0$ becomes, by Tranſpoſition, $x^3 - px^2 + qx - r = -0$.

according to x, multiply all its Terms by $a - x$ the Denominator of the Fraction $\frac{ax}{a-x}$ seeing x is contained therein, and there comes out $ax + ab - bx = ax - xx$, or $ab - bx = -xx$, and tranſpoſing each Part you will have $xx = bx - ab$. And ſo if you have $\frac{a^3 - aab}{2cy - cc} = y - c$, and the Terms are to be ranged according to the Dimenſions of y, multiply them by the Denominator $2cy - cc$, or, at leaſt, by its Diviſor $2y - c$, that y may vaniſh in the Denominator, and there will come out $\frac{a^3 - abb}{c} = 2yy - 3cy + cc$, and by farther ordering $\frac{a^3 - abb}{c} - cc + 3cy = 2yy$. After the ſame manner $\frac{aa}{x} - a = x$, by being multiplied by x, becomes $aa - ax = xx$, and $\frac{aabb}{cxx} = \frac{xx}{a+b-x}$, by multiplying firſt by xx, and then by $a + b - x$, becomes $\frac{a^3bb + aab^3 - aabbx}{c} = x^4$ (c).

LXX. Rule IV. *If that particular Letter, according to whoſe Dimenſions the Equation is to be ordered, be involved with an irreducible Surd, all the other Terms are to be tranſpoſed to the other Side, their Signs being changed, and each Part*

LXIX. (c). If there are many irreducible Fractions, whoſe Denominators contain the unknown x by which the Equation is ordered, the ſhorter Method is to reduce them all to a common Denominator (LIX.), and to multiply all the Terms by it, or by ſome Diviſor of it.

Part of the Equation must be once multiplied by itself, if the Root be a Square one, *or twice, if it be a* Cubick one, &c.

Thus, to order the Equation $\sqrt{aa-ax}+a=x$ according to the Letter x, tranſpoſe a to the other Side, and you have $\sqrt{aa-ax}=x-a$; and having ſquared the Parts, $aa-ax=xx-2ax+aa$, or $0=xx-ax$, that is, $x=a$. So alſo $\sqrt[3]{aax+2axx-x^3}-a+x=0$, by tranſpoſing $-a+x$, becomes $\sqrt[3]{aax+2axx-x^3}=a-x$, and multiplying the Parts cubically, $aax+2axx-x^3=a^3-3aax+3axx-x^3$, or $xx=4ax-aa$. And ſo $y=\sqrt{ay+yy-a\sqrt{ay-yy}}$, having ſquared the Parts, becomes $yy=ay+yy-a\sqrt{ay-yy}$, and the Terms being rightly tranſpoſed, it becomes $ay=a\sqrt{ay-yy}$, or $y=\sqrt{ay-yy}$, and the Parts being again ſquared $yy=ay-yy$, and laſtly by tranſpoſing $2yy=ay$, or $2y=a$ (*d*).

LXXI. RULE V. *The Terms, by Help of the preceding Rules, being diſpoſed according to the Dimenſions of ſome one of the Letters, if the higheſt Dimenſion of that Letter be multiplied by any known Quantity, the whole Equation muſt be divided by that Quantity.*

Thus,

LXX. (*d*). For if any other Quantity was ſuffered to remain in the ſame Member with the Surd, that Member being a Binome, irrational Terms would remain in any Power of it (116); wherefore the irrational Quantity would not be exterminated. Now there is a Neceſſity for exterminating the irreducible Surd with which the unknown x is involved, that the Dimenſions of x, that is, of the Equation may be known.

Thus, $2y = a$, by dividing by 2, becomes $y = \frac{1}{2}a$. And $\frac{bx}{a} = a$, by dividing by $\frac{b}{a}$, becomes $x = \frac{aa}{b}$. And $\frac{2ac}{-cc}x^3 \overset{+a^3}{+aac}xx \overset{-2a^3c}{+aacc}x - a^3cc = 0$, by dividing by $2ac - cc$, becomes $x^3 + \frac{\frac{a^3}{aac}x^2 \overset{-2a^3c}{+aacc}x - a^3cc}{2ac - cc} = 0$, or $x^3 + \frac{a^3 + aac}{2ac - cc}xx - aax - \frac{a^3c}{2a - c} = 0$ (*e*).

LXXII. RULE VI. *Sometimes the Reduction may be performed by dividing the Equation by some compounded Quantity.*

For thus $y^3 = \frac{-2c}{+b}yy + 3bcy - bbc$, is reduced to this, viz. $yy = -2cy + bc$, by transferring all the Terms to the same Side thus, $y^3 \overset{+2c}{-b}yy - 3bcy + bbc = 0$, and dividing by $y - b$, as is shewn in the Chapter of Division, for there will come out $yy + 2cy - bc = 0$ (*f*). But the Invention of this Sort of Divisors is Difficult, and we have taught it already (*g*).

LXXIII.

LXXI. (*e*). By comparing the 2d, 3d, and 4th Rules, it appears that Multiplication is of Use to exterminate Surds and Fractions, and any Quantity by which the unknown was divided; now this Multiplication cannot destroy the Equality of the Members of the Equation (Eucl. Axiom 6.)

LXXII. (*f*). By comparing the 2d, 5th, and 6th Rules, we see that Division exterminates the common Divisors of the Terms, and the Coefficient of the highest Term, and it cannot destroy the Equality of the Members of the Equation; neither can the Evolution destroy it, which is prescribed in the 7th Rule (Eucl. Axiom 7.).

(*g*) Art. L. LI.

LXXIII. RULE VII. *Sometimes alſo the Reduction is performed by extraction of the Root out of each Part of the Equation.*

As if you have $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, having extracted the Root on both Sides, there comes out $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. If you have $xx + aa = 2ax + bb$, tranſpoſe $2ax$, and there will ariſe $xx - 2ax + aa = bb$, and extracting the Roots of the Parts $x - a = +$ or $-b$, or $x = a \pm b$. So alſo having $xx = ax - bb$, add on each Side $-ax + \frac{1}{4}aa$, and there comes out $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$, and extracting the Root on each Side $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, or $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

LXXIV. *And thus univerſally if you have* $xx = .\ px.\ q$; x *will be* $= .\ \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp.\ q}$. *Where* $\frac{1}{2}p$ *and* q *are to be affected with the ſame Signs as* p *and* q *in the former Equation; but* $\frac{1}{4}pp$ *muſt be always made Affirmative. And this Example is a Rule according to which all Quadratick Equations may be reduced to the Form of Simple ones.*

For Example, having propoſed the Equation $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, to extract the Root y, compare $\frac{2xx}{a}$ with p, and xx with q, that is, write $\frac{xx}{a}$ for $\frac{1}{2}p$, and $\frac{x^4}{aa} + xx$ for $\frac{1}{4}pp.\ q$, and there will ariſe $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$ or $y = \frac{xx}{a} - \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. After the ſame way, the Equation $yy = ay - 2cy + aa - cc$, by comparing $a - 2c$ with p, and $aa - cc$ with q, will give $y = \frac{1}{2}a - c \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - ac}$.

Moreover,

Moreover, the Biquadratick Equation $x^4 = -aaxx + ab^3$, whoſe odd Terms are wanting, by Help of this Rule becomes $xx = -\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}$, and extracting again the Root $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}}$. And ſo in others (*b*).

And

LXXIV. (*b*) *Compound Equations are ſaid to be affected when they involve different Powers of the unknown*, as $x^n \pm px^{n-1} \pm qx^{n-2} \pm r = 0$, conſequently no compound Equation can be unaffected, but ſuch as wants all its intermediate Terms, as $x^n \pm r = 0$, and all Quadraticks, which want the ſecond Term, are unaffected, as $x^2 \pm q = 0$, the Equations are every where ſuppoſed affected where the contrary is not mentioned. The Formule $x^2 . px . q = 0$ repreſents Quadratics in the moſt general Manner; for as the Letters p, q, r, &c. repreſent all Variety of the Coefficients, ſo the Points repreſent the Variety of the Signs + and −. In like Manner $x^3 . px^2 . qx . r = 0$, $x^4 . px^3 . qx^2 . rx . s = 0$, &c. will be the moſt general Expreſſions for cubic, biquadratic, &c. Equations. Now

185. The firſt or higheſt Term of every Equation being always ſuppoſed affirmative, the Variation of the Signs has Place only in the following Terms, whoſe Number is n, their whole Number being $n + 1$ (211); whence the Number of Signs being 2, putting n for the Dimenſions of the Equation, *all the Variety of Signs in any Degree is* 2n; whence, in Quadratics, the general Formule $x^2 . px . q = 0$, is four-fold; that is, *all Quadratics, with Regard to the Signs of their Terms, are reduced to one of theſe four particular Forms.*

I	1. $x^2 + px - q = 0$.	or $x^2 = -px + q$	or $x^2 + px = q$.
	2. $x^2 - px - q = 0$.	II $x^2 = px + q$	III $x^2 - px = q$.
	3. $x^2 - px + q = 0$.	$x^2 = px - q$	$x^2 - px = -q$.
	4. $x^2 + px + q = 0$.	$x^2 = -px - q$	$x^2 + px = -q$.

Now it is evident, that every Quadratic, whether given in the firſt or ſecond Manner, muſt be reduced to the third

And *these are the Rules for ordering one only Equation*, the Use whereof, when the Analyst is sufficiently acquainted

---

third Manner of Expression, in order to be solved; that the Terms containing the unknown x may make one Member of the Equation LXXVII. and this Member, viz. $x^2 \pm px$, which contains the unknown, having two Terms, cannot be the Square of a simple Quantity; and having but two Terms, must be defective of a perfect Square; and adding the Square of $\frac{1}{2}p$ to it, it will be a compleat Square (Eucl. II. 4.). Consequently, adding $\frac{1}{4}p^2$ to each Member of the Equation, and extracting the Square Root, and transposing the known Quantities, so as to leave x the unknown alone in one Member, its Value will be in the other, viz. $x = \mp\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q}$; in which $\frac{1}{4}p^2$ is always affirmative (89); and $\frac{1}{2}p$, and q, retain the Signs which p, and q, had in the second Manner of expressing the Forms; that is, in the first Form, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$; in the second, $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$; in the third, $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$; and in the fourth, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

In the Problems which follow before the Resolution of Equations, and the Nature of their Roots is taught, Quadratics occur frequently to be resolved: It will, therefore, be here necessary to be more explicit concerning their Resolution.

186. Because the Square Root of any Quantity may be either affirmative or negative [(88) for $a^2 = a \times a$, and $a^2 = -a \times -a$]; therefore, *all Quadratics admit of two Solutions, or have two Roots.* Thus, having found, by Art. LXXIV. that $x^2 \pm px \pm \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 \pm q$; it may be inferred, that $x \pm \frac{1}{2}p = +\sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q}$, or to $-\sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q}$; since $-\sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q} \times -\sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q}$ gives $\frac{1}{4}p^2 \pm q$, as well as $+\sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q} \times +\sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q}$

quainted with, ſo that he knows how to diſpoſe any propoſed Equation, according to any of the Letters contained

(88): There are therefore two Values of x in every one of the four Formulas. In the firſt, $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, or to $-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$: In the ſecond, $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, or to $\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$: In the third, $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, or to $\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$: And in the fourth, $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, or to $-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$. Thus the Equation $x^2 + 5x - 6 = 0$ gives $x = +1$, and to -6. $x^2 - 5x - 6 = 0$ gives $x = -1$, and to $+6$. $x^2 - 5x + 6 = 0$ gives $x = +3$, and to $+2$. And $x^2 + 5x + 6 = 0$ gives $x = -3$, and to -2.

187. Hence, *when* q *is negative, as in the firſt and ſecond Forms, one Value of* x *is affirmative, and the other negative; and when* q *is affirmative, both Values of* x *are of the ſame Affection; being both affirmative. when* p *is negative, as in the third Form; and both negative, when* p *is affirmative, as in the fourth Form.*

188. Hence, *when* q *is negative, as in the firſt and ſecond Forms, the Quantity* $\frac{1}{4}p^2 + q$ *is affirmative, and the Quantity* $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$ *under the radical Sign is the Root of a poſitive Square, and can be aſſigned, and both Roots are real.*

189. Hence alſo, *when* q *is affirmative, as in the third and fourth Forms, if* q *is greater than* $\frac{1}{4}p^2$; *the Quantity* $\frac{1}{4}p^2 - q$ *is negative, and the Quantity* $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ *under the radical Sign is the Root of a negative Square, and being impoſſible* (89), *cannot be aſſigned.* Conſequently

190. *In a Quadratic, when one Root is affirmative and the other negative, both Roots muſt be real* (187, 188). And

191. *When in a Quadratic both Roots have the ſame Affection, they are either both real, or both impoſſible; and never the one real and the other impoſſible.*

192. *In*

tained in it, and to obtain the Value of that Letter if it be of one Dimenſion, or of its greateſt Power if it be of more:

192. *In an unaffected Quadratic, viz. which wants the ſecond Term, as* $x^2 + q = 0$, *if the third Term* q *be affirmative, both Roots are impoſſible*; for the p being wanting, the Quantity $\frac{1}{4}p^2 - q$ becomes $-q$, and $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ becomes $\sqrt{-q}$ (89).

The impoſſible Roots of unaffected Quadratics are called pure, as having no real Quantity joined with them; ſuch are $x - \sqrt{-q} = 0$, $x + \sqrt{-q} = 0$, which generate the unaffected Quadratic $x^2 + q = 0$, and which may be called both affirmative or both negative: But the *impoſſible Roots of affected Quadratics, are called mixed, as having a real Quantity under the ſame Sign, connected to the impoſſible and radical Part under contrary Signs; and if the real Quantity is affected with the Sign* — *they are both affirmative* (181), as $x - \frac{1}{2}b - \sqrt{-c}$, and $x - \frac{1}{2}b + \sqrt{-c}$; whoſe Product is $x^2 - bx \overset{+b}{+c} = 0$; that is, putting $-b = -p$, and $\overline{+b+c} = +q$, $x^2 - px + q = 0$, a Quadratic of the third Form: *But if the real Quantity is affected with the Sign* +, *they are both* (181) *negative*, as $x + \frac{1}{2}b + \sqrt{-c} = 0$, and $x + \frac{1}{2}b - \sqrt{-c} = 0$, which generate the Quadratic $x^2 + bx \overset{+b}{+c} = 0$; or, as before, $x^2 + px + q = 0$, of the fourth Form: But in all Caſes, as the Terms of the Quadratic are ſuppoſed rational, the radical Part of the Root is affected with contrary Signs (120, 153.).

193. *A Quadratic, whoſe Roots are imaginary, contains in* q *its laſt Term; a poſitive Quantity, excluſive of the poſitive Square of the Root; ſo that its laſt Term will always exceed the laſt of a Quadratic, whoſe Roots are the ſame but real Radicals, by double the Square of the radical Parts.* Thus if we ſubduct $x^2 \pm bx - c = 0$ (whoſe Roots are $x \pm \frac{1}{2}b - \sqrt{c} = 0$, and $x \pm \frac{1}{2}b + \sqrt{c} = 0$), from $x^2 \pm bx + c = 0$ (whoſe Roots are $x \pm \frac{1}{2}b - \sqrt{-c} = 0$, and $x \pm \frac{1}{2}b + \sqrt{-c} = 0$), the Exceſs is $2c$.

more: The Compariſon of ſeveral Equations among one another, will not be difficult to him; which I am now going to ſhew.

Of the Tranſformation of two or more EQUATIONS *into one, in order to exterminate the unknown Quantities* (*a*).

LXXV. *WHEN, in the Solution of any Problem, there are more Equations than one to comprehend the State of the Queſtion, in each of which there are ſeveral unknown Quantities; thoſe Equations* (*two by two, if there are more than two*) *are to be ſo connected, that one of the unknown Quantities may be made to vaniſh at each of the Operations, and*

LXXV. (*a*) *By the Reduction of medial Equations is underſtood the gradual Tranſformation of the Equations, which, by containing the Conditions of the Problem, contain different unknown Quantities, into one final Equation, which ſhall comprehend all the Conditions of the Problem, and contain but one unknown Quantity*; conſequently *in every Tranſformation, one unknown Quantity ought to be exterminated.* This Extermination and Tranſformation is accompliſhed, when the unknown Quantity to be exterminated is of one Dimenſion in both the Medials, either by connecting them together, as in Art. LXXV; or by equating the Values of the unknown, found in each, as in Art. LXXVI; but if the unknown is of one Dimenſion in one only, then by ſubſtituting the Value of the unknown found in that one, into its Place in the other, as in Article LXXVII. And when the unknown Quantity to be exterminated is of different Dimenſions, and above one, it is to be made of equal Dimenſions in both, as in Numb. LXXVIII; and then it may be exterminated by one of the above Methods of connecting or equating, whichever ſhall ſeem moſt conducive to keep down the Dimenſions of the final Equation. But in exterminating by any Method, Care is to be taken that the Value of the unknown may emerge poſitive.

and ſo produce a new Equation. Thus, having the Equations $2x = y + 5$, and $x = y + 2$, by taking equal Things out of equal Things, there will come out $x = 3$ (*b*). *And you are to know, that by each Equation one unknown Quantity may be taken away; and, conſequently, when there are as many Equations as unknown Quantities, all may at length be reduced into one, in which there ſhall be only one Quantity unknown. But if there be more unknown Quantities by one than there are Equations, then there will remain in the Equation laſt reſulting two unknown Quantities; and if there are more unknown Quantities by two than there are Equations, then in the laſt reſulting Equation there will remain three, and ſo on* (*c*)

There

(*b*) *This connecting conſiſts in adding the Equations, when the unknown in each has contrary Signs, and in ſubducting the one from the other, when it has the ſame Sign; and the Equations are always ſuppoſed to be ordered by the Dimenſions of the unknown to be exterminated.*

(*c*) 194. A Problem is a Propoſition requiring the Inveſtigation of Quantities from their given Properties; it *is determined, when the Number of Quantities, which anſwer what is required, is determined and certain, otherwiſe indetermined; the Properties given are the Laws or Conditions of the Problem, each Property gives an Equation between the Quantities to which it is peculiar,* and which are repreſented by Letters and Symbols ſignifying the unknown and their Properties: Hence *there are as many Equations as Properties given.* Each additional Property alſo, if it be not ſuperfluous, limits the Extent, and Number of Quantities, to which the foregoing Properties agreed, and excludes thoſe to which it does not itſelf agree; whence each Equation connected to another, exterminates one Letter ſignifying an unknown; whence in the final Equation, all Quantities are excluded to which the Aggregate of the Properties given does not agree; that is, ſo many Letters denoting unknown Quantities are exterminated, as there are Properties given, and Equations to be collected from them: Therefore, *if the Number of Equations, or characteriſing*

There may alſo, perhaps, two or more unknown Quantities be made to vaniſh, by only two Equations. As if you have $ax - by = ab - az$, and $bx + by = bb + az$: Then adding Equals to Equals, there will come out $ax + bx = ab + bb$, both y and z being exterminated. But ſuch Caſes either argue ſome Fault to lie hid in the State of the Queſtion, or that the Calculation is erroneous, or not artificial enough. The Method by which one unknown Quantity may be exterminated or taken away by each of the Equations, will appear by what follows.

The Extermination of an unknown Quantity by an Equality of its Values.

LXXVI. *WHEN the Quantity to be exterminated is only of one Dimenſion in both Equations, both*

---

teriſing Properties, is equal to the Number of Quantities ſought, every Letter for an unknown Quantity will be exterminated, except the one repreſenting that to which the Aggregate of Properties agrees; and therefore its Value may certainly be found; whence *the Problem will be determined. Now if the Number of Quantities ſought is one, two, &c. more than the Number of Equations*, the Limitations, Excluſions, and Exterminations, will be one, two, &c. leſs, and conſequently two, three, &c. unknown Quantities muſt remain in the final Equation, whoſe Values cannot be certainly determined, becauſe one unknown muſt enter into the Value of another unknown; and the Value not being certainly determined, *the Problem is undetermined. Now if the Equations are more than the Number of Quantities required, either the Properties are ſuperfluous*, as not limiting the Extent or Number of Quantities to which other Properties agree, *or elſe they may be inconſiſtent with each other, and make the Reſolution impoſſible*; *or laſtly, the Tranſlation of the Problem* into Algebra, i. e. *into Equations, is erroneous or inartificial.*

both its Values are to be ſought by the Rules already delivered, and the one made equal to the other (*d*).

Thus, putting $a + x = b + y$, and $2x + y = 3b$, that y may be exterminated, the firſt Equation will give $a + x - b = y$, and the ſecond will give $3b - 2x = y$. Therefore $a + x - b$ is $= 3b - 2x$, or by due ordering $x = \frac{4b - a}{3}$.

And thus, $2x = y$ and $5 + x = y$ give $2x = 5 + x$ or $x = 5$.

And $ax - 2by = ab$ and $xy = bb$ give $\frac{ax - ab}{2b}$ $(= y) = \frac{bb}{x}$; or by due ordering the Terms $xx - bx - \frac{2b^3}{a} = 0$.

Alſo $\frac{bbx - aby}{a} = ab + xy$, and $bx + \frac{ayy}{c} = 2aa$, by taking away x, give $\frac{aby + aab}{bb - ay}$ $(= x) = \frac{2aac - ayy}{bc}$; and by Reduction $y^2 - \frac{bb}{a}yy = \frac{2aac + bbc}{a}y + bbc = 0$.

Laſtly, $x + y - z = 0$ and $ay = xz$ by taking away z give $x + y (= z) = \frac{ay}{x}$ or $xx + xy = ay$.

LXXVI. (*d*) The Values may be equated although the unknown is of more than one Dimenſion in each, as is ſeen in LXXVIII; but then, the unknown will not be exterminated by one Operation, but only lowered by one Dimenſion.

The ſame is alſo performed by ſubtracting either of the Values of the unknown Quantities from the other, and making the Remainder equal to nothing. Thus, in the firſt of the Examples, take away $3b - 2x$ from $a + x - b$, and there will remain $a + 3x - 4b = 0$, or $x = \frac{4b - a}{3}$.

The Extermination of an unknown Quantity, by ſubſtituting its Value for it.

LXXVII. *WHEN, at leaſt, in one of the Equations the Quantity to be exterminated is only of one Dimenſion, its Value is to be ſought in that Equation, and then to be ſubſtituted in its room in the other Equation.* Thus, having propoſed $xyy = b^3$, and $xx + yy = by - ax$; to exterminate x, the firſt will give $\frac{b^3}{yy} = x$; wherefore I ſubſtitute in the ſecond $\frac{b^3}{yy}$ in the room of x, and there comes out $\frac{b^6}{y^4} + yy = by - \frac{ab^3}{yy}$, and by Reduction $y^6 - by^5 + ab^3yy + b^6 = 0$ (*e*).

But having propoſed $ayy + aay = z^3$, and $yz - ay = az$, to take away y, the ſecond will give $y = \frac{az}{z - a}$. Wherefore for y I ſubſtitute $\frac{az}{z - a}$ into the firſt, and

---

LXXVII. (*e*) *In all Subſtitutions, the Value ſubſtituted muſt have its own Sign, if that of the Quantity into whoſe Place it is put, is affirmative; but the contrary Sign, if negative.* And this Value muſt be multiplied, or divided, or involved, or evolved, &c. in the ſame manner as was the unknown, into the Place of which it is ſubſtituted.

and there comes out $\frac{a^3zz}{zz-2az+aa}+\frac{a^3z}{z-a}=z^3$. And by Reduction, $z^4-2az^3+aazz-2a^3z+a^4=0$.

In the like manner, having proposed $\frac{xy}{c}=z$ and $cy+zx=cc$, to take away z, I substitute in its room $\frac{xy}{c}$ in the second Equation, and there comes out $cy+\frac{xxy}{c}=cc$.

But a Person used to these Sorts of Computations, will oftentimes find shorter Methods than these by which the unknown Quantity may be exterminated. Thus, having $ax=\frac{bbx-b^3}{z}$ and $x=\frac{az}{x-b}$ if equal Quantities are multiplied by Equals, there will come out equal Quantities, viz. $axx=abb$, or $x=b$.

But I leave particular Cases of this kind to be found out by the Students, as Occasion shall offer.

The Extermination of an unknown Quantity of several Dimensions in each Equation.

LXXVIII. *WHEN the Quantity to be taken away is of more than one Dimension in both the Equations, the Value of its greatest Power must be sought in both; then if those Powers are not the same, the Equation that involves the lesser Power must be multiplied by the Quantity to be taken away, or by its Square, or Cube, &c. that it may become of the same Power with the other Equation. Then the Values of those Powers are to be made equal, and there will come out a new Equation, where the greatest Power or Dimension of the Quantity to be taken away is diminished. And*

by repeating this Operation, the Quantity will at length be taken away (*f*).

As if you have $xx + 5x = 3yy$ and $2xy - 3xx = 4$; to take away x, the firſt Equation will give $xx = -5x + 3yy$, and the ſecond $xx = \frac{2xy - 4}{3}$. I put therefore $3yy - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, and ſo x is reduced to only one Dimenſion, and ſo may be taken away by what I have before ſhewn, viz. by a due Reduction of the laſt Equation there comes out $9yy - 15x = 2xy - 4$, or $x = \frac{9yy + 4}{2y + 15}$. I therefore ſubſtitute this Value for x in one of the Equations firſt propoſed (as in $xx + 5x = 3yy$) and there ariſes $\frac{81y^4 + 72yy + 16}{4yy + 60y + 225} + \frac{45yy + 20}{2y + 15} = 3yy$. To reduce which into Order, I multiply by $4yy + 60y + 225$, and there comes out $81y^4 + 72yy + 16 + 90y^3 + 40y + 675yy + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675yy$, or $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Moreover, if you have $y^3 = xyy + 3x$, and $yy = xx - xy - 3$; to take away y, I multiply the latter Equation by y, and you have $y^3 = xxy - xyy - 3y$, of as many Dimenſions as the former. Now, by making the Values of y^3 equal to one another, I have $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$, where y is depreſſed to two Dimenſions. By this therefore, and the moſt ſimple one of the Equations firſt propoſed $yy = xx - xy - 3$, the Quantity

LXXVIII. (*f*) Or, raiſe the Value, found in the Equations of loweſt Dimenſions, to the Dimenſions of the other Equation, and equate this raiſed Value with the Value found in the other Equation.

Quantity y may be wholly taken away by the ſame Method as in the former Example.

There are moreover other Methods by which this may be done, and that oftentimes more conciſely. As if there be given $yy = \frac{2x^2y}{a} + xx$, and $yy = 2xy + \frac{x^4}{aa}$; that y may be extirpated, extract the Root y in each, as is ſhewn in the ſeventh Rule, and there will come out $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, and $y = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Now, by making theſe two Values of y equal you will have $\frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx} = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, and by rejecting the equal Quantities $\sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, there will remain $\frac{xx}{a} = x$, or $xx = ax$, and $x = a$.

Moreover, to take x out of the Equations $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, and $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$, take away y from the Parts of the firſt Equation, and there remains $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$, and ſquaring the Parts, it becomes $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$, and taking away yy on both Sides, there remains $xx + yy + \frac{yyyy}{xx} = 400 - 40y$. Wherefore, ſince $400 - 40y$ and 140 are equal to the ſame Quantities, $400 - 40y$ will be equal to 140, or $y = 6\frac{1}{2}$; and ſo you may contract the Matter in moſt other Equations.

LXXIX. *But*

LXXIX. *But when the Quantity to be exterminated is of several Dimensions, sometimes there is required a very laborious Calculus to exterminate it out of the Equations; but then the Labour will be much diminished by the following Examples made use of as Rules.*

Rule I.

From $dxx + bx + e = 0$, and $fxx + gx + b = 0$, x being exterminated, there comes out

$$\overline{ab - bg - 2cf} \times ab : + \overline{bb - cg} \times bf : \times \overline{agg + cff} \times e = 0.$$

Rule II.

From $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, and $fxx + gx + b = 0$, x being exterminated, there comes out

$$\overline{ab - bg - 2cf} \times abb : + \overline{bb - cg - 2df} \times bfb : + \overline{cb - dg} \times \overline{agg + cff} : + \overline{3agb + bgg + dff} \times df = 0.$$

Rule III.

From $ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, and $fxx + gx + b = 0$, x being exterminated, there comes out

$$\overline{ab - bg - 2ef} \times ab^3 : + \overline{bb - cg - 2df} \times bfbb : + \overline{agg + cff} \times \overline{cbb + dgb + egg - 2efb + 3agb + bgg + dff} \times dfb : + \overline{2abb + 3bgb - dfg + eff} \times eff : - \overline{bg - 2ab} \times efgg = 0.$$

Rule IV.

From $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, and $fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$, x being exterminated, there comes out

$$\overline{ab - bg - 2ef} \times \overline{adbb - acbk} : + \overline{ak + bh - cg - 2df} \times bdfb : - \overline{ak + bb + 2cg + 3df} \times \overline{aakk + cdb - ddg - cck + 2bdk} \times \overline{agg + cff} : +$$

$+ 3agb$

$+3agh+bgg+dff-3afk \times ddf : -3ak-bh+cg+df \times bcfk : + \overline{bk-2dg} \times bbfk - \overline{bbk-3adb-cdf} \times agk = 0.$

For Example, to exterminate x out of the Equations $xx + 5x - 3yy = 0$, and $3xx - 2xy + 4 = 0$: I reſpectively ſubſtitute in the firſt Rule for a, b, c; f, g, and h, theſe Quantities, 1, 5, $-3yy$; 3, $-2y$ and 4; and duly obſerving the Signs $+$ and $-$, there ariſes $\overline{4+10y+18yy} \times 4 : + \overline{20-by^3} \times 15 : + \overline{4yy-27yy} \times -3yy = 0$, or $16 + 40y + 72yy + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$.

By the like Reaſon that y may be expunged out of the Equations $y^3 - xyy - 3x - 0$, and $yy + xy - xx + 3 = 0$, I ſubſtitute into the ſecond Rule for a, b, c, d; f, g, h, and x, theſe Quantities 1, $-x$, 0, $-3x$; 1, x, $-xx+3$, and y reſpectively, and there comes out $\overline{3-xx+xx} \times \overline{9-6xx+x^4} : - \overline{3x+x^3+6x} \times \overline{-3x+x^3} : + 3xx \times xx : + \overline{9x-3x^3-x^3-3x} \times -3x = 0$: Then blotting out the ſuperfluous Quantities and multiplying, you have $27 - 18xx + 3x^4, -9xx + x^6, + 3x^4 - 18x^2 + 12x^4 = 0$. And ordering, $x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0$.

LXXX. Hitherto we have diſcourſed of taking away one unknown Quantity out of two Equations. Now, *if ſeveral are to be taken out of ſeveral, the Buſineſs muſt be done by degrees:* Out of the Equations $ax = yz$, $x + y = 2$, and $5x = y + 3z$; if the Quantity y is to be found, firſt, take out one of the Quantities x or z, ſuppoſe x, by ſubſtituting for it its Value $\frac{yz}{a}$ (found by the

firſt

first Equation) in the second and third Equations; and then you will have $\frac{yz}{a} + y = z$, and $\frac{5yz}{a} = y + 3z$, out of which take away z as above (*g*).

Of

LXXX. (*g*) 195. *When two Equations are given involving two unknown Quantities*, as $\begin{matrix} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{matrix}$ *then shall* $x = \frac{af - dc}{ae - db}$. Where the Numerator is the Difference of the Products of the opposite Coefficients in the Order in which y is not found, and the Denominator is the Difference of the Products of the opposite Coefficients taken from the Orders that involve the two unknown Quantities. (Coefficients are of the same Order which either affect no unknown Quantity, as e and f; or the same unknown Quantity in the different Equations, as a and d. Coefficients are opposite when they affect the different unknown Quantities in the different Equations, as a and e; d and b). For from the first Equation, $ax = c - by$; and $x = \frac{c - by}{a}$ (R. 1, 5.); also from the second, $dx = f - ey$; and $x = \frac{f - ey}{d}$: Whence $\frac{c - by}{a} = \frac{f - ey}{d}$ (LXXVI.); and $cd - dby = af - aey$ (R. 3.); and $aey - dby = af - cd$ (R. 1.); and $y = \frac{af - cd}{ae - db}$ (R. 5.): After the same Manner, $x = \frac{ce - bf}{ae - db}$.

196. *When*

Of the Method of taking away any Number of Surd Quantities out of Equations.

LXXXI. *HITHERTO may be referred the Extermination of Surd Quantities, by making them equal to any Letters.* As if you have $\sqrt{ay} - \sqrt{aa - ay} = 2a + \sqrt[3]{ayy}$, by writing t for $\sqrt{ay}$, and v for $\sqrt{aa - ay}$, and x for $\sqrt[3]{ayy}$, you will have the Equations

---

196. *When three Equations involve three unknown Quantities,* x, y, *and* z; *thus,*

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ dx + ey + fz &= n \\ gx + hy + kz &= p \end{aligned}$$

then

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + ghn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + ghf - gec}.$$

Where the Numerator consists of all the different Products, which can be made of three opposite Coefficients taken from the Orders in which z is not found; and the Denominator consists of all the Products that can be made of the three opposite Coefficients taken from the Orders which involve the three unknown Quantities.

For $y = \frac{an - afz - dm + dcz}{ae - db}$, and $y = \frac{ap - akz - gm + gcz}{ab - gb}$ (195); therefore $\frac{an - afz - dm + dcz}{ae - db} = \frac{ap - akz - gm + gcz}{ab - gb}$ (LXXVI), and $\overline{an - afz - dm + dcz} \times ab - gb \times \overline{an - afz} + gbdm - gbdcz = \overline{ap - gm - akz + gcz} \times ae - db \times \overline{ap - akz} + gbdm - gbdcz$ (R. 5.); Take $gbdm - gbdcz$ from both

tions $t - v = 2a + x$, $tt = ay$, $vv = aa - ay$, and $s^3 = ayy$, out of which taking away by degrees t, v, and x, there will reſult an Equation entirely free from Surdity.

How a Queſtion may be brought to an Equation.

LXXXII. AFTER the Learner has been ſome Time exerciſed in managing and transforming Equations, Order requires that he ſhould try his Skill in bringing Queſtions to an Equation. And *any Queſtion being propoſed, his Skill is particularly required to denote all its Conditions by ſo many Equations. To do which he muſt firſt conſider whether the Propoſitions or Sentences in which it is expreſſed, be all of them fit to be denoted in algebraick Terms*, juſt as we expreſs our Conceptions in Latin or Greek Characters. *And if ſo*, (as will happen in Queſtions converſant about Numbers or abſtract Qantities) *then let him give Names to both known and unknown Quantities, as far as Occaſion requires; and expreſs the Senſe of the Queſtion in the Analytick Language*, if I may ſo ſpeak. *And the Conditions thus tranſlated to algebraick Terms will give as many Equations as are neceſſary to ſolve it.*

As

---

both Members, and divide by ba, ſo ſhall $\overline{an - dm - afz + dcz} \times b - ghn + gbfz = \overline{ap - gm - akz + gcz} \times e - dbp + dkkz$; tranſpoſe and divide, and ſo ſhall you find

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - abf + dbc - dbk + gbf - gec};$$

After the ſame Manner,

$$y = \frac{afp - akn + dkm - dcp + gen - gfm}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec};$$

And,

$$x = \frac{bfp - bkn + ekm - ecp + hcn - hfm}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}.$$

As if there are required three Numbers in continual Proportion, whose Sum is 20, and the Sum of their Squares 140; putting x, y, and z for the Names of the three Numbers sought, the Question will be translated out of the Verbal to the Symbolical Expression, as follows:

The Question in Words.	*The same in Symbols.*
There are sought three Numbers on these Conditions:	x, y, z?
That they shall be continually proportional.	$x : y :: y : z$, or $xz = yy$.
That the Sum shall be 20.	$x + y + z = 20$.
And the Sum of their Squares 140.	$xx + yy + zz = 140$.

And so the Question is brought to these Equations, viz. $xz = yy$, $x + y + z = 20$, and $xx + yy + zz = 140$, by the Help whereof x, y, and z, are to be found by the Rules delivered above.

But you must note, That the Solutions of Questions are (for the most Part) so much the more expedite and artificial, by how fewer unknown Quantities you have at first. Thus, in the Question proposed, putting x for the first Number, and y for the second, $\frac{yy}{x}$ will be the third Proportional; which then being put for the third Number, I bring the Question into Equations, as follows:

The Question in Words.	*Symbollically.*
There are sought three Numbers in continual Proportion.	$x, y, \frac{yy}{x}$?
Whose Sum is 20.	$x + y + \frac{yy}{x} = 20$.
And the Sum of their Squares 140.	$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$.

You

You have therefore the Equations $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, and $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$, by the Reduction whereof x and y are to be determined.

Take another Example. A certain Merchant encreaſes his Eſtate yearly by a third Part, abating 100 *l.* which he ſpends yearly in his Family; and after three Years he finds his Eſtate doubled. *Query*, What was he worth?

To reſolve this, you muſt know there are or lie hid ſeveral Propoſitions, which are all thus found out and laid down.

In Engliſh.	*Algebraically.*
A Merchant has an Eſtate - - -	x.
Out of which the firſt Year he expends 100 *l.*	$x - 100$.
And augments the reſt by one third -	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ or $\frac{4x - 400}{3}$.
And the ſecond Year expends 100 *l.* -	$\frac{4x - 400}{3} - 100$ or $\frac{4x - 700}{3}$.
And augments the reſt by a third - -	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$ or $\frac{16x - 2800}{9}$.
And ſo the third Year expends 100 *l.* -	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$ or $\frac{16x - 3700}{9}$.
And by the reſt gains likewiſe one third Part - - - -	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$, or $\frac{64x - 14800}{27}$.
And he becomes at length twice as rich as at firſt - -	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$.

Therefore

Therefore the Queſtion is brought to this Equation, $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$, by the Reduction whereof you are to find x; viz. multiply it by 27, and you have $64x - 14800 = 54x$; ſubtract $54x$, and there remains $10x - 14800 = 0$, or $10x = 14800$, and dividing by 10, you have $x = 1480$. Wherefore, 1480 *l.* was his Eſtate at firſt, as alſo his Profit or Gain ſince.

You ſee therefore, that *to the Solution of Queſtions which only regard Numbers, or the abſtracted Relations of Quantities, there is ſcarce any Thing elſe required, than that the Problem be tranſlated* out of the Engliſh, or any other Tongue it is propoſed in, *into the algebraical Language, that is, into Characters fit to denote our Conceptions of the Relations of Quantities. But it may ſometimes happen, that the Language or the Words wherein the State of the Queſtion is expreſſed, may ſeem unfit to be turned into the algebraical Language; but making Uſe of a few Changes, and attending to the Senſe, rather than the Sound of the Words, the Verſion will become eaſy* (*a*). Thus, the Forms of Speech among different Nations have their proper Idioms; which, where they happen, the Tranſlation out of one into another is not to be made literally, but to be determined by the Senſe. But that I may illuſtrate theſe Sorts of Problems, and make familiar the Method of reducing them to Equations; and ſince Arts are more eaſily learned by Examples

---

LXXXII. (*a*) If ſuch Equations cannot be derived without ſome previous Operations (which frequently happens to be the caſe), let the Learner conſider what Method or Proceſs he would uſe, to prove the Truth of the Solution, were the Numbers that anſwer the Conditions of the Queſtion to be given; and then by following the very ſame Steps, only uſing Symbols inſtead of Numbers, the Queſtion will be brought to an Equation.

amples than Precepts, I have thought fit to adjoin the Solutions of the following Problems.

Problem I.

Having given the Sum of two Numbers, a, *and the Difference of their Squares* b, *to find the Numbers.*

Let the leaſt of them be x, the other will be $a - x$, and their Squares xx, and $aa - 2ax + xx$: The Difference whereof $aa - 2ax$ is ſuppoſed b. Therefore $aa - 2ax = b$, and then by Reduction $aa - b = 2ax$, or $\frac{aa - b}{2a} \left(= \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a} \right) = x$.

For Example, if the Sum of the Numbers or a be 8, and the Difference of the Squares or b be 16; $\frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}$ $(= 4 - 1)$ will be $= 3 = x$, and $a - x = 5$. Wherefore the Numbers are 3 and 5.

Problem II.

To find three Quantities, x, y, *and* z, *the Sum of any two of which ſhall be given.*

If the Sum of two of them, viz. x and y be a; of x and z, b; and of y and z, c; there will be had three Equations to determine the three Quantities ſought, x, y, and z, viz. $x + y = a$, $x + z = b$, and $y + z = c$. Now, that two of the unknown Quantities, viz. y and z may be exterminated, take away x on both Sides in the firſt and ſecond Equation, and you will have $y = a - x$, and $z = b - x$; which Values ſubſtitute for y and z in the third Equation, and there will come out $a - x + b - x = c$, and by Reduction $x = \frac{a + b - c}{2}$; and having found

found x, the Equations above $y = a - x$ and $z = b - x$ will give y and z.

EXAMPLE. If the Sum of x and y be 9, of x and z, 10, and y and z, 13; then, in the Values of x, y, and z, write 9 for a, 10 for b, and 13 for c; and you will have $a + b - c = 6$, and consequently $x \left(+\frac{a+b-c}{2}\right) = 3$, $y\ (= a - x) = 6$, and $z\ (= b - x) = 7$.

PROBLEM III.

To divide a given Quantity into as many Parts as you please, so that the greater Parts may exceed the least by any given Differences.

Let a be a Quantity to be divided into four such Parts, and its first or least Part call x, and the Excess of the second Part above this call b, and of the third Part c, and of the fourth d; and $x + b$ will be the second Part, $x + c$ the third, and $x + d$ the fourth, the Aggregate of all which $4x + b + c + d$ is equal to the whole Line a. Take away on both Sides $b + c + d$, and there remains $4x = a - b - c - d$, or $x = \frac{a - b - c - d}{4}$.

EXAMPLE. Let there be proposed a Line of 20 Feet, so to be divided into four Parts, that the Excess of the second above the first Part shall be 2 Feet, of the third 3 Feet, and of the fourth 7 Feet; and the four Parts will be $x \left(= \frac{a - b - c - d}{4} \text{ or } \frac{20 - 2 - 3 - 7}{4}\right) = 2$, $x + b = 4$, $x + c = 5$, and $x + d = 9$.

After the ſame Manner a Quantity is divided into more Parts on the ſame Conditions (*b*).

Problem IV.

A Perſon being willing to diſtribute ſome Money among Beggars, wanted eight Pence to give three Pence a piece to them; he therefore gave to each two Pence, and had three Pence remaining over and above. To find the Number of the Beggars.

Let the Number of the Beggars be x, and there will be wanting eight Pence to give all $3x$ Pence; he has therefore $3x - 8$ Pence. Out of theſe he gives $2x$ Pence, and the remaining Pence $x - 8$ are three. That is, $x - 8 = 3$, or $x = 11$.

Problem V.

If two Poſt-Boys A *and* B, *at* 59 *Miles Diſtance from one another, ſet out in the Morning in order to meet. And* A *rides* 7 *Miles in two Hours, and* B 8 *Miles in three Hours, and* B *begins his Journey one Hour later than* A; *to find what Number of Miles* A *will ride before he meets* B.

Call that Length x, and you will have $59 - x$, the Length of *B*'s Journey. And ſince *A* travels 7 Miles in two Hours, he will make the Space x in $\frac{2x}{7}$ Hours, becauſe 7 Miles : 2 Hours :: x Miles : $\frac{2x}{7}$ Hours. And

ſo,

Prob. III. (*b*) For let the Dividend be a, the Number of the Parts be n, and the Sum of all the Differences be d; and we ſhall have $x = \frac{a-d}{n}$.

ſo, ſince *B* rides 8 Miles in 3 Hours, he will deſcribe his Space or ride his Journey $59 - x$ in $\frac{177 - 3x}{8}$ Hours. Now, ſince the Difference of theſe Times is one Hour; to the End they may become equal, add that Difference to the ſhorter Time $\frac{177 - 3x}{8}$, and you will have $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$, and by Reduction $35 = x$. For, multiplying by 8 you have $185 - 3x = \frac{16x}{7}$. Then multiplying alſo by 7 you have $1295 - 21x = 16x$, or $1295 = 37x$. And, laſtly, dividing by 37, there ariſes $35 = x$. Therefore, 35 Miles is the Diſtance that *A* muſt ride before he meets *B*.

The ſame more generally.

Having given the Velocities of two moveable Bodies, A *and* B, *tending to the ſame Place, together with the Interval or Diſtance of the Places and Times from, and in which they begin to move; to determine the Place they ſhall meet in.*

Suppoſe, the Velocity of the Body *A* to be ſuch, that it ſhall paſs over the Space *c* in the Time *f*; and of the Body *B* to be ſuch as it ſhall paſs over the Space *d* in the Time *g*; and that the Interval of the Places is *e*, and *b* the Interval of the Times in which they begin to move.

Case I. Then if both tend to the ſame Place [or the ſame Way], and *A* be the Body that, at the Beginning of the Motion, is fartheſt diſtant from the Place they tend to: Call that Diſtance *x*, and ſubtract from it the Diſtance *e*, and there will remain $x - e$ for the Diſtance of *B* from the Place it tends to. And ſince *A* paſſes through the Space *c* in the Time *f*, the Time in which it will paſs over the Space *x* will be $\frac{fx}{c}$, becauſe the

Space c is to the Time f, as the Space x to the Time $\frac{fx}{c}$. And ſo, ſince B paſſes the Space d in the Time g, the Time in which it will paſs the Space $x - e$ will be $\frac{gx - ge}{d}$. Now ſince the Difference of theſe Times is ſuppoſed b, that they may become equal, add b to the ſhorter Time, viz. to the Time $\frac{fx}{c}$ if B begins to move firſt, and you will have $\frac{fx}{c} + b = \frac{gx - ge}{d}$, and by Reduction $\frac{cge + cdb}{cg - df}$ or $\frac{ge + db}{g - \frac{d}{c}f} = x$. But if A begins to move firſt, add b to the Time $\frac{gx - ge}{d}$, and you will have $\frac{fx}{c} = b + \frac{gx - ge}{d}$, and by Reduction $\frac{cge - cdb}{cg - df} = x$.

Case II. If the moveable Bodies proceed towards one another, and x, as before, be made the initial Diſtance of the moveable Body A, from the Place it is to move to, then $e - x$ will be the initial Diſtance of the Body B from the ſame Place; and $\frac{fx}{c}$ the Time in which A will deſcribe the Diſtance x, and $\frac{ge - gx}{d}$ the Time in which B will deſcribe its Diſtance $e - x$. To the leſſer of which Times, as above, add the Difference b, viz. to the Time $\frac{fx}{c}$ if B begin firſt to move, and ſo you will have $\frac{fx}{c} + b = \frac{ge - gx}{d}$, and by Reduction

$$\frac{cge - cdb}{cg + df}$$

$\frac{cge - cdh}{cg + df} = x$. But if A begins first to move, add b to the Time $\frac{ge - gx}{d}$ and it will become $\frac{fx}{c} = b + \frac{ge - gx}{d}$, and by Reduction $\frac{cge + cdh}{cg + df} = x$.

Example I. If the Sun moves every Day one Degree, and the Moon thirteen, and at a certain Time the Sun be at the Beginning of Cancer, and, in three Days after, the Moon in the Beginning of Aries, the Place of their next following Conjunction is demanded. Answer, in $10\frac{1}{4}$ Degrees of Cancer: For since they both are going towards the same Parts, and the Motion of the Moon, which is farther distant from the Conjunction, hath a later Epocha, the Moon will be A, the Sun B, and $\frac{cge + cdh}{cg - df}$ the Length of the Moon's Way, which, if you write 13 for c, 1 for f, d, and g, 90 for e, and 3 for b, will become $\frac{13 \times 1 \times 90 + 13 \times 1 \times 3}{13 \times 1 - 1 \times 1}$, that is, $\frac{1209}{12}$, or $100\frac{1}{4}$ Degrees; and then add these Degrees to the Beginning of Aries, and there will come out $10\frac{1}{4}$ Degrees of Cancer.

Example II. If two Post-Boys, A and B, being in the Morning 59 Miles asunder, set out to meet each other, and A goes 7 Miles in 2 Hours, and B 8 Miles in 3 Hours, and B begins his Journey 1 Hour later than A, it is demanded how far A will have gone before he meets B? Answer, 35 Miles. For since they go towards each other, and A sets out first, $\frac{cge + cdb}{cg + df}$ will be the Length of his Journey; and writing 7 for c, 2 for f,

$+lz = p$, $ex + hy + mz = q$, and $fx + ky + nz = r$ (c), and by Reduction $x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{g - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$. And again, the Equations $\frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e}$, and $\frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$ by Reduction give $\frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - dh} (= y) = \frac{fq - er + enz - fmz}{fh - ek}$; Which, if abbreviated by writing α for $ep - dq$, β for $dm - el$, γ for $eg - dh$, δ for $fq - er$, ζ for $en - fm$, and θ for $fh - ek$, will become $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}$, and by Reduction $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$. Having found z, put $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$, and $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

EXAMPLE. If there were three Mixtures of Metals melted down together; of the firſt of which a Pound [Averdupois] contains of Silver ℥ 12, of Braſs ℥ 1, and of Tin ℥ 3; of the ſecond, a Pound contains of Silver ℥ 1, of Braſs ℥ 12, and of Tin ℥ 3; and a Pound of the third contains of Braſs ℥ 14, of Tin ℥ 2, and no Silver; and let theſe Mixtures be ſo to be compounded, that a Pound of the Compoſition may contain of Silver ℥ 4, of Braſs ℥ 9, and of Tin ℥ 3: For d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r; write 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3, reſpectively, and α will be $(= ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9) = -104$, and β $(= dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0) = 168$, and ſo $\gamma = -143$; $\delta = 24$, $\zeta = -40$,

(c) Number 182, 183.

$= 40$, and $\theta = 33$. And therefore $z \left(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544} \right) = 0$; $y \left(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143} \right) = \frac{8}{11}$, and $x \left(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12} \right) = \frac{7}{11}$. Wherefore, if there be mixed $\frac{8}{11}$ Parts of a Pound of the second Mixture, $\frac{7}{11}$ Parts of a Pound of the first, and nothing of the third, the Aggregate will be a Pound, containing four Ounces of Silver, nine of Brass, and three of Tin.

Problem IX.

The Prices of several Mixtures of the same Things, and the Proportions of the Things mixed together being given, to determine the Price of each of the Things mixed.

Of each of the Things A, B, C, let the Price of the Mixture $dA + gB + lC$ be p, of the Mixture $eA + hB + mC$ the Price q, and of the Mixture $fA + kB + nC$ the Price r; and of those Things A, B, C, let the Prices x, y, z, be demanded. For the Things A, B, C, substitute their Prices x, y, z, and there will arise the Equations $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, and $fx + ky + nz = r$; from which, by proceeding as in the foregoing Problem, there will in like manner be got $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$, $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$, and $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

Example. One bought 40 Bushels of Wheat, 24 Bushels of Barley, and 20 Bushels of Oats together for 15 Pounds 12 Shillings. Again, he bought of the same Grain 26 Bushels of Wheat, 30 Bushels of Barley, and 50 Bushels of Oats together, for 16 Pounds. And thirdly, he bought of the like Kind of Grain, 24 Bushels of Wheat, 120 Bushels of Barley, and 100 Bushels of Oats together, for 34 Pounds. It is demanded at what

what Rate a Bushel of each of the Grains ought to be valued. Answer, a Bushel of Wheat at 5 Shillings, of Barley at 3 Shillings, and of Oats at 2 Shillings. For instead of d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, r; by writing respectively 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, and 34, there arises α $(= ep - dq = 26 \times 15\frac{3}{5} - 40 \times 16) = -234\frac{2}{5}$; and β $(= dm - el = 40 \times 50 - 26 \times 20) = 1480$; and thus $\gamma = -576$, $\delta = -500$, $\zeta = 1400$, and $\theta = -2400$. Then z $\left(= \frac{\theta\alpha - \delta\gamma}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{562560 - 288000}{-806400 + 3552000} = \frac{274560}{2745600}\right)$ $= \frac{1}{10}$; y $\left(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-576}\right) = \frac{3}{20}$; and x $\left(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{15\frac{3}{5} - \frac{18}{5} - 2}{40}\right) = \frac{1}{4}$. Therefore a Bushel of Wheat cost $\frac{1}{4}$ ℔, or 5 Shillings; a Bushel of Barley $\frac{3}{20}$ ℔, or 3 Shillings; and a Bushel of Oats $\frac{1}{10}$ ℔, or 2 Shillings.

Problem X.

There being given the specifick Gravity both of the Mixture and the Things mixed, to find the Proportion of the mixed Things to one another.

Let e be the specifick Gravity of the Mixture $A + B$, a the specific Gravity of A, and b the specifick Gravity of B; and since the absolute Gravity, or the Weight, is composed of the Bulk of the Body and the specifick Gravity, a A will be the Weight of A; b B of B; and e A $+ e$ B the Weight of the Mixture $A + B$; and therefore a A $+ b$ B $= e$ A $+ e$ B; and from thence a A $- e$ A $= e$ B $- b$ B or $e - b : a - e :: A : B$.

Example. Suppose the Gravity or Specifick Weight of Gold to be as 19, and of Silver as $10\frac{1}{3}$, and King Hiero's Crown as 17; and it will be 10 : 3 ($e - b : a - e :: A : B$) :: Bulk of Gold in the Crown : Bulk of

Silver, or 190 : 31 (:: 19 × 10 : 10½ × 3 :: $a \times \overline{e - b}$: $b \times \overline{a - e}$) :: the Weight of Gold in the Crown, to the Weight of Silver, and 221 : 31 :: the Weight of the Crown, to the Weight of the Silver.

Problem XI.

If the Number of Oxen a *eat up the Meadow* b *in the Time* c; *and the Number of Oxen* d *eat up as good a Piece of Paſture* e *in the Time* f, *and the Graſs grows uniformly; to find how many Oxen will eat up the like Paſture* g *in the Time* h.

If the Oxen a in the Time c eat up the Paſture b; then, by Proportion, the Oxen $\frac{e}{b}a$ in the ſame Time c, or the Oxen $\frac{ec}{bf}a$ in the Time f, or the Oxen $\frac{ec}{bh}a$ in the Time h will eat up the Paſture e; ſuppoſing the Graſs did not grow at all after the Time c (*d*). But ſince, by reaſon of the Growth of the Graſs, all the Oxen d in the Time f can eat up only the Meadow e, therefore that Growth of the Graſs in the Meadow e in the Time $f - c$ will be ſo much as alone would be ſufficient to feed the Oxen $d - \frac{eca}{bf}$ the Time f, that is,

as

Prob. XI. (*d*) For in equal Times c, as Field is to Field, ſo Number of Oxen to Number of Oxen; that is, $b : e :: a : \frac{ea}{b}$ in the ſame Time c; and in equal Fields, the Numbers of Oxen are reciprocally as the Times; that is, $f : c :: \frac{ea}{b} : \frac{eca}{bf}$, in the Time f; alſo $b : c :: \frac{ea}{b} : \frac{eca}{bh}$, in the Time h.

as much as would ſuffice to feed the Oxen $\frac{df}{b} - \frac{eca}{bb}$ in the Time b (*e*). And in the Time $b - c$, by Proportion ſo much would be the Growth of the Graſs as would be ſufficient to feed the Oxen $\frac{b-c}{f-c}$ into $\frac{df}{b} - \frac{eca}{bb}$ or $\frac{bdfb - ecab - bdcf + aecc}{bfb - bcb}$ (*f*). Add this Increment to the Oxen $\frac{aec}{bb}$, and there will come out $\frac{bdfb - ecab - bdcf + ecfa}{bfb - bcb}$, the Number of Oxen which the Paſture e will ſuffice to feed in the Time b. And ſo in Proportion the Meadow g will ſuffice to feed the Oxen $\frac{gbdfb - egagb - bdcgf + ecfga}{befb - bceb}$ during the ſame Time b (*g*).

EXAMPLE

(*e*) For the Numbers of Oxen are reciprocally as the Times, wherefore $b : f :: d - \frac{eca}{bf} : \frac{df}{b} - \frac{eca}{bb}$, in the Time $f - c$.

(*f*) The Growth being ~~uniform, the Increments will~~ be as the Times, and the Numbers of Oxen to conſume the Increments as the Times, i. e. $f - c : b - c :: \frac{df}{b} - \frac{eca}{bb} : \frac{bdfb - ecab - bdcf + aec}{bfb - bcb}$, in the Time $b - c$.

(*g*) For the Times b being equal, the Numbers of Oxen will be as the Fields, i. e. $e : g :: bdfb -$

EXAMPLE. If 12 Oxen eat up $3\frac{1}{3}$ Acres of Paſture in 4 Weeks, and 21 Oxen eat up 10 Acres of like Paſture in 9 Weeks; to find how many Oxen will eat up 24 Acres in 18 Weeks? Anſwer, thirty-ſix; for that Number will be found by ſubſtituting in $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ the Numbers 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24, and 18 for the Letters a, b, c, d, e, f, g, and h, reſpectively; but the Solution, perhaps, will be no leſs expedite, if it be brought out from the firſt Principles, in Form of the precedent literal Solution. As if 12 Oxen in 4 Weeks eat up $3\frac{1}{3}$ Acres, then by Proportion 36 Oxen in 4 Weeks, or 16 Oxen in 9 Weeks, or 8 Oxen in 18 Weeks, will eat up 10 Acres, on Suppoſition that the Graſs did not grow. But ſince by reaſon of the Growth of the Graſs 21 Oxen in 9 Weeks can eat up only 10 Acres, that Growth of the Graſs in 10 Acres for the laſt 5 Weeks will be as much as would be ſufficient to feed the Exceſs of 21 Oxen above 16, that is 5 Oxen for 9 Weeks, or, what is the ſame Thing, to feed $\frac{2}{3}$ Oxen for 18 Weeks. And in 14 Weeks (the Exceſs of 18 above the firſt 4) the Increaſe of the Graſs, by Analogy, will be ſuch, as to be ſufficient to feed 7 Oxen for 18 Weeks; for it is 5 Weeks : 14 Weeks :: $\frac{2}{3}$ Oxen : 7 Oxen. Wherefore add theſe 7 Oxen, which the Growth of the Graſs alone would ſuffice to feed, to the 8, which the Graſs without Growth after 4 Weeks would feed, and the Sum will be 15 Oxen. And, laſtly, if 10 Acres ſuffice to feed 15 Oxen for 18 Weeks, then, in Proportion, 24 Acres would ſuffice 36 Oxen for the ſame Time.

PROBLEM

$\frac{bdfh - ecah - bdcf + ecfa}{bfh - bch}$:
$\frac{gbdfh - ecagh - bdcgf + cefga}{befh - bceh}$:

Problem XII.

Having given the Magnitudes and Motions of Spherical Bodies perfectly elaſtick, moving in the ſame Right-Line, and ſtriking againſt one another, to determine their Motions after Reflexion.

The Reſolution of this Queſtion depends on theſe Conditions, that each Body will ſuffer as much by Reaction as the Action of each is upon the other, and that they muſt recede from each other after Reflexion with the ſame Velocity or Swiftneſs as they met before it. Theſe Things being ſuppoſed, let the Velocity of the Bodies A and B, be a and b reſpectively; and their Motions (as being compoſed of their Bulk and Velocity together) will be aA and bB. And if the Bodies tend the ſame Way, and A moving more ſwiftly, follows B, make x the Decrement of the Motion aA, and the Increment of the Motion bB ariſing by the Percuſſion; and the Motions after Reflexion will be $a\mathrm{A} - x$ and $b\mathrm{B} + x$; and the Celerities $\frac{a\mathrm{A}-x}{\mathrm{A}}$ and $\frac{b\mathrm{B}+x}{\mathrm{B}}$, whoſe Difference is $= a - b$ the Difference of the Celerities before Reflection. Therefore there ariſes this Equation $\frac{b\mathrm{B}+x}{\mathrm{B}} - \frac{a\mathrm{A}-x}{\mathrm{A}} = a - b$, and thence by Reduction x becomes $= \frac{2a\mathrm{AB} - 2b\mathrm{AB}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$, which being ſubſtituted for x in the Celerities $\frac{a\mathrm{A}-x}{\mathrm{A}}$, and $\frac{b\mathrm{B}+x}{\mathrm{B}}$, there comes out $\frac{a\mathrm{A} - a\mathrm{B} + 2b\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ for the Celerity of A, and $\frac{2a\mathrm{A} - b\mathrm{A} + b\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ for the Celerity of B after Reflexion.

But

But if the Bodies move towards one another, then changing every where the Sign of b, the Velocities after Reflexion will be $\frac{aA-aB-2bB}{A+B}$ and $\frac{2aA+bA-bB}{A+B}$; either of which, if they come out, by Chance, negative, it argues that Motion, after Reflexion, to tend a contrary Way to that which A tended to before Reflexion. Which is alſo to be underſtood of A's Motion in the former Caſe.

EXAMPLE. If the homogeneous Bodies [or Bodies of the ſame Sort] A of 3 Pounds with 8 Degrees of Velocity, and B a Body of 9 Pounds with 2 Degrees of Velocity, tend the ſame Way; then for A, a, B and b, write 3, 8, 9, and 2; and $\left(\frac{aA-aB+2bB}{A+B}\right)$ becomes -1, and $\left(\frac{2aA-bA+bB}{A+B}\right)$ becomes 5. Therefore A will return back with one Degree of Velocity after Reflexion, and B will go on with 5 Degrees.

PROBLEM XIII.

To find three Numbers in continual Proportion, whoſe Sum ſhall be 20, *and the Sum of their Squares* 140?

Make the firſt of the Numbers $= x$, and the ſecond $= y$, and the third will be $\frac{yy}{x}$, and conſequently $x+y+\frac{yy}{x}=20$; and $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$. And by Reduction $xx\overset{+y}{-20}x+yy=0$, and $x^4\overset{+yy}{-140}xx+y=0$. Now to exterminate x, for a, b, c, d, e, f, g, h, in the third Rule, ſubſtitute reſpectively 1, 0, $yy-$

140, 0, y^4; 1, $y - 20$, and yy; and there will come out $\overline{-yy + 280} \times y^6 : \overline{+2yy - 40y + 260} \times \overline{260y^4 - 40y^5} : + 3y^4 \times y^4 : - 2yy \times \overline{y^6 - 40y^5 + 400y} : = 0$; and by Multiplication $1600y^6 - 20800y^5 - 67600y^4 = 0$. And by Reduction $4yy - 52y + 169 = 0$. Or (the Root being extracted) $2y - 13 = 0$, or $y = 6\frac{1}{2}$. Which is found more short by another Method before, but not so obvious as this. Moreover, to find x, substitute $6\frac{1}{2}$ for y in the Equation $xx \begin{smallmatrix} + y \\ - 20 \end{smallmatrix} x + yy = 0$, and there will arise $xx - 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4} = 0$, or $xx = 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4}$, and having extracted the Root $x = 6\frac{3}{4} +$ or $- \sqrt{3\frac{5}{16}}$; viz. $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ is the greatest of the three Numbers sought, and $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ the least. For x denotes ambiguously either of the extreme Numbers, and thence there will come out two Values, either of which may be x, the other being $\frac{yy}{x}$.

The same otherwise.

Putting the Numbers x, y, and $\frac{yy}{x}$ as before, you will have $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, or $xx = \begin{smallmatrix} 20 \\ - y \end{smallmatrix} x - yy$, and extracting the Root $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ for the first Number: Take away this and y from 20, and there remains $\frac{yy}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ the third Number. And the Sum of the Squares arising from these three Numbers is $400 - 40y$, and so $400 - 40y = 140$, or $y = 6\frac{1}{2}$. And having found the mean Number $6\frac{1}{2}$, substitute it for y in the first and third Number above found; and the first will become $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$, and the third $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$, as before.

PROBLEM

Problem XIV.

To find four Numbers in continual Proportion, the two Means whereof together make 12, *and the two Extremes* 20.

Let x be the second Number; and $12 - x$ will be the third; $\frac{xx}{12-x}$ the first; and $\frac{144-24x+xx}{x}$ the fourth; and consequently $\frac{xx}{12-x} + \frac{144-24x+xx}{x} = 20$. And by Reduction $xx = 12x - 30\frac{6}{7}$, or $x = 6 + \sqrt{5\frac{1}{7}}$. Which being found, the other Numbers are given from those above.

Problem XV.

To find four Numbers continually proportional, whereof the Sum a *is given, and also the Sum of their Squares* b.

Although we ought for the most Part to seek the Quantities required immediately, yet if there are two that are ambiguous, that is, that involve both the same Conditions (as here the two Means and two Extremes of the four Proportionals), the best Way is to seek other Quantities that are not ambiguous, by which these may be determined, as suppose their Sum, or Difference, or Rectangle. Let us therefore make the Sum of the two mean Numbers to be s, and the Rectangle r; and the Sum of the Extremes will be $a - s$, and the Rectangle also r, because of the Proportionality. Now that from hence these four Numbers may be found, make x the first, and y the second; and $s - y$ will be the third; and $a - s - x$ the fourth; and the Rectangle under the Means $sy - yy = r$, and thence one Mean $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$, the other $s - y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$.

$\sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$. Alſo, the Rectangle under the Extremes $ax - sx - xx = r$, and thence one Extreme $x = \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4} - r}$, and the other $a - s - x = \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4} - r}$.

The Sum of the Squares of theſe four Numbers is $2ss - 2as + aa - 4r$ which is $= b$. Therefore $r = \frac{1}{4}ss - \frac{1}{2}as + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}b$, which being ſubſtituted for r, there come out the four Numbers as follows:

The two Means $\begin{cases} \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa} \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}. \end{cases}$

The two Extremes $\begin{cases} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}. \end{cases}$

Yet there remains the Value of s to be found. Wherefore to abbreviate the Terms, for theſe Quantities ſubſtitute

$\frac{1}{2}s + p$. $\quad$ $\frac{a-s}{2} + q$

and

$\frac{1}{2}s - p$. $\quad$ $\frac{a-s}{2} - q$

And make the Rectangle under the ſecond and fourth equal to the Square of the third, ſince this Condition of the Queſtion is not yet ſatisfied, and you will have $\frac{as-ss}{4} - \frac{1}{2}qs + \frac{pa-ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss - ps + pp$. Make alſo the Rectangle under the firſt and third equal to

to the Square of the ſecond, and you will have $\frac{as - ss}{4}$ $+ \frac{1}{2}qs + \frac{-pa + ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss + ps + pp$. Take the firſt of theſe Equations from the latter, and there will remain $qs - pa + ps = 2ps$, or $qs = pa + ps$. Reſtore now $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$ in the Place of p, and $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}$ in the Place of q, and you will have $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} = \frac{a + s}{\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}}$, and by ſquaring $ss = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b$, or $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b}$; which being found, the four Numbers ſought are given from what has been ſhewn above.

Problem XVI.

If an annual Penſion of the Number of Pounds a, *to be paid in the five next following Years, be bought for the ready Money* c, *to find what the Compound Intereſt of* 100 l. Annum *will amount to?*

Make $1 - x$ the Compound Intereſt of the Money x for a Year, that is, that the Money 1 to be paid after one Year is worth x in ready Money: and, by Proportion, the Money a to be paid after one Year, will be worth ax in ready Money; and after two Years, it will be worth axx; and after three Years, ax^3; and after four Years, ax^4; and after five Years, ax^5. Add theſe five Terms, and you will have $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, or $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = \frac{c}{a}$ an Equation of five Dimenſions, by Help of which,

when x is found by the * Rules to be taught hereafter, put $x : 1 :: 100 : y$, and $y - 100$ will be the Compound Intereſt of 100 *l. per Annum.*

It is ſufficient to have given theſe Inſtances in Queſtions where only the Proportions of Quantities are to be conſidered, without the Poſitions of Lines: Let us now proceed to the Solutions of Geometrical Problems.

* Viz. by finding the firſt Figures of the Root by any mechanical Conſtruction, and the remaining Figures by the Method of Vietz.

How GEOMETRICAL QUESTIONS *may be reduced to* EQUATIONS.

LXXXIII. *Geometrical Queſtions may be reduced ſometimes to Equations with as much Eaſe, and by the ſame Laws, as thoſe we have propoſed concerning abſtracted Quantities.* As if the Right-Line [See Fig. 6.] AB be to be divided in mean and extreme Proportion in C, that is, ſo that BE the Square of the greateſt Part ſhall be equal to the Rectangle BD contained under the whole and the leaſt Part; having put $AB = a$, and $BC = x$, then will AC be $= a - x$, and $xx = a$ into $a - x$ (*a*); an Equation which by Reduction gives $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa}$ (*b*).

LXXXIV. *But in Geometrical Affairs, which more frequently occur, they ſo much depend on the various Poſitions and complex Relations of Lines, that they require ſome farther Invention and Artifice to bring them into Algebraick Terms.* And though it is difficult to preſcribe any Thing in theſe Sorts of Caſes, and every Perſon's own Genius ought to be his Guide in theſe Operations; yet I will endeavour to ſhew the Way to Learners. You are to know therefore, that *Queſtions about the ſame Lines, related*

LXXXIII. (*a*) Euclid II. 2. (*b*) Art. LXXIV.

lated after any definite Manner to one another, may be variously propoſed, by making different Quantities the Quæſita *or Things ſought, from different* Data *or Things given. But of what* Data *or* Quæſita *ſoever the Queſtion be propoſed, its Solution will follow the ſame Way by an Analytick Series, without any other Variation of Circumſtance beſides the feigned Species of Lines, or the Names by which we are uſed to diſtinguiſh the given Quantities from thoſe ſought.*

As if the Queſtion be of an Iſoſceles Triangle CBD [See Fig. 7.] inſcribed in a Circle, whoſe Sides BC, BD, and Baſe CD, are to be compared with the Diameter of the Circle AB. This may either be propoſed of the Inveſtigation of the Diameter from the given Sides and Baſe, or of the Inveſtigation of the Baſis from the given Sides and Diameter; or laſtly, of the Inveſtigation of the Sides from the given Baſe and Diameter; but however it be propoſed, it will be reduced to an Equation by the ſame Series of an Analyſis, viz. If the Diameter be ſought, I put AB $= x$, CD $= a$, and BC or BD $= b$. Then (having drawn AC) by reaſon of the ſimilar Triangles ABC, and CBE, it will be AB : BC :: BC : BE, or $x : b :: b :$ BE (*c*). Wherefore BE $= \frac{bb}{x}$. Moreover CE is $= \frac{1}{2}$ CD, or $\frac{1}{2}a$; and by reaſon of the Right-Angle CEB, CEq + BEq = BCq, that is $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$ (*d*). Which Equation, by Reduction, will give the Quantity x ſought (*e*).

(*c*) Euclid VI. 8. (*d*) Euclid I. 47.

(*e*) For multiplying by $4x^2$ (R. 3. of Equations), and tranſpoſing (R. 1.), we have $4b^4 = 4b^2x^2 - a^2x^2$; and dividing by $4b^2 - a^2$ (R. 5.), and evolving (R. 7. LXXIV.) $x = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

But if the Baſe be ſought, put $AB = c$, $CD = x$, and BC or $BD = b$. Then (AC being drawn) becauſe of the ſimilar Triangles ABC and CBE, there is $AB : BC :: BC : BE$, or $c : b :: b : BE$ (*c*). Wherefore $BE = \frac{bb}{c}$; and alſo $CE = \frac{1}{2} CD$, or $\frac{1}{2} x$. And becauſe the Angle CEB is right, $CEq + BEq = BCq$, that is, $\frac{1}{4} xx + \frac{b^4}{cc} = bb$ (*d*); an Equation which will give by Reduction the ſought Quantity x (*f*).

But if the Side BC or BD be ſought, put $AB = c$, $CD = a$, and BC or $BD = x$. And (AC being drawn as before) by reaſon of the ſimilar Triangles ABC and CBE, it is $AB : BC :: BC : BE$, or $c : x :: x : BE$ (*c*). Wherefore $BE = \frac{xx}{c}$. Moreover CE is $= \frac{1}{2} CD$, or $\frac{1}{2} a$; and by reaſon of the right Angle CEB, $CEq + BEq$ is $= BCq$, that is, $\frac{1}{4} aa + \frac{x^4}{cc} = xx$ (*d*); and the Equation, by Reduction, will give the Quantity ſought, viz. x (*g*).

LXXXV. *You*

(*f*) After the ſame Manner, $x^2 = \frac{4b^2c^2 - 4b^4}{c^2}$; whence $x = \sqrt{\frac{4b^2c^2 - 4b^4}{c^2}} = \frac{2b}{c}\sqrt{c^2 - b^2}$.

(*g*) In like manner, $x^4 = c^2x^2 - \frac{1}{4}a^2c^2$; whence $x^2 = \frac{c^2}{2} \pm \sqrt{\frac{c^4 - a^2c^2}{4}}$ (R. 7.) $= \frac{c^2 \pm c}{2}\sqrt{c^2 - a^2}$; whence $x = \sqrt{\frac{c^2 \pm c}{2}\sqrt{c^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 \pm \frac{1}{2}c\sqrt{c^2 - a^2}}$.

LXXXV. *You see therefore that in every Case, the Calculus, by which you come to the Equation, is the same every where, and brings out the same Equation, excepting only that I have denoted the Lines by different Letters, according as I made the* Data *and* Quæsita *different. And from different* Data *and* Quæsita *there arises a Diversity in the Reduction of the Equation found:* For the Reduction of the Equation $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$, in order to obtain $x = \frac{2bb}{\sqrt{4bb - aa}}$ the Value of A B, is different from the Reduction of the Equation $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$, in order to obtain $x = \frac{2b}{c}\sqrt{cc - bb}$, the Value of C D; and the Reduction of the Equation $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$ very different to obtain $x = \sqrt{\frac{1}{4}cc \pm \frac{1}{2}c\sqrt{cc - aa}}$ the Value of B C or B D: (as well as this also, $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, to bring out c, a, or b, ought to be reduced after different Methods) but there was no Difference in the Investigation of these Equations (*b*). *And hence it is that Analysis order us to make no Difference between the given and sought Quantities. For since the same Computation agrees to any Case of the given and sought Quantities, it is convenient* that they should be conceived

---

LXXXV. (*b*) As there is no Difference in the Investigation, let the Base C D be a, the Diameter A B $= c$, and B C or B D $= b$; then $\frac{aa}{4} + \frac{b^4}{cc} = bb$ will be an universal Equation, in which substituting x for c, if the Diameter is sought; for a, if the Base; and for b, if a Side is sought; and the former Equations emerge.

conceived and compared without any Difference, that we may the more rightly judge of the Methods of computing them; or rather it is convenient *that you ſhould imagine, that the Queſtion is propoſed of thoſe* Data *and* Quæſita, *given and ſought Quantities, by which you think it is moſt eaſy for you to make out your Equation.*

LXXXVI. *Having therefore any Problem propoſed, compare the Quantities which it involves, and making no Difference between the given and ſought ones, conſider how they depend one upon another, that you may know what Quantities if they are aſſumed, will, by proceeding ſynthetically, give the reſt.* To do which, there is no need that you ſhould at firſt of all conſider how they may be deduced from one another algebraically; but this general Conſideration will ſuffice, that they may be ſome how or other deduced by a direct Connexion with one another. For **Example**; If the Queſtion be put of the Diameter of the Circle A D [See Fig. 8.], and the three Lines A B, B C, and C D, inſcribed in a Semi-circle, and from the reſt given you are to find B C; at firſt Sight it is manifeſt, that the Diameter A D determines the Semi-circle, and then that the Lines A B and C D by Inſcription determine the Points B and C, and conſequently the Quantity ſought B C, and that by a direct Connexion; and yet after what Manner B C is to be had from theſe Data or given Quantities, is not ſo evident to be found by an Analyſis. The ſame Thing is alſo to be underſtood of A B or C D, if they were to be ſought from the other Data. Now, if A D were to be found from the given Quantities A B, B C, and C D, it is equally evident it could not be done ſynthetically; for the Diſtance of the Points A and D depends on the Angles B and C, and thoſe Angles on the Circle in which the given Lines are to be inſcribed, and that Circle is not given without knowing the Diameter AD. The Nature of the Thing therefore requires, that A D be ſought, not ſynthetically, but by aſſuming it as given to make thence a Regreſſion to the Quantities given.

LXXXVII.

LXXXVII. When you ſhall have thoroughly perceived the different Orderings of the Proceſs by which the Terms of the Queſtion may be explained, *make Uſe of any of the ſynthetical Methods by aſſuming Lines as given, from which the Proceſs to others ſeems very eaſy, and the Regreſſion to them very difficult.* For the Computation, tho' it may proceed through various Mediums, yet will begin from thoſe Lines; and will be ſooner performed by ſuppoſing the Queſtion to be ſuch, as if it was propoſed of thoſe Data, and ſome Quantity ſought that would eaſily come out from them, than by thinking of the Queſtion as it is really propoſed. Thus, in the propoſed Example, if from the reſt of the Quantities given you were to find AD. Since I perceive that it cannot be done ſynthetically, but yet provided it was given, I could proceed in my Ratiocination in a direct Connexion from that to other Things, I aſſume AD as given, and then I begin to compute as if it was given indeed, and ſome of the other Quantities, viz. ſome of the given ones, as AB, BC, or CD, were ſought. *And by this Method, by carrying on the Computation from the Quantities aſſumed after this Way to the others, as the Relations of the Lines to one another direct, there will always be obtained an Equation between two Values of ſome one Quantity,* whether one of thoſe Values be a Letter ſet down as a Repreſentation or Name at the Beginning of the Work for that Quantity, and the other a Value of it found out by Computation, or whether both be found by a Computation made after different Ways (*i*).

LXXXVIII.

LXXXVII. (*i*) Beſide *being directed* in the Choice of proper Quantities to ſubſtitute for, *by the Relations of the Lines; it will be of Uſe to chooſe thoſe which lie neareſt the known Parts of the Figure, by the Help of which the next adjacent Parts may be expreſſed without the Intervention of Surds,* by Addition and Subtraction only. Thus, if the Perpendicular of a plane Triangle is ſought, from the three Sides given; 'tis better to ſubſtitute for the Segments

LXXXVIII. But when you have compared the Terms of the Queſtion thus generally, there is more Art and Invention required to find out the particular Connexions or Relations of the Lines that ſhall accommodate them to Computation. For thoſe Things, which to a Perſon that does not ſo thoroughly conſider them, may ſeem to be immediately, and by a very near Relation connected together, when we have a Mind to expreſs that Relation algebraically, require a great deal more round-about Proceeding, and oblige you to begin your Schemes anew, and carry on your Computation Step by Step; as may appear by finding BC from AD, AB, and CD. For *you are only to proceed by ſuch Propoſitions or Enunciations that can fitly be repreſented in algebraick Terms*, whereof in particular you have ſome from Euclid, Ax. 19. Prop. 4. Book 6. and Prop. 47. of the firſt.

LXXXIX. *In the firſt Place, therefore, the Calculus may be aſſiſted by the Addition and Subtraction of Lines*, ſo that from the Values of the Parts you may find the Values of the Whole, or from the Value of the Whole and one

---

ments of the Baſe (by which the final Equation will be ſimple, and the Perpendicular will be found from the Segments) than to ſubſtitute for the Perpendicular (whereby the Segments would be ſurd Quantities, and the final Equation a Quadratic). *Again, if two Lines or Quantities have the ſame Relation to other Parts of the Figure or Problem, the beſt way is to make uſe of neither, but of their Sum, or of their Rectangle, or of the Sum of their alternate Quotes, or of ſome Line, or Lines, to which they both have the ſame Relation, as in Art.* CIX. *And laſtly, if the Area or Periphery of a Figure be given, or ſuch Parts thereof, as have but a remote Relation to the Parts required, it will ſometimes be of uſe to aſſume another Figure, ſimilar to the propoſed, whereof one Side is Unity, or ſome other known Quantity*, from whence the other Parts of this Figure, by the known Proportions of the homologous Sides or Parts, may be found, and an Equation obtained.

one of the Parts, you may obtain the Value of the other Part.

XC. *In the ſecond Place, the Calculus is promoted by the Proportionality of Lines*; for we ſuppoſe (as above) that the Rectangle of the mean Terms, divided by either of the Extremes, gives the Value of the other; or, which is the ſame Thing, if the Values of all four of the Proportionals are firſt had, we make an Equality between the Rectangles of the Extremes and Means. *But the Proportionality of Lines is beſt found out by the Similarity of Triangles*, which, as it is known by the Equality of their Angles, the Analyſt ought in particular to be converſant in comparing them, and conſequently not to be ignorant of Euclid, Prop. 5, 13, 15, 29, and 32, of the firſt Book; and of Prop. 4, 5, 6, 7, and 8, of the ſixth Book; and of the 20, 21, 22, 27, and 31, of the third Book of his Elements. To which alſo may be added the 3d Prop. of the ſixth Book, wherein, from the Proportion of the Sides, is inferred the Equality of the Angles, and *e contra*. Sometimes, likewiſe, the 36th and 37th Prop. of the third Book will do the ſame Thing.

XCI. *In the third Place, the Calculus is promoted by the Addition or Subtraction of Squares*, viz. In right-angled Triangles we add the Squares of the leſſer Sides to obtain the Square of the greateſt, or from the Square of the greateſt Side we ſubtract the Square of one of the leſſer, to obtain the Square of the other.

XCII. *And on theſe few Foundations (if we add to them Prop. 1. of the 6th Element when the Buſineſs relates to Superficies, as alſo ſome Propoſitions taken out of the 11th and 12th of Euclid, when Solids come in Queſtion) the whole Analytick Art, as to right-lined Geometry, depends.* Moreover, all the Difficulties of Problems may be reduced to the ſole Compoſition of Lines out of Parts, and the Similarity of Triangles; ſo that there is no Occaſion to make uſe of other Theorems; becauſe they may all be reſolved into theſe two, and conſequently into the Solutions that may be drawn from them. And, for an Inſtance of this,

I have

I have ſubjoined a Problem about letting fall a Perpendicular upon the Baſe of an oblique-angled Triangle, which is ſolved without the Help of the 47th Prop. of the firſt Book of Euclid. But although it may be of Uſe not to be ignorant of the moſt ſimple Principles on which the Solutions of Problems depend, and though by only their Help any Problems may be ſolved; yet, *for Expedition ſake*, it will be convenient not only that the 47th Prop. of the firſt Book of Euclid, whoſe uſe is moſt frequent, but alſo that *other Theorems ſhould ſometimes be made Uſe of.*

XCIII. As if, for Example, a Perpendicular being let fall upon the Baſe of an oblique-angled Triangle, the Queſtion were (for the ſake of promoting algebraick Calculus) to find the Segments of the Baſe; here it would be of Uſe to know, that *the Difference of the Squares of the Sides is equal to the double Rectangle under the Baſe, and the Diſtance of the Perpendicular from the Middle of the Baſis* (*k*).

XCIV. *If the vertical Angle of any Triangle be biſected*, it will not only be of Uſe to know, *that the Baſe is divided in Proportion to the Sides* (*l*), but alſo that *the Difference of the Rectangles made by the Sides, and the Segments of the Baſe is equal to the Square of the Line that biſects the Angle* (*m*).

XCV. If the Problem relate to Figures inſcribed in a Circle, this Theorem will frequently be of Uſe, viz. That *in any quadrilateral Figure inſcribed in a Circle, the Rectangle of the Diagonals is equal to the Sum of the Rectangles of the oppoſite Sides* (*n*).

XCVI. *The*

XCIII. (*k*) See Problem XII. Number 199.
XCIV. (*l*) Eucl. VI. 3.
(*m*) Whiſton's 1ſt. Schol. Eucl. VI. 17.
XCV. (*n*) Whiſton's Schol. Eucl. VI. 16.

XCVI. *The Analyſt may obſerve ſeveral Theorems of this Nature in his Practice, and reſerve them for his Uſe*; *but* let him uſe them ſparingly, if he can, with equal Facility, or not much more Difficulty, deduce the Solution from more ſimple Principles of Computation. Wherefore *let him take eſpecial Notice of the three Principles firſt propoſed, as being more known, more ſimple, more general, but a few, and yet ſufficient for all Problems, and let him endeavour to reduce all Difficulties to them before others.*

XCVII. But that theſe Theorems may be accommodated to the Solution of Problems, *the Schemes are oft times to be farther conſtructed, and that moſt frequently, by producing out ſome of the Lines till they cut others, or become of an aſſigned Length*; *or by drawing from ſome remarkable Point, Lines parallel or perpendicular to others, or by conjoining ſome remarkable Points*; *as alſo ſometimes by conſtructing after other Methods, according as the State of the Problem, and the Theorems which are made Uſe of to ſolve it, ſhall require.* As for Example, If *two Lines that do not meet each other, make given Angles with a certain third Line*, perhaps we *produce them ſo, that when they concur, or meet, they ſhall form a Triangle, whoſe Angles, and conſequently the Ratio's of their Sides, ſhall be given*; or, *if any Angle is given*, or be equal to any one, we often *compleat it into a Triangle given in Specie, or ſimilar to ſome other, and that by producing ſome of the Lines in the Scheme, or by drawing a Line ſubtending an Angle. If the Triangle be an oblique angled one*, we often *reſolve it into two right-angled ones, by letting fall a Perpendicular.* If the *Buſineſs concerns multilateral or many-ſided Figures, we reſolve them into Triangles, by drawing diagonal Lines*; and ſo in others; always aiming at this End, viz. *that the Scheme may be reſolved either into given, or ſimilar, or right-angled Triangles* (*o*). Thus, in the Example propoſed [See Fig. 9.] I draw

XCVII. (*o*) *In this Preparation of the Figure, if an Angle be given, let the Perpendicular be oppoſite to that Angle, and alſo fall from the End of a given Line if poſſible.*

I draw the Diagonal BD, and the Trapezium ABCD may be reſolved into the two Triangles, ABD a right angled one, and BDC an oblique angled one. Then I reſolve the oblique angled one into two right angled Triangles, by letting fall a Perpendicular from any of its Angles, B, C, or D, upon the oppoſite Side; as from B upon CD produced to E, that BE may meet it perpendicularly. But ſince the Angles BAD and BCD make in the mean while two right ones (by 22 Prop. 3. Elem.) as well as BCE and BCD, I perceive the Angles BAD and BCE to be equal; conſequently the Triangles BCE and DAB to be ſimilar. And ſo I ſee that the Computation (by aſſuming AD, AB, and BC, as if CD were ſought) may be thus carried on, viz. AD and AB (by reaſon of the right angled Triangle ABD) give you BD. AD, AB, BD, and BC (by reaſon of the ſimilar Triangles ABD and CEB) give BE and CE. BD and BE (by reaion of the right angled Triangle BED) give ED; and ED — EC gives CD. Whence there will be obtained an Equation between the Value of CD ſo found out, and the algebraick Letter that was put for it. *We may alſo (and for the greateſt Part it is better ſo to do, than to follow the Work too far in one continued Series) begin the Computation from different Principles, or at leaſt promote it by divers Methods to any one and the ſame Concluſion, that at length there may be obtained two Values of any the ſame Quantity, which may be made equal to one another.* Thus, AD, AB, and BC, give BD, BE, and CE, as before; then CD + CE, gives ED; and laſtly, BD, and ED (by reaſon of the right angled Triangle BED) give BE. *You might alſo very well form the Computation thus, that the Values of thoſe Quantities ſhould be ſought between which any other known Relation intercedes, and then that Relation will bring it to an Equation.* Thus, ſince the Relation between the Lines BD, DC, BC, and CE, is manifeſt from the 12th Prop. of the ſecond Book of the Elements, viz. that $BDq - BCq - CDq$ is $= 2CD \times CE$: I ſeek BDq from the aſſumed AD and AB; and CE from the aſſumed AD, AB, and BC. And, laſtly, aſſuming CD, I make $BDq - BCq - CDq =$

$CD^q = 2CD \times CE$. *After such Ways, and led by these Sorts of Consultations, you ought always to take care of the Series of the Analysis, and of the Scheme to be constructed in order to it, at once.*

XCVIII. *Hence, I believe, it will be manifest what Geometricians mean, when they bid you imagine that to be already done which is sought. For making no Difference between the known and unknown Quantities, you may assume any of them to begin your Computation from, as much as if all had indeed been known by a previous Solution, and you were no longer to consult the Solution of the Problem, but only the Proof of that Solution.* Thus, in the first of the three Ways of computing already described, although perhaps AD be really sought, yet I imagine CD to be the Quantity sought, as if I had a mind to try whether its Value derived from AD will coincide with its Quantity before known. So also in the two last Methods, I do not propose, as my Aim, any Quantity to be sought, but only some how or other to bring out an Equation from the Relations of the Lines. And, for sake of that Business, I assume all the Lines AD, AB, BC, and CD, as known, as much as if (the Question being before solved) the Business was to enquire whether such and such Lines would satisfy the Conditions of it, by agreeing with any Equations which the Relations of the Lines can exhibit. I entered upon the Business at first Sight after this Way, and with such Sort of Consultations; but when I arrive at an Equation, I change my Method, and endeavour to find the Quantity sought, by the Reduction and Solution of that Equation. *Thus, lastly, we assume often more Quantities as known, than what are expressed in the State of the Question.* Of this you may see an eminent Example in the 55th of the following Problems, where I have assumed a, b, and c, in the Equation $aa + bx + cx^2 = yy$, for determining the conick Section; as also the other Lines r, s, t, v, of which the Problem, as it is proposed, hints nothing. *For you may assume any Quantities by the Help whereof it is possible to come to Equations; only taking this Care, that you obtain as many Equations from them as you assume Quantities really unknown.*

XCIX. *After you have conſulted your Method of Computation, and drawn up your Scheme, give Names to the Quantities that enter into the Computation, (that is, from which being aſſumed, the Values of others are to be derived, until at laſt you come to an Equation) chuſing ſuch as involve all the Conditions of the Problem, and ſeem accommodated before others to the Buſineſs, and that ſhall render the Concluſion (as far as you can gueſs) more ſimple, but yet not more than what ſhall be ſufficient for your Purpoſe (p). Wherefore, do not give proper Names to Quantities which may be denominated from Names already given.* Thus, from a whole Line and its Parts, from the three Sides of a right-angled Triangle, and from three or four Proportionals, ſome one of the leaſt conſiderable we leave without a Name, becauſe its Value may be derived from the Names of the reſt. As in the Example already brought, if I make $AD = x$, and $AB = a$, I denote BD by no Letter, becauſe it is the third Side of a right-angled Triangle ABD, and conſequently its Value is $\sqrt{xx - aa}$. Then if I call $BC = b$, ſince the Triangles DAB and BCE are ſimilar, and thence the Lines $AD : AB :: BC : CE$ proportional, to three whereof, viz. to AD, AB, and BC, there are already Names given; for that Reaſon I leave the fourth CE without a Name, and in its room I make Uſe of $\frac{ab}{x}$, diſcovered from the foregoing Proportionality. And ſo if DC be called c, I give no Name to DE, becauſe from its Parts, DC and CE, or c and $\frac{ab}{x}$, its Value $c + \frac{ab}{x}$ comes out. [See Figure 10.]

C. But

XCIX. (p) When nothing is required but an algebraical Expreſſion, the more ſimple it is the better; but if we are to proceed to a geometrical Conſtruction alſo, it is not ſo much the Simplicity of the Expreſſion, as the Eaſe and Simplicity of the Conſtruction, to which we are to attend; and *we are always to aim at Simplicity in the Equation, and Eaſe in the Conſtruction.*

C. But while I am talking of these Things, the Problem is almost reduced to an Equation. For, *after the aforesaid Letters are set down for the Species of the principal Lines, there remains nothing else to be done, but that out of those Species the Values of other Lines be made out according to a preconceived Method, until after some foreseen Way they come out to an Equation.* And I see nothing wanting in this Case, except that by means of the right-angled Triangles BCE and BDE, I can bring out a double Value of BE, viz. $BC\square - CE\square$ $\left(\text{or } bb - \frac{aabb}{xx}\right) = BE\square$; as also $BD\square - DE\square$ $\left(\text{or } xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} + \frac{aabb}{xx}\right) = BE\square$. And hence (blotting out on both Sides $\frac{aabb}{xx}$) I shall have the Equation $bb = xx - aa = cc - \frac{2abc}{x}$; which, being reduced, becomes

$$x^3 = \begin{matrix} + aa \\ + bbx \\ + cc \end{matrix} + 2abc.$$

CI. But since I have reckoned up several Methods for the Solution of this Problem, and those not much unlike one another in the precedent Paragraphs, of which that taken from Prop. 12. of the second Book of the Elements being something more elegant than the rest, we will here subjoin it. Make therefore $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$, and $CD = c$, and you will have $BD\square = xx - aa$, and $CE = \frac{ab}{x}$, as before. These Species, therefore, being substituted in the Theorem $BD\square - BC\square - CD\square = 2CD \times CE$, there will arise $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$; and, after Reduction,

$$x^3 = \begin{matrix} + aa \\ + bbx \\ + cc \end{matrix} + 2abc, \text{ as before.}$$

But that it may appear how great a Variety there is in the Invention of Solutions, and that it is not very difficult for a prudent Geometrician to light upon them; I have thought fit to shew other Ways of doing the same Thing. And having drawn the Diagonal BD, if in room of the Perpendicular BE, which before was let fall from the Point B upon the Side DC, you now let fall a Perpendicular from the Point D upon the Side BC, or from the Point C upon the Side BD, by which the oblique angled Triangle BCD may any how be resolved into two right angled Triangles, you may come almost by the same Methods I have already described to an Equation. And there are other Methods very different from these.

CII. As if there are drawn two Diagonals, AC and BD [See Fig. 11.], BD will be given by assuming AD and AB; as also AC, by assuming AD and CD; then by the known Theorem of quadrilateral Figures inscribed in a Circle, viz. That $AD \times BC + AB \times CD$ is $= AC \times BD$, you will obtain an Equation [See Fig. 11.]. The Names, therefore, of the Lines AD, AB, BC, CD, remaining, viz. x, a, b, c; BD will be $= \sqrt{xx - aa}$, and AC $= \sqrt{xx - cc}$, by the 47th Prop. of the first Element, and these Species of the Lines being substituted in the Theorem we just now mentioned, there will come out $xb + ac = \sqrt{xx - cc} \times \sqrt{xx - aa}$. The Parts of which Equation being squared and reduced, you will again have

$$x^3 = \begin{matrix} + aa \\ + bbx \\ + cc \end{matrix} + 2abc.$$

CIII. But, moreover, that it may be manifest after what Manner the Solutions drawn from that Theorem may be thence reduced to only the Similarity of Triangles; erect BH perpendicular to BC, and meeting AC in H, and there will be formed the Triangles BCH, BDA, similar, by reason of the right Angles at B, and equal Angles at C and D (by the 21. 3. Elem.);

as

as alſo the Triangles BCD, BHA, ſimilar, by reaſon of the equal Angles both at B (as may appear by taking away the common Angle DBH from the two right ones), as alſo at D and A (by 21. 3. Elem.). You may ſee, therefore, that from the Proportionality BD : AD :: BC : HC, there is given the Line HC; as alſo AH from the Proportionality BD : CD :: AB : AH. Whence, ſince AH + HC = AC, you have an Equation. The Names therefore, aforeſaid, of the Lines remaining, viz. x, a, b, c, as alſo the Values of the Lines AC and BD, viz. $\sqrt{xx - cc}$ and $\sqrt{xx - aa}$, the firſt Proportionality will give $HC = \frac{bx}{\sqrt{xx - aa}}$, and the ſecond will give $AH = \frac{ac}{\sqrt{xx - aa}}$. Whence, by reaſon of $AH + HC = AC$, you will have $\frac{bx + ac}{\sqrt{xx - aa}} = \sqrt{xx - cc}$; an Equation which (by multiplying by $\sqrt{xx - aa}$, and by ſquaring) will be reduced to a Form often deſcribed in the preceding Pages.

CIV. But that it may yet farther appear what a Plenty of Solutions may be found, produce BC and AD [See Fig. 12.] till they meet in F, and the Triangles ABF and CDF will be ſimilar, becauſe the Angle at F is common, and the Angles ABF and CDF (while they compleat the Angle CDA to two right ones, by 13. 1. and 22. 3. Elem.) are equal. Wherefore, if beſides the four Terms which compoſe the Queſtion, there was given AF, the Proportion AB : AF :: CD : CF would give CF. Alſo AF — AD would give DF, and the Proportion CD : DF :: AB : BF would give BF; whence (ſince BF — CF is = BC) there would ariſe an Equation. But ſince there are aſſumed two unknown Quantities AD and DF as if they were given, there remains another Equation to be found. I let fall, therefore, BG at right Angles upon AF, and the Proportion AD : AB :: AB : AG, will give AG; which

being had, the Theorem borrowed from the 13. 2. Euclid, viz. that $BF^q + 2FAG$ is $= AB^q + AF^q$ will give another Equation. a, b, c, x, remaining therefore as before, and making $AF = y$, you will have (by insisting on the Steps already laid down) $\frac{cy}{a} = CF$. $y - x = DF$. $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} = BF$. And thence $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} - \frac{cy}{a} = b$, the first Equation. Also $\frac{aa}{x}$ will be $= AG$, and consequently $\frac{aayy - 2a^2xy + a^2x^2}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa + yy$ for the second Equation. Which two, by Reduction, will give the Equation sought, viz. The Value of y found by the first Equation is $\frac{abc + aax}{aa - cc}$, which being substituted in the second, will give an Equation, from which, rightly ordered, will come out

$$x^3 = \begin{matrix} + aa \\ + bbx + 2abc, \\ + cc \end{matrix} \text{ as before } (q).$$

CV. And

CIV. (q) For $\frac{a^2y^2 - 2a^2xy + a^2x^2}{c^2} + \frac{2a^2y}{x} = a^2 + y^2$; which, by multiplying by c^2x, by transposing, and by ranging the Terms according to the Dimensions of y, becomes $y^2 \times \overline{x^2x - c^2x} - y \times \overline{2a^2x^2 - 2a^2c^2} + a^2x^3 - a^2c^2x = 0$; which, by substituting $\frac{a^2b^2c^2 + 2a^3bcx + a^4x^2}{\overline{a^2 - c^2} \times \overline{a^2 + c^2}}$ (the Value of y^2) for y^2, and for $-y$ (its Value) $\frac{-abc - a^2x}{a^2 - c^2}$, by abbreviating the Terms (R. 1.), and by exterminating

CV. And ſo, if AB and CD are produced till they meet one another, the Solution will be much the ſame, unleſs perhaps it be ſomething eaſier. Wherefore I will rather ſubjoin another Specimen of this Problem, drawn from a Fountain very unlike the former, viz. by ſeeking the Area of the quadrilateral Figure propoſed, and that doubly. I draw therefore the Diagonal BD, and the quadrilateral Figure may be reſolved into two Triangles. Then uſing the Names of the Lines x, a, b, c, as before, I find $BD = \sqrt{xx - aa}$, and thence $\frac{1}{2}a\sqrt{xx-aa}$ ($= \frac{1}{2}AB \times BD$) the Area of the Triangle ABD. Moreover, having let fall BE perpendicularly upon CD, you will have (by reaſon of the ſimilar Triangles ABD, BCE) $AD : BD :: BC : BE$, and conſequently $BE = \frac{b}{x}\sqrt{xx-aa}$. Wherefore alſo $\frac{bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ ($= \frac{1}{2}CD \times BE$) will be the Area of the Triangle BCD. Now, by adding theſe Areas, there will ariſe $\frac{ax+bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$, the Area of the whole Quadrilateral. After the ſame Way, by drawing the Diagonal AC, and ſeeking the Areas of the Triangles ACD and ACB, and adding them, there will again be obtained the Area of the Quadrilateral Figure $\frac{cx+ba}{2x}\sqrt{xx-cc}$. Wherefore, by making theſe Areas equal, and multiplying both by $2x$, you will have $\overline{ax+bc}\sqrt{xx-aa} = \overline{cx+ba}\sqrt{xx-cc}$, an Equation which, by ſquaring

---

nating the Fraction (R. 3.), becomes $a^2b^2c^2x - a^4x^3 + 2a^3bc^3 + 2a^4c^2x + a^4x^3 - a^2c^2x^3 - a^4c^2x + a^2c^4x = 0$; which being again abbreviated, and the Terms divided by a^2c^2, and by tranſpoſing $-x^3$, becomes $x^3 = \overline{a^2+b^2+c^2} \times x + 2abc$.

ing and dividing by $aax - ccx$, will be reduced to the Form already often found out,

$$x^3 = \begin{matrix} + aa \\ + bbx \\ + cc \end{matrix} + 2abc.$$

CVI. Hence it may appear, how great a Plenty of Solutions may be had, and that ſome Ways are much more neat than others. Wherefore, *if the Method you take from your firſt Thoughts, for ſolving a Problem, be but ill accommodated to computation, you muſt again conſider the Relations of the Lines, until you ſhall have hit on a Way as fit and elegant as poſſible. For thoſe Ways that offer themſelves at firſt Sight, may often create ſufficient Trouble if they are made uſe of.* Thus, in the Problem we have been upon, it would not have been more difficult to have fallen upon the following Method, than upon one of the precedent ones [See Fig. 13.]. Having let fall BR and CS perpendicular to AD, as alſo CT to BR, the Figure will be reſolved into right angled Triangles. And it may be ſeen, that AD and AB give AR, AD and CD give SD, AD — AR — SD gives RS or TC. Alſo AB and AR give BR, CD and SD give CS or TR, and BR — TR gives BT. Laſtly, BT and TC give BC, whence an Equation will be obtained. But if any one ſhould go to compute after this Rate, he would fall into larger and more perplexed algebraick Terms than are any of the former, and more difficult to be brought to a final Equation (*r*).

So

CVI. (*r*) For ſuppoſing AC, and *b* BD to be drawn, the Triangles ABD, ACD, are rectangular (Eucl. VI. 8.) whence $x : a :: a : \frac{a^2}{x}$, and $x : c :: c : \frac{c^2}{x}$, and

$$RS = DA - AR - SD = x - \frac{a^2 - c^2}{x} = \frac{x^2 - a^2 - c^2}{x}$$

So much for the Solution of Problems in right-lined Geometry; unleſs it may perhaps be worth while to *note moreover, that when Angles, or Poſitions of Lines, expreſſed by Angles, enter the State of the Queſtion, Lines, or the Proportions of Lines, ought to be uſed inſtead of Angles, viz. ſuch as may be derived from given Angles by a Trigonometrical Calculation; or from which being found, the Angles ſought will come out by the ſame Calculus* Several Inſtances of which may be ſeen in the following Pages.

CVII. *As*

$\frac{x^2 - a^2 - c^2}{x} = TC$. But $BR = \sqrt{BA^2 - AR^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}}$; and $CS = \sqrt{CD^2 - DS^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^4}{x^2}} = TR$; and $BT = BR - RT = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}} - \sqrt{c^2 - \frac{c^4}{x^2}}$; and $BC^2 = CT^2 + TB^2$: Whence $b^2 = \frac{x^4 - 2a^2x^2 - 2c^2x^2 + a^4 + 2a^2c^2 + c^4}{x^2} + a^2 - \frac{a^4}{x^2} - 2\sqrt{a^2c^2 - \frac{a^2c^4 - c^2a^4}{x^2} + \frac{a^4c^4}{x^4}} + c^2 - \frac{c^4}{x^2}$; which, by multiplying by x^2, by abbreviating, and by ſquaring, becomes $4a^2c^2x^4 - 4a^2c^4 - 4a^4c^2 \times x^2 + a^4c^4 = x^8 - 2a^2 - 2c^2 - 2b^2 \times x^6 + 6a^2c^2 + 2a^2b^2 + a^4 + b^4 + 2b^2c^2 + c^4 \times x^4 - 4a^4c^2 - 4a^2c^4 - 4a^2b^2c^2 \times x^2 + 4a^4c^4$; which again abbreviated, and divided by x^2, becomes $x^6 - a^2 - b^2 - c^2 \times x^4 + a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \times x^2 - 4a^2b^2c^2 = 0$; that is (184), $x^3 - a^2 - b^2 - c^2 \times x - 2abc = 0$; viz. by dividing by $x^3 - a^2 - b^2 - c^2 \times x + 2abc = 0$.

CVII. *As for what belongs to the Geometry of curve Lines, we uſe to denote them, either by deſcribing them by the local Motion of right Lines, or by uſing Equations indefinitely expreſſing the Relation of right Lines diſpoſed according to ſome certain Law, and ending at the curve Lines. The Antients did the ſame by the Sections of Solids, but leſs commodiouſly. But the Computations that regard Curves deſcribed after the firſt Way, are no otherwiſe performed than in the precedent Pages* [See Fig. 14.] As if AKC be a curve Line deſcribed by K the vertical Point of the Square AKφ, whereof one Leg AK freely ſlides through the Point A given by Poſition, while the other Kφ of a determinate Length is carried along the right Line AD alſo given by Poſition, and you are to find the Point C in which any right Line CD given alſo by Poſition ſhall cut this Curve: I draw the right Lines AC, CF, which may repreſent the Square in the Poſition ſought, and the Relation of the Lines (without any Difference or Regard of what is given or ſought, or any Reſpect had to the Curve) being conſidered, I perceive the Dependency of the others upon CF and any of theſe four, viz. BC, BF, AF, and AC, to be ſynthetical; two whereof I therefore aſſume, as $CF = a$, and $CB = x$, and beginning the Computation from thence, I preſently obtain $BF = \sqrt{aa - xx}$, and $AB = \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$, by reaſon of the right Angle CBF, and that the Lines BF : BC :: BC : AB are continual Proportionals. Moreover, from the given Poſition of CD, AD is given, which I therefore call b; there is alſo given the Ratio of BC to BD, which I make as d to e, and you have $BD = \frac{ex}{d}$, and $AB = b - \frac{ex}{d}$. Therefore $b - \frac{ex}{d}$ is $= \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$, an Equation which (by ſquaring its Parts, and multiplying

ing by $aa - xx$, &c.) will be reduced to this Form,

$$x^4 = \frac{2bdex^3 - bbdd\,xx - 2aabdex + aabbdd + aaee}{dd + ee}.$$

Whence, laſtly, from the given Quantities a, b, d, and e, there may be found x, by Rules hereafter to be given, and at that Interval or Diſtance x or BC, a right Line drawn parallel to AD will cut CD in the Point ſought C.

CVIII. *But if we do not uſe Geometrical Deſcriptions but Equations to denote the Curve Lines by, the Computations will thereby become as much ſhorter and eaſier, as the gaining of thoſe Equations can make them* [See Fig. 15.]. As if the Interſection C of the given Ellipſis ACE with the right Line CD given by Poſition, be ſought. To denote the Ellipſis, I take ſome known Equation proper to it, as $rx - \frac{r}{q}xx = yy$, where x is indefinitely put for any Part of the Axis Ab or AB, and y for the Perpendicular be or BC terminated at the Curve; and r and q are given from the given Species of the Ellipſis. Since therefore CD is given by Poſition, AD will be alſo given, which call a; and BD will be $a - x$; alſo the Angle ABC will be given, and thence the Ratio of BD to BC, which call 1 to e, and BC (y) will be $= ea - ex$, whoſe Square $eeaa - 2eeax + eexx$ will be equal to $rx - \frac{r}{q}xx$. And thence by Reduction there will ariſe $xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}}$, or

$$x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}.$$

Moreover,

Moreover, although a Curve be denoted by a geometrical Deſcription, or by a Section of a Solid, yet thence an Equation may be obtained, which ſhall define the Nature of the Curve, and conſequently all the Difficulties of Problems propoſed about it may be reduced hither.

Thus, in the former Example [See Fig. 14.], if AB be called x, and BC y, the third Proportional BF will be $\frac{yy}{x}$, whoſe Square, together with the Square of BC, is equal to CFq, that is, $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; or $y^4 + xxyy = aaxx$. And this is an Equation by which every Point C of the Curve AKC, agreeing or correſponding to any Length AB of the Baſe (and conſequently the Curve itſelf) is defined, and from whence therefore you may obtain the Solutions of Problems propoſed concerning this Curve.

After the ſame Manner almoſt, when a Curve is not given in Specie, but propoſed to be determined, you may feign an Equation at Pleaſure, that may generally contain its Nature; and aſſume this to denote it as if it was given, that from its Aſſumption you can any Way come to Equations by which the Aſſumptions may at length be determined: Examples whereof you have in ſome of the following Problems, which I have collected for a more full Illumination of this Doctrine, and for the Exerciſe of Learners, and which I now proceed to deliver (*s*).

PROBLEM

CVIII. (*s*) Sometimes the finding the relative algebraic Expreſſion of the Quantities ſought, reſolves the Problem; but moſt commonly a geometrical Effection, or Conſtruction, is alſo neceſſary; and the Problem is ſaid to be conſtructed, when the Point or Line which reſolves it, is found. And this is done, in Problems of one

Problem I.

Having a finite right Line BC *given, from whoſe Ends the two right Lines* BA, CA, *are drawn in the given Angles* ABC, ACB; *to find* AD *the Height of their Concourſe* A, *above the given Line* BC [See Fig. 16.].

Make BC $= a$, and AD $= y$; and ſince the Angle ABD is given, there will be given (from the Table of Signs or Tangents) the Ratio between the Lines AD and BD, which make as d to e. Therefore $d : e ::$ AD (y) : BD. Wherefore BD $= \frac{ey}{d}$. In like manner

---

one or two Dimenſions, by finding the Right-Lines whoſe Sum or Difference is the Value of the Line ſought, and connecting them, by Addition or Subtraction, each under its proper Sign. In this

197. We are to obſerve, that *a Fraction ſhews that a fourth Proportional is to be found to the three given, the firſt Extreme being the Denominator, and the two mean Terms the Factors of the Numerator:* This Proportional is had by Eucl. VI. 11. and if the Numerator is of more than two, and the Denominator of more than one Dimenſion, this Operation is to be repeated. And

198. *A Square Root ſhews that a mean Proportional between the Factors under the Sign is to be found.* This, if it be a ſimple Term, is found by Eucl. VI. 13. If the Sum of two Terms, it will be the Hypothenuſe of a right-angled Triangle, whoſe Sides are mean Proportionals between the Factors of the Terms, Eucl. I. 47. or, if the Terms have a common Factor, it will be a Mean between it and the Sum of the other Factors, Eucl. VI. 17. If the Difference of two Terms, it will be the Side of a right-angled Triangle, whoſe Hypothenuſe is the Root of the poſitive Term, and the other Side is the Root of the negative one, and is found by Eucl. I. 47. or it is a Mean between the Sum and Difference of the Terms, and found by Eucl. II. 5.

ner, by reason of the given Angle ACD, there will be given the Ratio between AD and DC, which make as d to f, and you will have $DC = \frac{fy}{d}$. But $BD + DC = BC$, that is, $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Which reduced, by multiplying both Parts of the Equation by d, and dividing by $e + f$ becomes $y = \frac{ad}{e+f}$.

Problem II.

The Sides AB, AC, *of the Triangle* ABC *being given, and also the Base* BC, *which the Perpendicular* AD *let fall from the vertical Angle cuts in* D, *to find the Segments* BD *and* DC [See Fig. 17.]

Let $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, and $BD = x$, and DC will $= c - x$. Now since $AB^q - BD^q$ $(aa - xx) = AD^q$; and $AC^q - DC^q$ $(bb - cc + 2cx - xx) = AD^q$; you will have $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$; which by Reduction, becomes $\frac{aa - bb + cc}{2c} = x$.

But that it may appear that all the Difficulties of all Problems may be resolved by only the Proportionality of Lines, without the Help of the 47th of 1. Euclid, although not without round-about Methods, I thought fit to subjoin the following Solution of this Problem over and above. From the Point D let fall the Perpendicular DE upon the Side AB, and the Names of the Lines, already given, remaining, you will have $AB : BD :: BD : BE$. $a : x :: x : \frac{xx}{a}$ (a). And $BA - BE \left(a - \frac{xx}{a}\right) = EA$.

Prob. II. (a) Eucl. VI. 8.

$= EA$. Alſo $EA : AD :: AD : AB$, and conſequently $EA \times AB$ $(aa - xx) = ADq$. And ſo, by reaſoning about the Triangle ACD (*b*), there will be found again $ADq = bb - cc + 2cx - xx$. Whence you will obtain, as before, $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$.

PROBLEM III.

The Area and Perimeter of the right-angled Triangle ABC *being given, to find the Hypothenuſe* BC [See Fig. 18.]

Let the Perimeter be called a, the Area bb, make $BC = x$, and $AC = y$; then will be $AB = \sqrt{xx - yy}$ (*a*); whence again the Perimeter $(BC + AC + AB)$ is $x + y + \sqrt{xx - yy}$, and the Area $(\frac{1}{2} AC \times AB)$ is $\frac{1}{2} y \sqrt{xx - yy}$ (*b*). Therefore $x + y + \sqrt{xx - yy} = a$, and $\frac{1}{2} y \sqrt{xx - yy} = bb$.

The latter of theſe Equations gives $\sqrt{xx - yy} = \frac{2bb}{y}$; wherefore I write $\frac{2bb}{y}$ for $\sqrt{xx - yy}$ in the former Equation, that the Aſymmetry may be taken away: and there comes out $x + y + \frac{2bb}{y} = a$, or multiplying by y, and ordering the Equation $yy = ay - xy - 2bb$. Moreover, from the Parts of the former Equation, I take away $x + y$, and there remains $\sqrt{xx - yy} = a - x - y$, and ſquaring the Parts to take away again the Aſymmetry, there comes out $xx - yy = aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy$, which, ordered and divided

---

Prob. II. (*b*) i. e. By drawing from D, a Perpendicular to the Side AC, &c.

Prob. III. (*a*) Eucl. I. 47. (*b*) Eucl. I. 41.

vided by 2, becomes $yy = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$. Laſtly, making an Equality between the two Values of yy, I have $ay - xy - 2bb = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$, which reduced becomes $\frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a} = x$.

The ſame otherwiſe.

Let $\frac{1}{2}$ the Perimeter be $= a$, the Area $= bb$, and $BC = x$, and it will be $AC + AB = 2a - x$. Now ſince xx (BCq) is $= ACq + ABq$, and $4bb = 2AC \times AB$, $xx + 4bb$ will be $= ACq + ABq + 2AC \times AB =$ to the Square of $\overline{AC + AB} =$ to the Square of $\overline{2a - x} = 4aa - 4ax + xx$. That is, $xx + 4bb = 4aa - 4ax + xx$, which reduced becomes $a - \frac{bb}{a} = x$.

Problem IV.

Having given the Perimeter and Perpendicular of a right-angled Triangle, to find the Triangle [See Fig. 67.].

Let C be the right Angle of the Triangle ABC, and CD a Perpendicular let fall thence to the Baſe AB. Let there be given $AB + BC + AC = a$, and $CD = b$. Make the Baſe $AB = x$, and the Sum of the Sides will be $a - x$. Put y for the Difference of the Legs, and the greater Leg AC will be $= \frac{a - x + y}{2}$ (a); the leſs $BC = \frac{a - x - y}{2}$ (b). Now, from the Nature of a right-angled Triangle, you have $ACq + BCq = ABq$, that is $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = xx$ (c). And alſo $AB : AC :: BC : DC$ (d); therefore $AB \times DC = AC \times BC$.

Prob. IV. (a) Numb. 22. (b) Numb. 36. (c) Eucl. I. 47. (d) Eucl. VI. 8.

$AC \times BC$, that is $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. By the former Equation $yy = xx + 2ax - aa$. By the latter $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. And consequently $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. And, by Reduction, $4ax + 4bx = 2aa$, or $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Geometrically, thus:

In every right angled Triangle, as the Sum of the Perimeter and Perpendicular is to the Perimeter, ſo is Half the Perimeter to the Baſe.

Subtract $2x$ from a, and there will remain $\frac{ab}{a+b}$, the Exceſs of the Sides above the Baſe. Whence, again, as *in every right angled Triangle, the Sum of the Perimeter and Perpendicular is to the Perimeter, ſo is the Perpendicular to the Exceſs of the Sides above the Baſe.*

Problem V.

Having given the Baſe AB *of a right angled Triangle, and the Sum of the Perpendicular and the Legs,* CA + CB + CD; *to find the Triangle.*

Let $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, and $AC + CB$ will be $= a - x$. Put $AC - CB = y$, and AC will $= \frac{a - x + y}{2}$ (*a*), and $CB = \frac{a - x - y}{2}$ (*b*). But $AC^q + CB^q$ is $= AB^q$ (*c*); that

Prob. V. (*a*) Numb. 22. (*b*) Numb. 36. (*c*) Euclid I. 47.

that is, $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = bb$. Moreover it is $AC \times CB = AB \times CD$ (*d*); that is, $\frac{aa - 2ax + xx - yy}{4} = bx$. Which being compared, you have $2bb - aa + 2ax - xx = yy = aa - 2ax + xx - 4bx$. And by Reduction, $xx = 2ax + 2bx - aa + bb$, and $x = a + b - \sqrt{2ab + 2bb}$.

Geometrically, thus:

In any right-angled Triangle, from the Sum of the Legs and Perpendicular, ſubtract the mean Proportional between the ſaid Sum and the Double of the Baſe, and there will remain the Perpendicular.

The ſame otherwiſe.

Make $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, and $AC = x$, and BC will be $= \sqrt{bb - xx}$, $CD = \frac{x\sqrt{bb - xx}}{b}$. And $x + CB + CD = a$, or $CB + CD = a - x$. And therefore $\frac{b + x}{b}\sqrt{bb - xx} = a - x$ (*e*). And the Parts being ſquared and multiplied by

---

Prob. V. (*d*) Eucl. VI. 8. $AB : AC :: BC : CD$, i.e. $b : x :: \sqrt{b^2 - x^2} : \frac{2\sqrt{bb - xx}}{b}$; whence

(*e*) $BC : AB :: CD : AC$ (Eucl. V. 40.), i.e. $\sqrt{bb - xx} : b :: \frac{x\sqrt{b^2 - x^2}}{b} : x$; and $AC + AB : AB :: DC + CB : BC$ (Eucl. V. 18.), i.e. $x + b : b :: a$

by bb, there will be made $-x^4-2bx^3+2b^3x+b^4 = aabb-2abbx+bbxx$. Which Equation being ordered, by Tranſpoſition of Parts, after this Manner, $x^4+2bx^3\begin{matrix}+3bb\\+2ba\end{matrix}xx\begin{matrix}+2b^3\\+2abb\end{matrix}x\begin{matrix}+b^4\\+2ab^3\\+aabb\end{matrix} = 2bb\,xx\begin{matrix}+4b^3\\+4abb\end{matrix}x\begin{matrix}+2b^4\\+2ab^3\end{matrix}$ (f) and extracting the Roots on both Sides, there will ariſe $xx+bx+bb+ab = x+b\sqrt{2ab+2bb}$. And the Root being again extracted, $x = -\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}bb-\frac{1}{2}ab}$.

The Geometrical Conſtruction [See Fig. 68.].

Take therefore AB $= \frac{1}{2}b$, BC $= \frac{1}{2}a$, CD $= \frac{1}{2}$ AB, AE *a mean Proportional between* b *and* AC, *and* EF *on both*

$: b :: a-x : \sqrt{bb-xx}$; whence $a-x =$ DC $+$ CB $= \frac{x+b}{b}\sqrt{bb-xx}$ (Eucl. VI. 11.)

(f) By Tranſpoſition it becomes $x^4+2bx^3+b^2x^2-b^4+a^2b^2 = \overline{2b^2+2ab^2}\times x$; and adding to each Member [in order to compleat the Square (CXLII)] $\overline{2ab+2b^2}\times\overline{x^2+bx+b^2} = \overline{2b^2+2ab}\times x^2+\overline{2b^3+2ab^2}\times x+2b^4+2ab^3$, we ſhall have $x^4+2bx^3+\overline{3b^2+2ab}\times x^2+\overline{2b^3+2ab^2}\times x+b^4+2ab^3+2a^2b^2 = \overline{2b^2+2ab}\times x^2+\overline{4b^3+4ab^2}\times x+2b^4+2ab^3$.

both Sides a mean Proportional between b *and* DE, *and* BF; BF *will be the two Legs of the Triangle* (*g*).

Problem VI.

Having given, in the right angled Triangle ABC, *the Sum of the Sides* AC + BC, *and the Perpendicular* CD, *to find the Triangle.*

Let AC + BC = a, CD = b, AC = x, and BC will be = $a - x$, AB = $\sqrt{aa - 2ax + 2xx}$ (*a*). Moreover, CD : AC :: BC : AB (*b*). Therefore, again,

---

Prob. V. (*g*) For the Side $x = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{2}b$; but (because AB = $\frac{1}{2}b$, and BC = $\frac{1}{2}a$, therefore AC = AB + BC = $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$; and the mean Proportional between $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ and b (198) is $\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$), $\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$ = AE; and (because BD = BC − CD = $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$; and AD = AC − CD = $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}a$; and because DE = AE − AD; thence DE = $\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}a$; and the mean Proportional between b, and $\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}a$ (198), is $\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}$), $\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}$ = EF; and (because BF = AE ± EF − AB) $\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{2}b$ = BF: therefore, x = BF.

Prob. VI. (*a*) Eucl. I. 47. (*b*) Eucl. VI. 8.

again, $AB = \frac{ax - xx}{b}$. Wherefore, $ax - xx = b\sqrt{aa - 2ax + 2xx}$; and the Parts being ſquared and ordered, $x^4 - 2ax^3 \overset{+}{-} \overset{aa}{2bb}\, xx + 2abbx - aabb = 0$. Add to both Parts $aabb + b^4$ (*c*), and there will be made $x^4 - 2ax^3 \overset{+}{-} \overset{aa}{2bb}\, xx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4$. And the Root being extracted on both Sides, $xx - ax - bb = -b\sqrt{aa + bb}$, and the Root being again extracted, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb - b\sqrt{aa + bb}}$.

The Geometrical Conſtruction [See Fig. 69.].

Take $AB = BC = \frac{1}{2}a$. At C erect the Perpendicular $CD = b$. Produce DC to E, ſo that DE ſhall be $= DA$. And between CD and CE take a mean Proportional CF. And let a Circle GH deſcribed from the Center F and the Radius BC, cut the right Line BC in G and H, and BG and BH will be the two Sides of the Triangle (*d*).

The

Problem VI. (*c*) Article CXLII.

(*d*) For GH is biſected in C (Eucl. III. 3.), and $GC = CH = \sqrt{BC^2 - CF^2}$; now the Side $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bb - b\sqrt{aa + bb}}$; but $\frac{1}{2}a = BC$, and (becauſe $DE = \sqrt{a^2 + b^2}$, whence CF (198) $= \sqrt{-b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$) $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}} =$ CH (198); whence $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}} = BH = BC + CH$; and $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}} = BG = BC - CH$.

The ſame otherwiſe.

Let $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$, and $DC = b$, and $\frac{a+y}{2}$ will be $= AC$ (a), $\frac{a-y}{2} = BC$ (b), $\frac{aa+yy}{2}$ $(c) = ACq + BCq = ABq$ (d) $= xx$. $\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB$ $(e) = x$. Therefore, $2xx - aa = yy = aa - 4bx$, and $xx = aa - 2bx$ (f), and the Root being extracted, $x = -b + \sqrt{bb + aa}$. Whence, in the Conſtruction above, CE is the Hypothenuſe of the Triangle ſought. But the Baſe and Perpendicular, as well in this as the Problem above being given, the Triangle is thus expeditiouſly conſtructed [See Fig. 70.]. Make a Parallelogram CG, whoſe Side CE ſhall be the Baſis of the Triangle, and the other Side CF the Perpendicular. And upon CE deſcribe

---

Problem VI. (a) Number 22.

(b) Number 36.

(c) For $\frac{\sqrt{a^2+2ay+y^2}}{4} - \frac{\sqrt{a^2-2ay+y^2}}{4} = \frac{2a^2+2y^2}{4} = \frac{a^2+y^2}{2}$.

(d) Euclid I. 47.

(e) For AB : AC :: BC : CD. Euel. VI. 8.

(f) $aa + yy = 2xx$; whence $2xx - aa = yy$; and $aa - yy = 4bx$; whence $aa - 4bx = yy$: Therefore $2xx - aa = aa - 4bx$; and $2xx = 2aa - 4bx$, and $xx = aa - 2bx$.

deſcribe a Semicircle, cutting the oppoſite Side FG in H. Draw CH, EH, and CHE will be the Triangle ſought (*g*).

PROBLEM VII.

In a right angled Triangle, having given the Sum of the Legs, and the Sum of the Perpendicular and Baſe, to find the Triangle.

Let the Sum of the Legs AC and BC be a, the Sum of the Baſe AB and of the Perpendicular CD be b, the Leg AC $= x$, the Baſe AB $= y$, and BC will be $= a - x$, CD $= b - y$, $aa - 2ax + 2xx =$ ACq + BCq $=$ ABq $= yy$, $ax - xx =$ AC $\times$ BC $=$ AB $\times$ CD (*a*) $= by - yy = by - aa + 2ax - 2xx$, and $by = aa - ax + xx$. Make its Square $a^4 - 2a^3x + 3aaxx - 2ax^3 + x^4$ equal to $yy \times bb$, that is, equal to $aabb - 2abbx + 2bbxx$ (*a*). And ordering the Equation, there will come out $x^4 - 2ax^3 + 3aaxx - 2a^3x + a^4 - 2bbxx + 2abbx + aabb = 0$. Add to each Side of the Equation $b^4 - aabb$ (*b*), and there will come out $x^4 - 2ax^3 + 3aaxx - 2a^3x + a^4 - 2bbxx + 2abbx - 2aabb + b^4 = b^4 - aabb$. And the Root being extracted on both Sides $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$, and the Root being again extracted, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \frac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}$ (*c*).

The

Problem VI. (*g*) Euclid III. 31.

Prob. VII. (*a*) Euclid VI. 8, and 16.

(*b*) Article CXIII.

(*c*) For $4a - bb$ tranſpoſed, is $bb - 4a$; to which adding

The Geometrical Conſtruction.

Take R a mean Proportional between $b + a$ and $b - a$, and S a mean Proportional between R and $b -$ R, and T a mean Proportional between $\frac{1}{2}a + S$ and $\frac{1}{2}a - S$; and $\frac{1}{2}a + T$, and $\frac{1}{2}a - T$, will be the Sides of the Triangle (*e*).

Problem VIII.

Having given the Area, Perimeter, and one of the Angles A *of any Triangle* A B C, *to determine the reſt* [See Figure 19.].

Let the Perimeter be $= a$, and the Area $= bb$, and from either of the unknown Angles, as C, let fall the Perpendicular C D to the oppoſite Side A B; and, by reaſon of the given Angle A, A C will be to C D in a given Ratio, ſuppoſe as *d* to *e*. Call, therefore, A C $= x$,

---

adding $\frac{1}{4}aa$, it is $bb - aa + \frac{1}{4}aa = bb - \frac{3}{4}aa$; whence the Root is $\sqrt{bb - \frac{3}{4}aa} - b\sqrt{bb - aa}$.

Problem VII. (*e*) For the Side $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}$; and $\sqrt{b^2 - a^2}$ is the mean Proportional between $b + a$, and $b - a$ (198) $=$ R; and $\sqrt{b\sqrt{b^2 - a^2} - b^2 + a^2}$ is the mean Proportional between $\sqrt{b^2 - a^2}$, and $b - \sqrt{b^2 - a^2} =$ S; and $\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}$ is the mean Proportional between $\frac{1}{2}a + \sqrt{b\sqrt{b^2 - a^2} - b^2 + a^2}$ and $\frac{1}{2}a - \sqrt{b\sqrt{b^2 - a^2} - b^2 + a^2} =$ T; wherefore $x = \frac{1}{2}a \pm$ T.

$= x$, and CD will be $= \frac{ex}{d}$, by which divide the Double of the Area, and there will come out $\frac{2bbd}{ex} =$ AB. Add AD (viz. $\sqrt{AC\,q - CD\,q}$, or $\frac{x}{d} \times \sqrt{dd - ee}$) (*a*) and there will come out $BD = \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d} \times \sqrt{dd - ee}$; to the Square whereof add $CD\,q$, and there will arife $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e}\sqrt{dd - ee} = BC\,q$. Moreover, from the Perimeter take away AC and AB, and there will remain $a - x - \frac{2bbd}{ex} = BC$, the Square whereof $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$, make equal to the Square before found; and neglecting the Equivalents, you will have $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd - ee} = aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. And this, by aſſuming $4af$ for the given Terms $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e}\sqrt{dd - ee}$, and by reducing,

---

Prob. VIII. (*a*) $\sqrt{AC\,q - CD\,q} = \sqrt{x^2 - \frac{e^2x^2}{d^2}} = \sqrt{\frac{d^2x^2}{d^2} - \frac{e^2x^2}{d^2}} = \frac{x}{d}\sqrt{d^2 - e^2}$.

ducing, becomes $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, or $x = f \pm \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$ (*b*).

The ſame Equation would have come out alſo by ſeeking the Leg AB; for the Sides AB and AC are indifferently alike to all the Conditions of the Problem. Wherefore, if AC be made $= f - \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, AB will be $= f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, and reciprocally; and the Sum of theſe $2f$ ſubtracted from the Perimeter, leaves the third Side BC $= a - 2f$.

PROBLEM IX.

Having given the Altitude, Baſe, and Sum of the Sides, to find the Triangle.

Let the Altitude CD be $= a$, half the Baſis AB $= b$, half the Sum of the Sides $= c$, and their Semi-difference

---

Prob. VIII. (*b*) For $a^2 + \frac{4b^2d}{e} - \frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2} = 2ax + \frac{4ab^2d}{ex} = 4af$; which, multiplied by ex, and dividing by $2ae$, and tranſpoſing $\frac{2b^2d}{e}$; becomes $x^2 = 2fx - \frac{2b^2d}{e}$; and tranſpoſing $2fx$, is $x^2 - 2fx = -\frac{2b^2d}{e}$; whence $x = f \pm \sqrt{ff - \frac{2b^2d}{e}}$.

difference $= z$; and the greater Side as BC will be $= c + z$ (*a*), and the leſſer AC $= c - z$ (*b*). Subtract CDq from CBq, and alſo from ACq, and hence will BD be $= \sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$, and thence AD $= \sqrt{cc - 2cz + zz - aa}$. Subtract alſo AB from BD, and AD will again be $= \sqrt{cc + 2cz + zz - aa} - 2b$. Having now ſquared the Values of AD, and ordered the Terms, there will ariſe $bb + cz = b\sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$. Again, by ſquaring and reducing into Order, you will obtain $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. And $z = b \times \sqrt{1 - \frac{aa}{cc - bb}}$ (*c*). Whence the Sides are given.

Problem X.

Having given the Baſe AB, *and the Sum of the Sides* AC + BC, *and alſo the vertical Angle* C, *to determine the Sides.* [See Fig. 20.]

Make the Baſe $= a$, Half the Sum of the Sides $= b$, and Half the Difference $= x$, and the greater Side BC will be $= b + x$, and the leſſer AC $= b - x$. From either of the unknown Angles A, let fall the Perpendicular AD to the oppoſite Side BC; and, by reaſon of

---

Problem IX. (*a*) Number 22.

(*b*) Number 36.

(*c*) For $z^2 = \frac{b^2c^2 - b^2a^2 - b^4}{c^2 - b^2}$; whence $z = \sqrt{\frac{b^2c^2 - b^2a^2 - b^4}{c^2 - b^2}} = b\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2 - b^2}}$.

of the given Angle C, there will be given the Ratio of AC to CD, ſuppoſe as d to e, and then CD will be $= \frac{eb - ex}{d}$. Alſo, by 13. 2 Elem. $\frac{AC^q - AB^q + BC^q}{2BC}$, that is $\frac{2bb + 2xx - aa}{2b + 2x} = CD$; and ſo you have an Equation between the Values of CD. And this reduced, x becomes $= \sqrt{\frac{daa + 2ebb - 2dbb}{2d + 2e}}$; whence the Sides are given.

If the Angles at the Baſe were ſought, the Concluſion would be more neat; as draw EC biſecting the given Angle, and meeting the Baſe in E; and it will be AB : AC + BC (:: AE : AC) :: Sine Angle ACE : Sine Angle AEC. And if from the Angle AEC, and alſo from its Complement BEC, you ſubtract $\frac{1}{2}$ the Angle C, there will be left the Angles ABC and BAC.

Problem XI.

Having the Sides of a Triangle given, to find the Angles.

[See Figure 72.]

Let the given Sides be AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, to find the Angle A. Having let fall to AB the Perpendicular CD, which is oppoſite to that Angle, you will have in the firſt Place, $bb - cc = AC^q - BC^q = AD^q - BD^q$ (*a*) $= \overline{AD + BD} \times \overline{AD - BD}$ (*b*) $= AB$

Problem XI. (*a*) For $AC^2 = CD^2 - DA^2$, and $BC^2 = BC^2 - DC^2$; whence $AC^2 - BC^2 = CD^2 + DA^2 - BD^2 - CD^2 = DA^2 - BD^2$.

(*b*) Euclid, II. 5.

$= AB \times \overline{2AD - AB}$ (*c*) $= 2AD \times a - aa$. And consequently $\frac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} = AD$ (*d*). Whence comes out this *first Theorem.*

I. As AB to AC + BC, so AB — BC to a fourth Proportional N. $\frac{AB + N}{2} = AD$. As AC to AD, so Radius to the Co-sine of the Angle A.

Moreover, $DC\,q = AC\,q - AD\,q = \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa} =$

$\frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}{4aa}$.

Whence, having multiplied the Roots of the Numerator and Denominator by *b*, there is made this *second Theorem.*

II. As $2ab$ to a mean Proportional between $\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c}$ and $\overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}$, so is Radius to the Sine of the Angle A (*e*).

Moreover,

Prob. XI. (*c*) For AD + DB = AB; whence subducting 2AD, then DB — AD = AB — 2AD; or if 2AD is greater than AB, then BD — AD = 2AD — AB; whence $\overline{AD + BD} \times \overline{AD - BD} = AB \times \overline{2AD - AB}$.

(*d*) For $2AD\,a = aa + bb - cc$, therefore $AD = \frac{aa + bb - cc}{2a} = \frac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a}$.

(*e*) For putting AC the Radius, DC is the Sine of A, and $DC = \frac{\text{Mean Proportional}}{2a}$ (198) $= \frac{\text{Mean Proportional} \times b}{2a \times b}$.

Moreover, on AB take AE = AC, and draw CE, and the Angle ECD will be equal to Half the Angle A (*f*). Take AD from AE, and there will remain $DE = b - \frac{1}{2}a - \frac{bb+cc}{2a} = \frac{cc-aa+2ab-bb}{2a}$ $= \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}}{2a}$. Whence $DE^2 = \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b} \times \overline{c-a+b}}{4aa}$.

And hence is made the *third* and *fourth Theorem*, viz.

III. As $2ab$ to $\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$ (so AC to DE) so Radius to the verſed Sine of the Angle A (*g*).

IV. And, as a mean Proportional between $a+b+c$ and $a+b-c$, to a mean Proportional between $c+a-b$ and $c-a+b$, (ſo CD to DE) ſo Radius to the Tangent of Half the Angle A, or the Co-tangent of Half the Angle to Radius (*b*).

Beſides,

Prob. XI. (*f*) For the Angles at D being right, then (Eucl. I. 32.) DAC + DCA = DEC + DCE = ECA (Eucl. I. 5.) = DCA + DCE; whence DAC + DCA = DCA + 2DCE, and DAC = 2DCE.

(*g*) For putting AC the Radius, DE is the verſed Sine of A, and $DE = \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}}{2a} = \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b} \times b}{2a \times b}$.

(*b*) For $DC^2 = \frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}{4a^2}$,

and

Besides, CE^q is $= CD^q + DE^q = \frac{2abb + bcc - baa - b^3}{a}$

$= \frac{b}{a} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$. Whence the *fifth* and *sixth Theorem.*

V. As a mean Proportional between $2a$ and $2b$, to a mean Proportional between $c+a-b$ and $c-a+b$, or as 1 to a mean Proportional between $\frac{c+a-b}{2a}$ and $\frac{c-a+b}{2b}$, (*i*) (so AC to $\frac{1}{2}$ CE,

or

---

and $DE^2 = \frac{\overline{a-b+c} \times \overline{a-b+c} \times -\overline{a+b+c} \times -\overline{a+b+c}}{4a^2}$;

and therefore $CD^2 : DE^2 ::$

$\frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times -\overline{a+b+c}}{4aa} :$

$\frac{\overline{a-b+c} \times \overline{a-b+c} \times -\overline{a+b+c} \times -\overline{a+b+c}}{4aa}$;

i. e. $\left(\text{by dividing by } \frac{\overline{a-b+c} \times -\overline{a+b+c}}{4aa}\right) ::$

$\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} : \overline{a-b+c} \times -\overline{a+b+c}$;

therefore $CD : DE :: \sqrt{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c}} :$

$\sqrt{\overline{a-b+c} \times -\overline{a+b+c}}$.

Prob. XI. (*i*) For $AC^2 : CE^2 :: bb : \frac{b}{a}\overline{c+a-b}$

$\times -\overline{a+b+c}$, i. e. by dividing by $\frac{b}{a}$; $:: ab :$

$\overline{a-b+c} \times -\overline{a+b+c}$; whence $AC : CE ::$

$\sqrt{ab} : \sqrt{\overline{a-b+c} \times -\overline{a+b+c}} :: 2\sqrt{ab} :$

$2\sqrt{}$

or CE to DE) ſo Radius to the Sine of $\frac{1}{2}$ the Angle A (k).

VI. And as a mean Proportional between $2a$ and $2b$, to a mean Proportional between $a+b+c$ and $a+b-c$ (ſo CE to CD), ſo Radius to the Co-ſine of Half the Angle A (l).

But if, beſides the Angles, the Area of the Triangle be alſo ſought, multiply CDq by $\frac{1}{4}$ ABq, and the Root, viz. $\frac{1}{4}\sqrt{a+b+c \times a+b-c \times a-b+c \times -a+b+c}$ will be the Area ſought.

$2\sqrt{a-b+c \times -a+b+c}$; whence $AC : 2\sqrt{ab}$ $(=\sqrt{4ab}) :: CE : 2\sqrt{a-b+c \times -a+b+c}$ (Eucl. V. 16.) $:: \frac{CE}{2} : \sqrt{a-b+c \times -a+b+c}$.

Prob. XI. (k) For the Angles at D being right, and CEA and CED being equal (Eucl. I. 5.), $AC : \frac{1}{2}CE :: CE : ED$.

(l) For $CE^2 : CD^2 :: \frac{b}{a} \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b} : \frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{b-a+c}}{4aa}$; i. e. dividing by $\frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}}{a}$, $:: b : \frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c}}{4a} :: 4ab : \overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c}$; whence $CE : CD :: \sqrt{4ab} : \sqrt{a+b+c \times a+b-c}$.

PROBLEM

Problem XII.

Having the Sides and Base of any right lined Triangle given, to find the Segments of the Base, the Perpendicular, the Area, and the Angles [See Fig. 40.].

Let there be given the Sides AC, BC, and the Base AB of the Triangle ABC. Bisect AB in I, and take on it (being produced on both Sides) AF and AE equal to AC, and BG and BH equal to BC. Join CE, CF; and from C to the Base, let fall the Perpendicular CD. And $AC^q - BC^q$ will be $= AD^q + CD^q - CD^q - BD^q = AD^q - BD^q = \overline{AD + BD} \times \overline{AD - BD} = AB \times 2DI$ (*a*). Therefore $\frac{AC^q - BC^q}{2AB} = DI$. And $2AB : AC + BC :: AC - BC : DI$. Which is a Theorem for determining the Segments of the Base (*b*).

From IE, that is, from $AC - \frac{1}{2}AB$, take away DI, and there will remain $DE = \frac{BC^q - AC^q + 2AC \times AB - AB^q}{2AB}$ (*c*); that is, $= BC$

Prob. XII. (*a*) 199. For $AD = AI + ID = BI + ID = BD + ID + ID$; whence $AD - DB = 2ID$: Therefore, because $AB = AD + BD$, $AC^q - BC^q = AD^q - BD^q = AB \times 2ID$: i. e. The Difference of the Squares of the Segments of the Base; i. e. the Rectangle under the Sum and Difference of the Segments of the Base is equal to the Rectangle under the whole Base, and double the Distance of the Perpendicular from the Middle of the Base. (*b*) See Theorem I. of Prob. XI.

(*c*) For $DE = AC - \frac{1}{2}AB - (DI =) \frac{AC^2 - BC^2}{2AB}$; whence $DE = \frac{\overline{AC - \frac{1}{2}AB} \times 2AB - AC^2 + BC^2}{2AB} = \frac{BC^2 - AC^2 + 2AC \times AB - AB^2}{2AB}$

$= \frac{\overline{BC + AC - AB} \times \overline{BC - AC + AB}}{2AB}$, or $= \frac{HE \times EG}{2AB}$ (*d*). Take away DE from FE, or 2AC, and there will remain FD $= \frac{AC^q + 2AC \times AB + AB^q - BC^q}{2AB}$; that is, $= \frac{\overline{AC + AB + BC} \times \overline{AC + AB - BC}}{2AB}$, or $= \frac{FG \times FH}{2AB}$. And since CD is a mean Proportional between DE and DF, and CE a mean Proportional between DE and EF, and CF a mean Proportional between DF and EF (*e*), CD will be $= \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}$, CE $= \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}}$, and CF $= \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$. Multiply CD into $\frac{1}{2}$ AB, and you will have the Area $= \frac{1}{4}\sqrt{}$

(*d*) For BC + CA = BH + AE = BE + EH + AH + HE, but BE + EH + HA = BA; whence BC + CA = BA + HE; and BC + CA − AB = HE; and BC − CA = BG − AE; and AE + EB = AB: Whence BC − CA + AB = BG − AE + AE + EB = EG.

(*e*) For EA, AC, AF, being equal, a Semi-circle from the Center A, with the Radius AF, will pass through C, and E; whence FCE is a right Angle, Euclid III. 31; whence the Proportions follow, by Euclid VI. 8.

$= \frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. But for determining the Angle A, there come out ſeveral Theorems:

1. As $2AB \times AC : HE \times EG$ (:: AC : DE) :: Radius : verſed Sine of the Angle A.
2. $2AB \times AC : FG \times FH$ (:: AC : FD) :: Radius : verſed Co-ſine of A.
3. $2AB \times AC : \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$ (:: AC : CD) :: Radius : Sine of A.
4. $\sqrt{FG \times FH} : \sqrt{HE \times EG}$ (:: CF : CE) :: Radius : Tangent of $\frac{1}{2}$ A.
5. $\sqrt{HE \times EG} : \sqrt{FG \times FH}$ (:: CE : FC) :: Radius : Co-tangent of $\frac{1}{2}$ A.
6. $2\sqrt{AB \times AC} : \sqrt{HE \times EG}$ (:: FE : CE) :: Radius : Sine of $\frac{1}{2}$ A.
7. $2\sqrt{AB \times AC} : \sqrt{FG \times FH}$ (:: FE : FC) :: Radius : Co-ſine of $\frac{1}{2}$ A (*f*).

PROBLEM XIII.

To ſubtend the given Angle CBD *with the given right Line* CD; *ſo that if* AD *be drawn from the End of that right Line* D *to the Point* A, *given on the right Line* CB *produced, the Angle* ADC *ſhall be equal to the Angle* ABD [See Fig. 71.].

Make $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, and it will be $BD : BA :: CD : DA = \frac{ab}{x}$ (*a*). Let fall the Perpendicular

(*f*) This Problem is the ſame with XI. and the I. III. IV. and V. VI. VII. Theorems of this, fall in with the III. II. IV. V. VI. of the XI, reſpectively.

Prob. XIII. (*a*) For the Triangles ABD, ACD, have

dicular DE, and BE will be $= \frac{BDq - ADq + BAq}{2BA}$ (*b*) $= \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$. By reaſon of the given Triangle DBA, make BD : BE :: b : e, and you will have again BE $= \frac{ex}{b}$, therefore $xx - \frac{aabb}{xx} + bb = 2ex$. And $x^4 - 2ex^3 + bbxx - aabb = 0$.

Problem XIV.

To find the Triangle ABC, *whoſe three Sides* AB, AC, BC, *and its Perpendicular* DC *are in arithmetical Progreſſion* [See Fig. 46.].

Make AC $= a$, BC $= x$, and DC will be $= 2x - a$, and AB $= 2a - x$ (*a*). Alſo AD will be $(= \sqrt{ACq - DCq}) = \sqrt{4ax - 4xx}$, and BD $(= \sqrt{BCq}$

---

have the Angle at A common, and the Angles ABD, ADC, equal; and are ſimilar.

(*b*) For AE $=$ EB $-$ BA, and AE^2 $=$ EB^2 $-$ 2AB $\times$ BE $+$ BA^2 (Eucl. II. 7.) $=$ AD^2 $-$ DE^2, the Triangle DAE being rectangular; but DE^2 $=$ DB^2 $-$ BE^2, the Triangle DBE being alſo rectangular; whence EB^2 $-$ 2AB $\times$ BE $+$ BA^2 $=$ AD^2 $-$ DB^2 $+$ EB^2; whence abbreviating, tranſpoſing, and dividing by 2AB, BE $= \frac{BD^2 - AD^2 + AB^2}{2AB}$.

Prob. XIV. (*a*) For AB, AC, BC, DC, being in arithmetical Progreſſion, if AC $= a$, and BC $= x$, then AB $= 2a - x$, and DC $= 2x - a$; becauſe $2a - x$, a, x, and $2x - a$, are in a Progreſſion, whoſe common Difference is $a - x$.

$\sqrt{BC^q - DC^q} = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. And so again $AB = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Wherefore $2a - x = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$, or $2a - x - \sqrt{4ax - xx} = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. And the Parts being squared, $4aa - 3xx - 4a + 2x \times \sqrt{4ax - 4xx} = 4ax - 3xx - aa$, or $5aa - 4ax = 4a - 2x \times \sqrt{4ax - 4xx}$. And the Parts being again squared, and the Terms rightly disposed, $16x^4 - 80ax^3 + 144aaxx - 104a^3x + 25a^4 = 0$. Divide this Equation by $2x - a$, and there will arise $8x^3 - 36axx + 54aax - 25a^3 = 0$; an Equation, by the Solution whereof x is given from a, being any how assumed. a and x being had, make a Triangle, whose Sides shall be $2a - x$, a and x, and a Perpendicular let fall upon the Side $2a - x$ will be $2x - a$.

If I had made the Difference of the Sides of the Triangle to be d, and the Perpendicular to be x, the Work would have been something neater; this Equation at last coming out, viz. $x^3 = 24ddx + 48d^3$ (*b*).

Prob. XIV. (*b*) For DC, BC, AC, AB, being the Terms, and $DC = x$, and the Difference $= d$, the Terms will be respectively x, $x + d$, $x + 2d$, $x + 3d$; and $AD = \sqrt{4dx + 4dd}$, and $BD \sqrt{2dx + dd}$; whence $AB = x + 3d = \sqrt{4dx + 4dd} + \sqrt{2dx + dd}$; and $x + 3d - \sqrt{4dx + 4dd} = \sqrt{2dx + dd}$; and squaring the Parts, and reducing, and transposing, $x^2 + 8dx + 12dd = 2x + 6d \sqrt{4dx + 4dd}$; and squaring again, $x^4 + 16dx^3 + 88ddx^2 + 192d^3x + 144d^4 = 240d^3x + 112d^2x^2 + 16dx^3 + 144d^4$; that is, by transposing, and dividing by x, $x^3 = 24d^2x + 48d^3$.

PROBLEM XV.

To find a Triangle ABC, *whose three Sides* AB, AC, BC, *and the Perpendicular* CD *shall be in a Geometrical Progression.*

Make AC $= x$, BC $= a$; and AB will be $= \frac{xx}{a}$. And CD $= \frac{aa}{x}$ (*a*). And AD $(= \sqrt{AC^q - CD^q}) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$; and BD $(= \sqrt{BC^q - DC^q}) = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$ and consequently $\frac{xx}{a}$ $(= AB) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}} + \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$, or $\frac{xx}{a} = \sqrt{bd - \frac{a^4}{xx}} = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$; and the Parts of the Equation being squared, $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a} \times \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} + aa - \frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx}$, that is, $x^4 - aaxx + a^4 = 2aax \sqrt{xx - aa}$

Prob. XV. (*a*) For AB, AC, BC, DC, being in geometrical Progression, if AC $= x$, and BC $= a$, then AB $= \frac{xx}{a}$, and CD $= \frac{aa}{x}$; for $\frac{xx}{a}$, x, a, $\frac{aa}{x}$, are in a Progression, whose common Divisor is $\frac{x}{a}$.

$\sqrt{xx - aa}$ (*b*). And the Parts being again ſquared, $x^3 - 2aax^6 + 3a^4x^4 - 2a^6xx + a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6xx$. That is, $x^8 - 2aax^6 - a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0$. Divide this Equation by $x^6 - aaxx - a^4$, and there will ariſe $x^4 - aaxx - a^4$. Wherefore x^4 is $= aaxx + a^4$. And extracting the Root $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, or $x = a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$ (*c*). Take therefore *a* or BC, of any Length, and make BC : AC :: AC : AB :: 1 : $\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$, and the Perpendicular DC of a Triangle ABC made of theſe Sides, will be to the Side BC in the ſame Ratio.

Prob. XV. (*b*) For $\frac{x^4}{a^2} - \frac{2x^2}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}} + a^2 - \frac{a^4}{x^2} = x^2 - \frac{a^4}{x^2}$, which, by abbreviating, and multiplying by a^2, becomes $x^4 - 2ax^2\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}} + a^4 = a^2x^2$; and by tranſpoſing, $x^4 - a^2x^2 + a^4 = 2ax^2\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}}$; or putting x^2 under the Sign, we have $2a\sqrt{a^2x^4 - a^4x^2}$; and the radical Part divided by a^2x^2, gives $x^2 - a^2$; which being kept under the Sign, and the Root of the Diviſor, viz. ax, being drawn into $2a$, we have $2a^2x\sqrt{x^2 - a^2}$.

(*c*) For $x^2 = \frac{aa}{2} + \sqrt{5\frac{a^4}{4}}$; that is, by dividing $\sqrt{5\frac{a^4}{4}}$ by $\sqrt{a^4}$; $x^2 = \frac{aa}{2} + aa\sqrt{\frac{5}{4}}$: Whence $x = \sqrt{\frac{aa}{2} + aa\sqrt{\frac{5}{4}}}$; that is, by dividing by $\sqrt{a^2}$, $x = a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$.

The ſame otherwiſe [See Fig. 47].

Since AB : AC :: BC : DC. I ſay the Angle ACB is a right one. For if you deny it, draw CE, making the Angle ECB a right one. Therefore the Triangles BCE, DBC, are ſimilar, by 8. 6. Elem. and conſequently EB : EC :: BC : DC; that is, EB : EC :: AB : AC. Draw AF perpendicular to CE, and by reaſon of the parallel Lines AF, BC, EB will be : EC :: AE : FE :: AB : FC (*d*). Therefore by 9. 5 Elem. AC is = FC; that is, the Hypothenuſe of a right-angled Triangle is equal to the Side, contrary to the 19. 1 Elem. Therefore the Angle ECB is not a right one; wherefore it is neceſſary ACB ſhould be a right one. Therefore $AC^q + BC^q$ is $= AB^q$. But $AC^q = AB \times BC$, therefore $AB \times BC + BC^q = AB^q$, and extracting the Root $AB = \frac{1}{2}BC + \sqrt{\frac{5}{4}BC^q}$. Wherefore take $BC : AB :: 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, and AC a mean Proportional between BC and AB, and a Triangle being made of theſe Sides, AB, AC, BC, DC, will be continually Proportionals.

Problem XVI.

To make the Triangle ABC *upon the given Baſe* AB, *whoſe Vertex* C *ſhall be in the right Line* EC *given in Poſition, and the Baſe an arithmetical Mean between the Sides* [See Fig. 48.]

Let the Baſe AB be biſected in F, and produced until it meet the right Line given in Poſition EC in E, and let fall to it the Perpendicular CD; and making AB = *a*,

---

Prob. XV. (*d*) For EB : EC :: BE + EA : CE + EF (Eucl. V. 12.), i. e. BA : CF :: BA : AC.

$AB = a$, $FE = b$, and $BC - AB = x$, BC will be $= a + x$, $AC = a - x$; and by the 13. 2 Elem. $BD \left(= \frac{BC^q - AC^q + AB^q}{2AB} \right) = 2x + \frac{1}{2}a$. And consequently, $FD = 2x$ (*a*); $DE = b + 2x$, and $CD \left(= \sqrt{CB^q - BD^q} \right) = \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. But by reason of the given Positions of the right Lines CE and AB, the Angle CED is given; and consequently the Ratio of DE to CD, which, if it be put as d to e, will give the Proportion $d : e :: b + 2x : \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Whence the Means and Extremes being multiplied by each other, there arises the Equation $eb + 2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$, the Parts whereof being squared and rightly ordered, you have $xx = \frac{\frac{3}{4}d^2a^2 - eebb - 4eebx}{4ee + 3dd}$, and the Root being extracted $x = \frac{-2eeb + d\sqrt{3eeaa - 3eebb + \frac{9}{4}ddaa}}{4ee + 3dd}$. But x being given, there is given $BC = a + x$, and $AC = a - x$.

Prob. XVI. (*a*) For $BD = \frac{\text{Sum} + \text{Difference}}{2} = \frac{\text{Sum}}{2} + \frac{2\text{ Difference}}{2}$; now $BD = BF + FD = \frac{1}{2}a + 2x$; and $BF = \frac{1}{2}a$; whence $FD = 2x$.

PROBLEM

PROBLEM XVII.

Having given the Sides of any Parallelogram AB, BD, DC, *and* AC, *and one of the Diagonals* BC, *to find the other Diagonal* AD [See Fig. 21.].

Let E be the Concourse of the Diagonals, and to the Diagonal BC let fall the Perpendicular AF, and by the 13th 2 Elem. $\frac{AC^q - AB^q + BC^q}{2BC} = CF$, and alſo $\frac{AC^q - AE^q + EC^q}{2EC} = CF$. Wherefore, ſince EC is $= \frac{1}{2}$ BC (*a*), and AE $= \frac{1}{2}$ AD, it will be $\frac{AC^q - AB^q + BC^q}{2BC} = \frac{AC^q - \frac{1}{4}AD^q + \frac{1}{4}BC^q}{BC}$, and having reduced, $AD = \sqrt{2AC^q + 2AB^q - BC^q}$ (*b*).

Whence, by the bye, *in any Parallelogram, the Sum of the Squares of the Sides is equal to the Sum of the Squares of the Diagonals* (*c*).

PROBLEM

Prob. XVII. (*a*) 200. *In every Parallelogram the Diagonals biſect each other*; for the Triangles CED, AEB, having the Angles CED, AEB, vertically oppoſite, equal (Eucl. I. 15), and the alternate Angles, CDA, DAB, equal (Eucl. I. 29.), will be equiangular; but alſo the Baſes CD, AB, are equal (Eucl. I. 34.), therefore the Triangles are equal, and the Side CE $=$ EB, and DE $=$ EA (Eucl. I. 26.)

(*b*) For multiplying to exterminate the Fractions, and dividing the Terms by BC, we have $AD^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - BC^2$; whence $AD = \sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2}$.

(*c*) 201. In every Parallelogram, *the Sum of the Squares of the Sides is equal to the Sum of the Squares of the Diagonals*, for

PROBLEM XVIII.

Having given the Angles of the Trapezium A B C D *alſo its Perimeter and Area, to determine the Sides* [See Fig. 22.]

Produce any two of the Sides A B and D C till they meet in E, and let A B be $= x$, and B C $= y$, and becauſe all the Angles are given, there are given the Ratio's of B C to C E and B E, which make d to e and f; and C E will be $= \frac{ey}{d}$ and B E $= \frac{fy}{d}$, and conſequently A E $= x + \frac{fy}{d}$. There are alſo given the Ratio's of A E to A D and to D E; which make as g and as b to d; and A D will be $= \frac{dx + fy}{g}$ and E D $= \frac{dx + fy}{b}$, and conſequently C D $= \frac{dx + fy}{b} - \frac{ey}{d}$, and the Sum of all the Sides $x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{b} - \frac{ey}{d}$; which, ſince it is given, call it a, and the Terms will be abbreviated by writing $\frac{p}{r}$ for the given

---

for if the Parallelogram is rectangular, it follows from the 47. of I. of Euclid; and if not, the Angles at the ſame Side are equal to two right ones (Eucl. 27. I.); whence if one is obtuſe the other is acute, and raiſing Perpendiculars from the Ends of the oppoſite Sides, the Square of the Diagonal oppoſite the obtuſe Angle will exceed the Sum of the Squares of the Sides of that Angle (Eucl. II. 12.), by the ſame double Rectangle, by which the Square of the Diagonal oppoſite the acute Angle is exceeded by the Sum of the Squares of the Sides containing the acute Angle (Eucl. II. 13.).

given Quantity $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{b}$, and $\frac{q}{r}$ for the given $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{b} - \frac{e}{d}$, and you will have the Equation $\frac{px + qy}{r} = a$.

Moreover, by reaſon of all the Angles being given, there is given the Ratio of BCq to the Triangle BCE, which make as m to n, and the Triangle BCE will be $= \frac{n}{m} yy$. There is alſo given the Ratio of AEq to the Triangle ADE; which make as m to d; and the Triangle ADE will be $= \frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm}$. Wherefore, ſince the Area AC, which is the Difference of theſe Triangles, is given, let it be bb, and $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy - dnyy}{dm}$ will be $= bb$. And ſo you have two Equations, from the Reduction whereof all is determined, viz. The former Equation gives $\frac{ra - qy}{p} = x$, and by writing $\frac{ra - qy}{p}$ for x in the laſt, there comes out $\frac{drraa - 2dqray + dqqyy}{ppm} + \frac{2afry - 2fqyy}{pm} + \frac{ffyy - dnyy}{dm} = bb$. And the Terms being abbreviated by writing s for the given Quantity $\frac{dqq}{pp} - \frac{2fq}{p} + \frac{ff}{d} - n$, and st for the given $+ \frac{adqr}{pp} - \frac{afr}{p}$, and stv for the given $bbm - \frac{drraa}{pp}$, there ariſes $yy = 2ty + tv$, or $y = t + \sqrt{tt + tv}$.

PROBLEM

PROBLEM XIX.

To ſurround the Fiſh-pond ABCD *with a Walk* ABCD EFGH *of a given Area, and of the ſame Breadth every where* [See Fig. 23.].

Let the Breadth of the Walk be x, and its Area aa. And, letting fall the Perpendiculars AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI, from the Points A, B, C, D, to the Lines EF, FG, GH, and HE, to divide the Walk into the four Trapezia IK, LM, NO, PQ, and into the four Parallelograms AL, BN, CP, DI, of the Latitude x, and of the ſame Length with the Sides of the given Trapezium. Let therefore the Sum of the Sides (AB + BC + CD + DA) be $= b$, and the Sum of the Parallelograms will be $= bx$.

Moreover, having drawn AE, BF, CG, DH; ſince AI is = AK, the Angle AEI will be = Angle AEK = $\frac{1}{2}$ IEK, or $\frac{1}{2}$ DAB. Therefore the Angle AEI is given, and conſequently the Ratio of AI to IE, which make as d to e, and IE will be $= \frac{ex}{d}$. Multiply this into $\frac{1}{2}$ AI, or $\frac{1}{2}x$, and the Area of the Triangle AEI will be $= \frac{exx}{2d}$. But by reaſon of equal Angles and Sides, the Triangles AEI and AEK are equal, and conſequently the Trapezium IK (= 2 Triangles AEI) $= \frac{exx}{d}$. In like manner, by putting BL : LF :: d : f, and CN : NG :: d : g, and DP : PH :: d : h (for thoſe Ratio's are alſo given from the given Angles B, C, and D), you will have the Trapezium LM $= \frac{fxx}{d}$, NO $= \frac{gxx}{d}$, and PQ $= \frac{hxx}{d}$.

Wherefore

Wherefore $\frac{exx}{d} + \frac{fxx}{d} + \frac{gxx}{d} + \frac{bxx}{d}$, or $\frac{pxx}{d}$, by writing p for $e+f+g+b$ will be equal to the four Trapeziums IK + LM + NO + PQ; and consequently $\frac{pxx}{d} + bx$ will be equal to the whole Walk aa. Which Equation, by dividing all the Terms by $\frac{p}{d}$, and extracting its Root, x will become $= \frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$. And the Breadth of the Walk being thus found, it is easy to describe it.

Problem XX.

From the given Point C, *to draw the right Line* CF, *which together with two other right Lines* AE *and* AF *given by Position, shall comprehend or constitute the Triangle* AEF *of a given Magnitude* [See Fig. 24.]

Draw CD parallel to AE, and CB and EG perpendicular to AF, and let AD $= a$, CB $= b$, and AF $= x$, and the Area of the Triangle AEF be cc, and by reason of the proportional Quantities DF : AF (:: DC : AE) :: CB : EG; that is, $a+x : x :: b : \frac{bx}{a+x}$; it will be $\frac{bx}{a+x} =$ EG. Multiply this into $\frac{1}{2}$ AF, and there will come out $\frac{bxx}{2a+2x}$, the Quantity of the Area AEF, which is $= cc$. And so the Equation being ordered xx will be $= \frac{2ccx + 2cca}{b}$ or $x = \frac{cc + \sqrt{c^4 + 2ccab}}{b}$.

After

After the ſame manner a right Line may be drawn through a given Point, which ſhall divide any Triangle or Trapezium in a given Ratio [*a*].

Problem XXI.

To determine the Point C *in the given right Line* DF, *from which the right Lines* AC *and* BC *drawn to two other Points* A *and* B *given by Poſition, ſhall have a given Difference.* [See Fig. 25.] [See Prob. xlv.]

From the given Points let fall the Perpendiculars AD and BF to the given right Line, and make AD $= a$, BF $= b$, DF $= c$, DC $= x$, and AC will be $= \sqrt{aa + xx}$, FC $= x - c$, and BC $= \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. Now let their given Difference be d, AC being greater than BC, then $\sqrt{aa + xx} - d$ will be $= \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. And ſquaring the Parts $aa + xx + dd - 2d\sqrt{aa + xx} = bb + xx - 2cx + cc$. And reducing, and (for Abbreviation ſake) writing $2ee$ inſtead of the given Quantities $aa + dd - bb - cc$, there will come out $ee + cx = d \times \sqrt{aa + xx}$. And again, having ſquared the Parts, $e^4 + 2ceex + ccxx = ddaa + ddxx$. And the Equation

---

Prob. XX. (*a*) For let the Area of the given Triangle AEF be to the Area of the ſought Triangle, as m to n; then the Area of the ſought Triangle muſt be equal to the Area of the given one multiplied into $\frac{n}{m}$ and will therefore be given; and the Problem will be the ſame as this twentieth.

Equation being reduced $xx = \frac{2eecx + e^4 - aadd}{dd - cc}$,

or $x = \frac{eec + \sqrt{e^4 dd - aad^4 + aaddcc}}{dd - cc}$.

The Problem will be reſolved after the ſame Way, if the Sum of the Lines A C and B C, or the Sum or the Difference of their Squares, or the Proportion or Rectangle, or the Angle comprehended by them be given: Or alſo, if inſtead of the right Line D C, you make uſe of the Circumference of a Circle, or any other curve Line, ſo the Calculation (in this laſt Caſe eſpecially) relates to the Line that joins the Points A and B.

Problem XXII.

Having the three right Lines A D, A E, B F, *given by Poſition, to draw a fourth* D F, *whoſe Parts* D E *and* E F, *intercepted by the former, ſhall be of given Lengths* [See Fig. 49.]

Let fall E G perpendicular to B F, and draw E C parallel to A D; and, the three right Lines given by Poſition meeting in A, B, and H, make $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$, and $HE = x$. Now, by reaſon of the ſimilar Triangles A B H, E C H; it is $AH : AB :: HE : EC = \frac{ax}{c}$, and $AH : HB :: HE : CH = \frac{bx}{c}$. Add H B, and there comes $CB = \frac{bx + bc}{c}$. Moreover, by reaſon of the ſimilar Triangles F E C, F D B, it is $ED : CB :: EF : CF = \frac{ebx + ebc}{dc}$. Laſtly, by the 12 and 13. 2 Elem. you have

EC

$\frac{EC^2 - EF^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC = (CG) = \frac{HE^2 - EC^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH$ (*a*); that is, $\frac{\frac{aaxx}{cc} - ee}{\frac{2ebx + 2ebc}{dc}} + \frac{ebx + ebc}{2dc} = \frac{xx - \frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c}$. Or $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{ccx - aax - bbx}{b}$. Here, for Abbreviation sake, for $\frac{cc - aa - bb}{b} - \frac{eb}{d}$ write m, and you will have $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebc}{d} = mx$; and all the Terms

---

Prob. XXII. (*a*) For $EF^2 = EC^2 + FC^2 - 2FC \times CG$ (Eucl. II. 13.); whence $CG \times 2FC = EC^2 - EF^2 + FC^2$, and $CG = \frac{EC^2 - EF^2 + FC^2}{2FC}$; but $FC^2 = 2FC \times \frac{1}{2}FC$ (Eucl. II. 2.): Whence $CG = \frac{EC^2 - EF^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC$. Alſo $EH^2 = CE^2 + CH^2 + CG \times 2CH$ (Eucl. II. 12.); whence $CG = \frac{EH^2 - CE^2 - CH^2}{2CH}$: But $CH^2 = 2CH \times \frac{1}{2}CH$ (Eucl. II. 2.); whence $CG = \frac{EH^2 - CE^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH = \frac{EC^2 - EF^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC$.

Terms being multiplied by $x + v$, there will come out $\frac{aadxx - eedc}{eb} - \frac{ebcx}{d} + \frac{ebcc}{d} = mxx + mcx$.

Again, for $\frac{aad}{eb} - m$ write p, and for $mc + \frac{ebc}{d}$ write $2pq$, and for $-\frac{ebcc}{d} + \frac{eedcc}{eb}$ write prr, and xx will become $= 2qx + rr$, and $x = q \pm \sqrt{qq + rr}$. Having found x or HE, draw EC parallel to AB, and take FC : BC :: e : d, and having drawn FED, it will satisfy the Conditions of the Question.

PROBLEM XXIII.

To determine the Point Z, *from which if four right Lines* ZA, ZB, ZC, *and* ZD, *are drawn at given Angles to four right Lines given by Position, viz.* FA, EB, FC, GD, *the Rectangle of two of the given Lines* ZA *and* ZB, *and the Sum of the other two* ZC *and* ZD *may be given* [See Fig. 26.]

From among the Lines chuse one, as FA, given by Position, as also another, ZA, not given by Position, and which is drawn to it, from the Lengths whereof the Point Z may be determined, and produce the other Lines given by Position until they meet these, or be produced farther out if there be Occasion, as you see here. And having made EA $= x$, and AZ $= y$, by reason of the given Angles of the Triangle AEH, there will be given the Ratio of AE to AH, which make as p to q, and AH will be $= \frac{qx}{p}$. Add AZ, and ZH will be $= y + \frac{qx}{p}$. And thence, since by reason of the given Angles of the Triangle HZB, there is given the Ratio of HZ

of HZ to BZ, if that be made as n to p you will have $ZB = \frac{py + qx}{n}$.

Moreover, if the given EF be called a, AF will be $= a - x$, and thence, if by reaſon of the given Angles of the Triangle AFI, AF be made to AI in the ſame Ratio as p to r, AI will become $= \frac{ra - rx}{p}$. Take this from AZ and there will remain $IZ = y - \frac{ra - rx}{p}$. And by reaſon of the given Angles of the Triangle ICZ, if you make IZ to ZC in the ſame Ratio as m to p, ZC will become $= \frac{py - ra + rx}{m}$.

After the ſame Way, if you make $EG = b$. AG : AK :: l : s, and ZK : ZD :: p : l, there will be obtained $ZD = \frac{sb - sx - ly}{p}$.

Now, from the State of the Queſtion, if the Sum of the two Lines ZC and ZD, viz. $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p}$, be made equal to any given Quantity f; and the Rectangle of the other two $\frac{pyy + qxy}{n}$ be made $= gg$, you will have two Equations for determining x and y. By the latter there comes out $x = \frac{ngg - pyy}{qy}$, and by writing this Value of x in the room of that in the former Equation, there will come out $\frac{py - ra}{m} + \frac{rngg - rpyy}{mqy} + \frac{sb - ly}{p} - \frac{sngg -}{}$

$\frac{sngg - spyy}{pqy} = f$; and by Reduction $yy = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + ggmns - ggnpr}{ppq - ppr - mlq + mps}$ (*a*); and for Abbreviation ſake, writing $2b$ for $\frac{apqr - bmqs + fmpq}{ppq - ppr - mlq + mps}$ and kk for $\frac{ggmns - ggpnr}{ppq - ppr - mlq + mps}$, you will have $yy = 2by + kk$, or $y = b \pm \sqrt{bb + kk}$. And ſince y is known by means of this Equation, the Equation $\frac{ngg - pyy}{qy} = x$ will give x. Which is ſufficient to determine the Point Z.

After the ſame Way a Point may be determined from which other right Lines may be drawn to more or fewer right Lines given by Poſition, ſo that the Sum, or Difference, or Rectangle of ſome of them may be given, or may be made equal to the Sum, or Difference, or Rectangle of the reſt, or that they may have any other aſſigned Conditions.

Prob. XXIII. (*a*) For tranſpoſing, and abbreviating, $\frac{py}{m} - \frac{rpy}{mq} - \frac{ly}{p} + \frac{sy}{q} = \frac{ar}{m} - \frac{bs}{p} + f + \frac{ggns}{pqy} - \frac{ggnr}{mqy}$, and multiplying by $mqyp$, we have $p^2qy^2 - p^2ry^2 - mqly^2 + pmsy^2 = apqry - bmsqy + pfmqy + mg^2ns - g^2npr$; which dividing by $p^2q - p^2r - mql + pms$, is $y^2 = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + g^2mns - g^2npr}{ppq - ppr - mlq + mps}$.

PROBLEM

PROBLEM XXIV.

To ſubtend the right Angle E A F *with the right Line* E F *given in Magnitude, which ſhall paſs through the given Point* C, *equidiſtant from the Lines that comprehend the right Angle* (*when they are produced*) [See Fig. 27.].

Complete the Square A B C D, and biſect the Line E F in G. Then call C B or C D, a; E G or F G, b; and C G, x; and C E will be $= x - b$, and C F $= x + b$. Then ſince $CF^q - BC^q = BF^q$, B F will be $= \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Laſtly, by reaſon of the ſimilar Triangles C D E, F B C, C E : C D :: C F : B F, or $x - b : a :: x + b : \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Whence $ax + ab = x - b \times \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Each Part of which Equation being ſquared, and the Terms that come out being reduced into Order, there comes out $x^4 = \overset{2aa}{+ 2bb}\, xx \overset{+ 2aabb}{-\ b^4}$. And extracting the Root as in Quadratic Equations, there comes out $xx = aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}$; and conſequently $x = \sqrt{aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}}$. And C G being thus found, gives C E or C F, which, by determining the Point E or F, ſatisfies the Problem.

The ſame otherwiſe.

Let C E be $= x$, C D $= a$, and E F $= b$; and C F will be $= x + b$, and B F $= \sqrt{xx + bb + 2bx - aa}$. And then ſince C E : C D :: C F : B F, or $x : a :: x + b : \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$, $ax + ab$ will be $= x \times \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. The Parts of this

Equation being ſquared, and the Terms reduced into Order, there will come out $x^4 + 2bx^3 + \frac{bb}{-2aa} xx - 2aabx - aabb = 0$, a biquadratic Equation, the Inveſtigation of the Root of which is more difficult than in the former Caſe. But it may be thus inveſtigated; put $x^4 + 2bx^3 + \frac{bb}{-2aa} xx - 2aabx + a^4 = aabb + a^4$, and extracting the Root on both Sides $xx + bx - aa = \pm a\sqrt{aa + bb}$.

Hence I have an Opportunity of giving *a Rule for the Election of Terms for the Calculus.*

CIX. Viz. *When there happens to be ſuch an Affinity or Similitude of the Relation of two Terms to the other Terms of the Queſtion, that you ſhould be obliged in making Uſe of either of them to bring out Equations exactly alike; or that both, if they are made Uſe of together, ſhall bring out the ſame Dimenſions and the ſame Form (only excepting perhaps the Signs + and —) in the final Equation (which will be eaſily ſeen) then it will be the beſt Way to make Uſe of neither of them, but in their room to chuſe ſome third, which ſhall bear a like Relation to both; as ſuppoſe the half Sum, or half Difference, or perhaps a mean Propopartional, or any other Quantity related to both indifferently, and without a like.*

Thus, in the precedent Problem, when I ſee the Line EF alike related to both AB and AD (which will be evident if you alſo draw EF in the Angle BAH) and therefore I can by no Reaſon by perſwaded why ED ſhould be rather made Uſe of than BF, or AE rather than AF, or CE rather than CF for the Quantity ſought: Wherefore, in the room of the Points E and F, from whence this Ambiguity comes (in the former Solution), I made Uſe of the intermediate Point G, which has a like Relation to both the Lines AB and AD. Then from this Point G, I did not let fall a Perpendicular to AF for finding the Quantity ſought, becauſe

cauſe I might, by the ſame Reaſon, have let one fall to AD. And therefore I let it fall upon neither CB nor CD, but propoſed CG for the Quantity ſought, which does not admit of a like; and ſo I obtained a biquadratic Equation without the odd Terms.

I might alſo (taking Notice that the Point G lies in the Periphery of a Circle deſcribed from the Center A, by the Radius EG) have let fall the Perpendicular GK upon the Diagonal AC, and have ſought AK or CK, (as which bear alſo a like Relation to both AB and AD) and ſo I ſhould have fallen upon a quadratic Equation, viz. $yy = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{4}bb$, making $AK = y$, $AC = e$, and $EG = b$ (*a*). And AK being ſo found, there muſt have

---

Prob. XXIV. (*a*) For drawing AG, and writing $CE = z$, $ED = x$; then $AE = a - x$, and $CG = b + z$. In the Triangle ADC, $AC^2 = 2CD^2$; whence $e^2 = 2aa$. In the Triangle CDE, $CE^2 = ED^2 + CD^2$; whence $z^2 = a^2 + x^2$. In the ſimilar Triangles FEA, CDE, $AE : ED :: FE (= 2EG) : EC$; whence $AE \times EC = 2EG \times ED$; and $az - xz = 2bx$; and $az = 2bx + xz$; whence $x = \frac{az}{2b + z}$; and $x^2 = \frac{a^2z^2}{4b^2 + 4bz + z^2}$. Laſtly in the obtuſe-angled Triangle CAG, $GC^2 = AG^2 (= EG^2) + AC^2 + 2AC \times AK$; whence $b^2 + 2bz + zz = b^2 + e^2 + 2ey$, or $2bz + z^2 = e^2 + 2ey$. Now, becauſe $a^2 + x^2 = z^2$; therefore $a^2 + \frac{a^2z^2}{4b^2 + 4bz + z^2} = z^2$; that is, $2a^2z^2 + 4a^2bz + 4a^2b^2 = z^4 + 4bz^3 + 4b^2z^2$; but $2a^2 = e^2$; and $z^4 + 4bz^3 + 4b^2z^2 = e^4 + 4e^2y + 4e^2y^2$; whence $e^2z^2 + 2e^2bz + 2e^2b^2 = e^4 + 4e^2y + 4e^2y^2$;

have been erected the Perpendicular KG meeting the aforesaid Circle in G, through which CF would pass.

Taking particular Notice of this Rule in Prob. IX. and X. where the like Sides BC and AC of the Triangle were to be determined, I rather sought the Semi-difference than either of them. But the Usefulness of this Rule will be more evident from the twenty-eighth Problem.

Problem XXV.

To a Circle described from the Center C, *and with the Radius* CD, *to draw a Tangent* DB, *the Part whereof* PB *placed between the right Lines given by Position,* AP *and* AB, *shall be of a given Length* [See Fig. 50.].

From the Center C to either of the right Lines given by Position, as suppose to AB, let fall the Perpendicular CE, and produce it till it meets the Tangent DB in H. To the same AB let fall also the Perpendicular PG, and making $EA = a$, $EC = b$, $CD = c$, $BP = d$, and $PG = x$, by reason of the similar Triangles PGB, CDH, you will have $GB\ (\sqrt{dd - xx}) : PB :: CD : CH = \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Add EC, and you will have $EH = b + \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Moreover $PG : GB :: EH : EB$

$4e^2y^2$; that is, dividing by e^2, $z^2 + 2bz + 2b^2 = e^2 + 4ey + 4y^2$; and because $z^2 + 2bz = e^2 + 2ey$, $e^2 + 2ey + 2b^2 = e^2 + 4ey + 4y^2$; that is, by Reduction and dividing by 4, $\frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}ey + y^2$; or $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$; and $y = -\frac{1}{4}e \pm \sqrt{\frac{e^2}{16} + \frac{bb}{2}}$.

$EH : EB = \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} + \frac{cd}{x}$. Farther, because of the given Angle PAG, there is given the Ratio of PG to AG, which being made as e to f, AG will be $= \frac{fx}{e}$. Add EA and BG, and you will have, laſtly, $EB = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$. Therefore it is $\frac{cd}{x} + \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$, and by Tranſpoſition of the Terms, $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b - x}{x}\sqrt{dd - xx}$. And the Parts of the Equation being ſquared, $aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee} - \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} = \frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx + dd - xx$. And, by a due Reduction

$$x^4 + \frac{2aef}{-2bee}x^3 + \frac{+aaee}{+bbee - ddee}xx + \frac{2bddee}{-2acdee}x + \frac{ccddee}{-bbddee - 2cdef} = 0.$$

$ee + ff$

PROBLEM XXVI.

To find the Point D, *from which three right Lines* DA, DB, DC, *let fall perpendicular to ſo many other right Lines* AE, BF, CF, *given in Poſition; ſhall obtain a given Ratio to one another* [See Fig. 44.].

Of the right Lines given in Poſition, let us ſuppoſe one as BF be produced, as alſo its Perpendicular BD, till they meet the reſt AE and CF, viz. BF in E

and F, and BD in H and G. Now let EB be $= x$, and $EF = a$; and BF will be $= a - x$. But since, by reason of the given Position of the right Lines EF, EA, and FC, the Angles E and F, and consequently the Proportions of the Sides of the Triangles EBH and FBG are given; let EB be to BH as d to e; and BH will be $= \frac{ex}{d}$, and EH $(= \sqrt{EB^q + BH^q})$ $= \sqrt{xx + \frac{eexx}{dd}}$, that is, $\frac{x}{d} \times \sqrt{dd+ee}$. Let also BF be to BG, as d to f; and BG will be $= \frac{fa - fx}{d}$, and FG $(= \sqrt{BF^q + BG^q}) = \frac{\sqrt{aadd - 2afxdd + xxdd + ffaa - 2ffax + ffxx}}{dd}$, that is, $= \frac{a-x}{d}\sqrt{dd+ff}$. Besides, make BD $= y$, and HD will be $= \frac{ex}{d} - y$, and GD $= \frac{fa-fx}{d} - y$; and so, since AD is : HD (:: EB : EH) :: d : $\sqrt{dd+ee}$, and DC : GD (:: BF : FG) :: d : $\sqrt{dd+ff}$, AD will be $= \frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, and DC $= \frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$. Lastly, by reason of the given Proportions of the Lines BD, AD, DC, let BD : AD :: $\sqrt{dd+ee} : b - d$, and $\frac{by-dy}{\sqrt{dd+ee}}$ will be $(= AD) = \frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, or $by = ex$. Let also BD : DC :: $\sqrt{dd+ff} : k - d$, and $\frac{ky-dy}{\sqrt{dd+ff}}$ will be $(= DC) =$

$= \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{dd + ff}}$, or $ky = fa - fx$. Therefore $\frac{ex}{b}$ $(= y)$ is $= \frac{fa - fx}{k}$; and by Reduction $\frac{fba}{ek + fb} = x$. Wherefore take EB : EF :: $b : \frac{ek}{f} + b$, then BD : EB :: $e : b$, and you will have the Point ſought D.

PROBLEM XXVII.

To find the Point D, *from which three right Lines* DA, DB, DC, *drawn to the three given Points*, A, B, C, *ſhall have a given Ratio among themſelves.* [See Fig. 45.]

Of the given three Points, join any two of them, as ſuppoſe A and C, and let fall the Perpendicular BE from the third B, to the Line that conjoins A and C, as alſo the Perpendicular DF from the Point ſought D; and making AE $= a$, AC $= b$, EB $= c$, AF $= x$, and FD $= y$; and ADq will be $= xx + yy$. FC $= b - x$, CDq $(= FCq + FDq) = bb - 2bx + xx + yy$. EF $= x - a$, and BDq $(= EFq + EB + FDq)$ $(a) = xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. Now, ſince AD is to CD in a given Ratio, let it be as d to e; and CD will be $= \frac{e}{d}\sqrt{xx + yy}$. Since alſo AD is to BD in a given Ratio, let that be as d to f, and BD will be $= \frac{f}{d}\sqrt{xx + yy}$. And, conſequently

Prob. XXVII. (*a*) For if DF was produced, ſo as its whole Length ſhould be equal to DF + EB, it would be the Side of a right-angled Triangle, whoſe Baſe equals EF, and Hypothenuſe is BD.

fequently it is $\frac{eexx + eeyy}{dd}$ $(= CDq) = bb - 2bx + xx + yy$, and $\frac{ffxx + ffyy}{dd}$ $(= BDq) = xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. In which if, for Abbreviation ſake, you write p for $\frac{dd - ee}{d}$, and q for $\frac{dd - ff}{d}$, there will come out $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$ (b), and $aa + cc - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = 0$ (c). And by the former you have $\frac{2bqx - bbq}{p}$

(b) For by multiplying $\frac{c^2x^2 + e^2y^2}{d^2} = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, by d^2, it becomes $c^2x^2 + e^2y^2 = b^2d^2 - 2bxd^2 + x^2d^2 + y^2d^2$; which, by tranſpoſing, and dividing by d^2, it becomes $b^2 - 2bx + \frac{d^2 - e^2}{d^2}x^2 + \frac{d^2 - e^2}{d^2}y^2 = 0$; and by Subſtitution, $b^2 - 2bx + \frac{p}{d}x^2 + \frac{p}{d}y^2 = 0$.

(c) $\frac{f^2x^2 + f^2y^2}{d^2} = \overline{x^2 - 2ax + a^2 + c^2 + 2cy + y^2} \times d^2$, the Terms then being tranſpoſed into one Member, and divided by d^2; and the Subſtitution being made, it becomes $a^2 + c^2 - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}x^2 + \frac{q}{d}y^2 = 0$,

$\frac{2bqx-bbq}{p} = \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$ (*d*). Wherefore, in the latter, for $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$, write $\frac{2bqx-bbq}{p}$, and there will come out $\frac{2bqx-bbq}{p} + aa + cc - 2ax + 2cy = 0$. Again, for Abbreviation ſake, write m for $a - \frac{bq}{p}$, and $2cn$ for $\frac{bbq}{p} - aa - cc$, and you will have $2mx + 2cn = 2cy$, and the Terms being divided by $2c$, there ariſes $\frac{mx}{c} + n = y$. Wherefore, in the Equation $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, for yy write the Square of $\frac{mx}{c} + n$, and you will have $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{pmm}{dcc}xx + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pnn}{d} = 0$. Where, laſtly, if, for Abbreviation ſake, you write $\frac{b}{r}$ for $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dcc}$, and $\frac{sb}{r}$ for $b - \frac{pmn}{dc}$, and $\frac{tbb}{r}$ for $bb + \frac{pnn}{d}$, you will have $xx = 2sx - tb$. And having extracted the Root, $x = s \pm \sqrt{ss - tb}$. Having found

---

(*d*) For $\frac{p}{d}x^2 + \frac{p}{d}y^2 = 2bx - b^2$; which, multiplied into $\frac{q}{p}$, becomes $\frac{q}{d}x^2 + \frac{q}{d}y^2 = \frac{2bqx - b^2q}{p}$.

found x, the Equation $\frac{mx}{c} + n = y$ will give y; and from x and y given, that is, AF and FD, the given Point D is determined.

Problem XXVIII.

To inscribe the right Line DC *of a given Length in the given conic Section* DAC, *that it may pass through the Point* G *given by Position.* [See Fig. 28.]

Let AF be the Axis of the Curve, and from the Points D, G, and C, let fall to it the Perpendiculars DH, GE, and CB. Now to determine the Position of the right Line DC, it may be proposed to find out the Point D or C; but since these are related, and so alike, that there would be the like Operation in determining either of them, whether I were to seek CG, CB, or AB; or their likes, DG, DH, or AH; therefore I look after a third Point, that regards D and C alike, and at the same Time determines them. And I see F to be such a Point.

Now let AE be $= a$, EG $= b$, DC $= c$, and EF $= z$; and besides, since the Relation between AB and BC is had in the Equation, I suppose, given for determining the conic Section, let AB $= x$, BC $= y$, and FB will be $= x - a + z$. And because GE : EF :: CB : FB, FB will again be $= \frac{yz}{b}$. Therefore, $x - a + z = \frac{yz}{b}$.

These Things being thus laid down, take away x, by the Equation that denotes the Curve. As if the Curve be a Parabola expressed by the Equation $rx = yy$, write $\frac{yy}{r}$ for x; and there will arise $\frac{yy}{r} - a + z =$

$+ z = \frac{yz}{b}$, and extracting the Root $y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{rrzz}{4bb} + zr - rz}$. Whence it is evident, that $\sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$ is the Difference of the double Value of y; that is, of the Lines $+ BC$ and $- DH$, and consequently (having let fall DK perpendicular upon CB) that Difference is equal to CK. But $FG : GE :: DC : CK$; that is, $\sqrt{bb + zz} : b :: c : \sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$.

And by multiplying the Squares of the Means, and also the Squares of the Extreams into one another, and ordering the Products, there will arise $z^4 = \frac{4bbrz^3 - 4abbr}{rr} zz + \frac{4b^4rz - 4ab^4r + b^4cc}{rr}$, an Equation of four Dimensions, which would have risen to one of eight Dimensions, if I had sought either CG, or CB, or AB.

Problem XXIX.

To multiply or divide a given Angle, by a given Number.

[See Figure 29.]

In any Angle FAG inscribe the Lines AB, BC, CD, DE, &c. of any the same Length, and the Triangles ABC, BCD, CDE, DEF, &c. will be Isosceles, and consequently by the 32d 1. Euel. the Angle CBD will be = Angle A + ACB = 2 Angle A, and the Angle DCE = Angle A + ADC = 3 Angle A, and the Angle EDF = A + AED = 4 Angle A, and the Angle FEG = 5 Angle A, and so onwards. Now, making

making AB, BC, CD, &c. the Radii of equal Circles, the Perpendiculars BK, CL, DM, &c. let fall upon AC, BD, CE, &c. will be the Sines of thoſe Angles, and AK, BL, CM, DN, &c. will be their Sines Complement to a right one; or making AB the Diameter, the Lines AK, BL, CM, &c. will be Chords. Let therefore $AB = 2r$, and $AK = x$, then work thus:

$$AB : AK :: AC : AL.$$

$$2r : x :: 2x : \frac{xx}{r}.$$

$$\text{And } \left\{\begin{matrix} AL - AB \\ \frac{xx}{r} - 2r \end{matrix}\right\} = BL, \text{ the Duplication.}$$

$$AB : AK :: AD\ (2AL - AB) : AM.$$

$$2r : x :: \frac{2xx}{r} - 2r : \frac{x^3}{rr} - x.$$

$$\text{And } \left\{\begin{matrix} AM - AC \\ \frac{x^3}{rr} - 3x \end{matrix}\right\} = CM, \text{ the Triplication.}$$

$$AB : AK :: AE\ (2AM - AC) : AN.$$

$$2r : x :: \frac{2x^3}{rr} - 4x : \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$$

$$\text{And } \left\{\begin{matrix} AN - AD \\ \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \end{matrix}\right\} = DN, \text{ the Quadruplication:}$$

$$AB : AK :: AF\ (2AN - AD) : AO.$$

$$2r : x :: \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6xx}{r} + 2r : \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{rr} + x.$$

$$\text{And } \left\{\begin{matrix} AO - AE \\ \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{rr} + 5x \end{matrix}\right\} = EO, \text{ the Quintuplication.}$$

And ſo onwards.

Now

Now if you would divide an Angle into any Number of Parts, put q for BL, CM, DN, &c. and you will have $xx - 2rr = qr$ for the Biſection; $xxx - 3rrx = qr^2$ for the Triſection; $xxxx - 4rrxx + 2r^4 = qr^3$ for the Quadriſection; $xxxxx - 5r^2x^3 + 5r^4x = qr^4$ for the Quinquiſection, &c.

PROBLEM XXX.

To determine the Poſition of a Comet's Courſe that moves uniformly in a right Line, as B D, *from three Obſervations.* [See Fig. 30.]

Suppoſe A to be the Eye of the Spectator, B the Place of the Comet in the firſt Obſervation, C in the ſecond, and D in the third; the Inclination of the Line BD to the Line AB is to be found. From the Obſervations, therefore, there are given the Angles BAC, BAD; and conſequently if BH be drawn perpendicular to AB, and meeting AC and AD in E and F, aſſuming any how AB, there will be given BE and BF, viz. the Tangents of the Angles in reſpect of the Radius AB. Make therefore AB $= a$, BE $= b$, and BF $= c$. Moreover, from the given Intervals of the Obſervations, there will be given the Ratio of BC to BD, which, if it be made as b to e, and DG be drawn parallel to AC, ſince BE is to BG in the ſame Ratio, and BE was called b, BG will be $= e$, and conſequently GF $= e - c$. Farther, if you let fall DH perpendicular to BG, by reaſon of the Triangles ABF and DHF being alike, and alike divided by the Lines AE and DG, FE will be : AB :: FG : HD (a), that is, $c - b : a :: e - c : \frac{ae - ac}{c - b} =$ HD.

Prob. XXX. (a) Becauſe AFE, FGD, are ſimilar, FE : EA :: FG : GD; and becauſe AEB, DGH, are ſimilar, EA : AB :: GD : DH; whence FE : AB :: FG : DH (Eucl. V. 18.)

$= HD$. Moreover, FE will be : FB :: FG : FH (*b*), that is, $c - b : c :: e - c : \frac{ce - ec}{c - b} = FH$; to which add BF, or c, and BH will be $= \frac{ce - cb}{c - b}$. Wherefore $\frac{ce - cb}{c - b}$ is to $\frac{ae - ac}{c - b}$ (or $ce - cb$ to $ae - ac$, or $\frac{ce - cb}{e - c}$ to a) as BH to HD; that is, as the Tangent of the Angle HDB, or ABK to the Radius. Wherefore since a is supposed to be the Radius, $\frac{ee - cb}{e - c}$ will be the Tangent of the Angle ABK; and therefore, by resolving them into an Analogy, it will be as $e - c$ to $e - b$ (or GF to GE), so c (or the Tangent of the Angle BAF) to the Tangent of the Angle ABK.

Say, therefore, as the Time between the first and second Observation to the Time between the first and third, so the Tangent of the Angle BAE to a fourth Proportional. Then as the Difference between that fourth Proportional and the Tangent of the Angle BAF, to the Difference between the same fourth Proportional and the Tangent of the Angle BAE, so the Tangent of the Angle BAF to the Tangent of the Angle ABK.

(*b*) Because FE : EA :: FG : GD, and AE : EB :: DG : GH, therefore FE : EB :: FG : GH (Eucl. IV. 18.); whence FE : FB :: FG : FH (Eucl. V. 22.).

Problem XXXI.

Rays of Light from any ſhining or lucid Point diverging to a refracting ſpherical Surface, to find the Concourſe of each of the refracted Rays with the Axis of the Sphere paſſing through that lucid Point. [See Fig. 31.]

Let A be that lucid Point, and BV the Sphere, the Axis whereof is AD, the Center C, and the Vertex V; and let AB be the incident Ray, and BD the refracted Ray; and having let fall to thoſe Rays the Perpendiculars CE and CF, as alſo BG perpendicular to AD, and having drawn BC, make $AC = a$, VC or $BC = r$, $CG = x$, and $CD = z$, and AG will be $= a - x$, $BG = \sqrt{rr - xx}$, $AB = \sqrt{aa - 2ax + rr}$; and by reaſon of the ſimilar Triangles ABG and ACE, $CE = \frac{a\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}}$. Alſo $GD = z + x$, $BD = \sqrt{zz + 2zx + rr}$; and by reaſon of the ſimilar Triangles DBG and DCF, $CF = \frac{z\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$. Beſides, ſince the Ratio of the Sines of Incidence and Refraction, and conſequently of CE to CF, is given, ſuppoſe that Ratio to be as a to f, and $\frac{fa\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}}$ will be $= \frac{az\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$; and multiplying croſs-ways, and dividing by $a\sqrt{rr - xx}$, it will be $f\sqrt{zz + 2zx + rr} = z\sqrt{aa - 2xa + rr}$, and by ſquaring and reducing the Terms into Order, $zz = \frac{2ffxz + ffrr}{da - 2ax + rr - ff}$. Then for the given $\frac{ff}{a}$ write p, and q for the given $a + \frac{rr}{a} - p$, and zz will

be $= \frac{2pxz+prr}{q-2x}$, and $z = \frac{px+\sqrt{ppxx-2prrx+pqrr}}{q-2x}$. Therefore z is found; that is, the Length of CD, and consequently the Point ſought D, where the refracted Ray BD meets with the Axis. Q. E. F.

Here I made the incident Rays to diverge, and fall upon a thicker Medium; but changing what is requiſite to be changed, the Problem may be as eaſily reſolved when the Rays converge, or fall from a thicker Medium into a thinner one.

PROBLEM XXXII.

If a Cone be cut by any Plane, to find the Figure of the Section. [See Fig. 32 and 33.]

Let ABC be a Cone ſtanding on a circular Baſe BC, and IEM its Section ſought; and let KILM be any other Section parallel to the Baſe, and meeting the former Section in HI; and ABC a third Section, perpendicularly biſecting the two former in EH and KL, and the Cone in the Triangle ABC. And producing EH till it meet AK in D; and having drawn EF and DG, parallel to KL, and meeting AB and AC in F and G, call $EF = a$, $DG = b$, $ED = c$, $EH = x$, and $HI = y$; and by reaſon of the ſimilar Triangles EHL, EDG, ED will be : DG :: EH : HL $= \frac{bx}{c}$. Then by reaſon of the ſimilar Triangles DEF, DHK, DE will be : EF :: DH : ($c - x$ in the thirty-ſecond Figure, and $c + x$ in the thirty-third Figure) HK $= \frac{ac \mp ax}{c}$. Laſtly, ſince the Section KIL is parallel to the Baſe, and conſequently circular, HK × HL will be $=$ HIq, that is, $\frac{ab}{c}x \mp \frac{ab}{cc}xx = yy$, an Equation

tion which expreſſes the Relation between EH (x) and HI (y), that is, between the Axis and the Ordinate of the Section EIM; which Equation, ſince it expreſſes an Ellipſe in the thirty-ſecond Figure, and an Hyperbola in the thirty-third Figure, it is evident, that that Section will be Elliptical or Hyperbolical.

Now if ED no where meets AK, being parallel to it, then HK will be $=$ EF (a), and thence $\frac{ab}{c} \times$ (HK $\times$ HL) $= yy$, an Equation expreſſing a Parabola.

Problem XXXIII.

If the right Line XY *be turned about the Axis* AB, *at the Diſtance* CD, *with a given Inclination to the Plane* DCB, *and the Solid* PQRUTS, *generated by that Circumrotation, be cut by any Plane as* INQLK, *to find the Figure of the Section.* [See Fig. 34.]

Let BHQ, or GHO, be the Inclination of the Axis AB to the Plane of the Section; and let L be any Concourſe of the right Line XY with that Plane. Draw DF parallel to AB, and let fall the Perpendiculars LG, LF, LM, to AB, DF, and HO, and join FG and MG. And having called CD $= a$, CH $= b$, HM $= x$, and ML $= y$, by reaſon of the given Angle GHO, making MH : HG :: d : e, $\frac{ex}{d}$ will be $=$ GH, and $b + \frac{ex}{d} =$ GC or FD. Moreover, by reaſon of the given Angle LDF (viz. the Inclination of the right Line XY to the Plane GCDF) putting FD : FL :: g : b, it will be $\frac{bb}{g} + \frac{bex}{dg} =$ FL, to whoſe Square add FGq (DCq, or aa) and there will come out GLq

 $= aa$

$= aa + \frac{bbbb}{gg} + \frac{2bbbex}{dgg} + \frac{bbeexx}{ddgg}$. Hence fubtract MG$q$ (HMq — HGq, or $xx - \frac{ee}{dd}xx$), and there will remain $\frac{aagg + bbbb}{gg} + \frac{2bbbe}{dgg}x + \frac{bbee - ddgg + eegg}{ddgg} \times xx$ (= MLq) $= yy$: an Equation that expreſſes the Relation between x and y, that is, between HM the Axis of the Section, and ML its Ordinate. And therefore, ſince in this Equation x and y aſcend only to two Dimenſions, it is evident, that the Figure INQLK is a conic Section. As for Example, if the Angle MHG is greater than the Angle LDF, this Figure will be an Ellipſe; but if leſs, an Hyperbola; and if equal, either a Parabola, or (the Points C and H moreover coinciding) a Parallelogram.

Problem XXXIV.

If you erect AD *of a given Length perpendicular to* AF; *and* ED, *one Leg of a Square* DEF, *paſs continually through the Point* D, *while the other Leg* EF *equal to* AD *ſlide upon* AF; *to find the Curve* HIC, *which the Leg* EF *deſcribes by its middle Point* C. [See Fig. 35.]

Let EC or CF be $= a$, the Perpendicular CB $= y$, AB $= x$; and on account of the ſimilar Triangles FBC, FEG (*a*), it will be BF ($\sqrt{aa - yy}$) : BC + CF ($y + a$) :: EF ($2a$) : EG + GF (AG + GF) or AF

Prob. XXXIV. (*a*) For they are rectangular in E, and B, and have the Angle EFG common.

or AF (*b*). Wherefore $\frac{2ay + 2aa}{\sqrt{aa - yy}}$ (= AF = AB + BF) $= x + \sqrt{aa - yy}$. Now by multiplying by $\sqrt{aa - yy}$, there is made $2ay + 2aa = aa - yy + x\sqrt{aa - yy}$, or $2ay + aa + yy = x \times \sqrt{aa - yy}$, and by ſquaring the Parts, divided by $\sqrt{a + y}$ (*c*), and ordering them, there comes out $y^3 + 3ayy + 3aa\,y + a^3 + xx\,y - axx = 0$.

The ſame otherwiſe [See Fig. 36.].

On BC take at each End, BI, and CK, equal to CF; and draw KF, HI, HC, and DF; whereof let HC and DF meet AF, and IK, in M and N, and upon HC let fall the Perpendicular IL; and the Angle K will be $= \frac{1}{2}$ BCF $= \frac{1}{2}$ EGF $=$ GFD $=$ AMH $=$ MHI $=$ CIL (*d*); and conſequently the right-angled Triangles

---

(*b*) The Triangles DAG, FEG, are rectangular in A, and E, and have the Angles at G vertical, that is, equal, and the Side DA equal to EF by Suppoſition, wherefore AG = GE; and Triangle DAG = FEG.

(*c*) For $a^2 + 2ay + y^2 = \overline{a + y}^2 = \overline{a + y} \times \sqrt{a + y} \times \sqrt{a + y}$; but $x\sqrt{a^2 - y^2} = x\sqrt{a + y} \times \sqrt{a - y} = \sqrt{a + y} \times x\sqrt{a - y}$; whence dividing by $\sqrt{a + y}$, and ſquaring, $a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3 = x^2a - yx^2$, and tranſpoſing, $y^3 + 3ay^2 + 3a^2 + x^2 \times y + a^3 - ax^2 = 0$.

(*d*) The Triangle CKF being equicrural by Conſtruction, the exterior BCF is double of CKF, or

angles KBF, FBN, HLI, and ILC will be ſimilar. Make therefore FC $= a$, HI $= x$, and IC $= y$; and BN $(2a - y)$ will be : BK (y) :: LC : LH :: CIq (yy) : HIq (xx), and conſequently $2axx - yxx = y^3$. From which Equation it is eaſily inferred, that this Curve is the Ciſſoid of the Antients, belonging to a Circle, whoſe Center is A, and its Radius AH.

PROBLEM XXXV.

If a right Line ED *of a given Length ſubtending the given Angle* EAD, *be ſo moved, that its Ends* D *and* E *always touch the Sides* AD *and* AE *of that Angle; let it be propoſed to determine the Curve* FCG, *which any given Point* C *in that right Line* ED *deſcribes.* [See Fig. 37.]

From the given Point C draw CB parallel to EA; and make AB $= x$, BC $= y$, CE $= a$, and CD $= b$, and by reaſon of the ſimilar Triangles DCB, DEA, it will be EC : AB :: CD : BD; that is, $a : x :: b :$ BD $= \frac{bx}{a}$. Beſides, having let fall the Perpendicular CH, by reaſon of the given Angle DAE, or DBC, and conſequently of the given Ratio of the Sides of the right-

---

CFK; but the Triangles BCF, and EGF, being ſimilar, EGF is double of GFD, or GDF, (EGF and BCF being equal) therefore the Triangle DGF is equicrural; whence the Angles FDG, GFD, KFC, CKF, are equal: But the Angles BCF + CFB make one right Angle; whence NFK is alſo a right Angle; and a Circle, whoſe Center is C, and Radius CK, will paſs through the Points F, and N: Whence NC $=$ FC $=$ DH, and HC and DF are parallel; and GFD $=$ AMH; and AMH $=$ MHI; and MHI $=$ CIL, for the Triangles HIC and CLI, being rectangular at I and L, and having HCI common, are ſimilar.

right-angled Triangle BCH, you will have $a : e :: BC : BH$, and BH will be $= \frac{ey}{a}$. Take away this from BD, and there will remain $HD = \frac{bx - ey}{a}$. Now in the Triangle BCH, becauſe of the right Angle BHC, it is $BCq - BHq = CHq$; that is $yy - \frac{eeyy}{aa} = CHq$. In like manner, in the Triangle CDH, becauſe of the right Angle CHD, it is $CDq - CHq = HDq$; that is, $bb - yy + \frac{eeyy}{aa} \left(= HDq = \frac{bx - ey}{a} q.\right) = \frac{bbxx - 2bexy + eeyy}{aa}$; and by Reduction $yy = \frac{2be}{aa} \times xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$. Where, ſince the unknown Quantities riſe but to two Dimenſions, it is evident that the Curve is a conic Section. Then extracting the Root, you will have $y = \frac{bex \pm b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}$

Where, in the radical Term, the Coefficient of xx is $ee - aa$. But it was $a : e :: BC : BH$; and BC is neceſſarily a greater Line than BH, viz. the Hypothenuſe of a right-angled Triangle is greater than the Side of it; therefore a is greater than e, and $ee - aa$ is a negative Quantity, and conſequently the Curve will be an Ellipſis.

PROBLEM

PROBLEM XXXVI.

If the Ruler E B D, *forming a right Angle, be ſo moved, that one Leg of it,* E B, *continually ſubtends the right Angle* E A B, *while the End of the other Leg,* B D, *deſcribes ſome curve Line, as* F D ; *to find that Line* F D, *which the Point* D *deſcribes.* [See Fig. 38.]

From the Point D let fall the Perpendicular D C to the Side A C; and making A C $= x$, and D C $= y$, and E B $= a$, and B D $= b$. In the Triangle B D C, by reaſon of the right Angle at C, B C q is $=$ B D q $-$ D C q $= bb - yy$. Therefore B C $= \sqrt{bb - yy}$; and A B $= x - \sqrt{bb - yy}$. Beſides, by reaſon of the ſimilar Triangles B E A, D B C, it is B D : D C :: E B : A B; that is, $b : y :: a : x - \sqrt{bb - yy}$. Wherefore $bx - b\sqrt{bb - yy} = ay$, or $bx - ay = b\sqrt{bb - yy}$. And the Parts being ſquared and duly reduced $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$. And extracting the Root $y = \frac{abx \pm bb\sqrt{aa + bb - xx}}{aa + bb}$. Whence it is again evident, that the Curve is an Ellipſis.

This is ſo where the Angles E B D and E A B are right; but if thoſe Angles are of any other Magnitude, as long as they are equal, you may proceed thus: [See Fig. 39.] Let fall D C perpendicular to A C as before, and draw D H, making the Angle D H A equal to the Angle H A E, ſuppoſe obtuſe, and calling E B $= a$, B D $= b$, A H $= x$, and H D $= y$; by reaſon of the ſimilar Triangles E A B, B H D, B D will be : D H :: E B : A B; that is, $b : y :: a : AB = \frac{ay}{b}$. Take this from A H and there will remain B H $= x - \frac{ay}{b}$.

Beſides,

Beſides, in the Triangle DHC, by reaſon of all the Angles given, and conſequently the Ratio of the Sides given, aſſume DH to HC in any given Ratio, ſuppoſe as b to e; and ſince DH is y, HC will be $\frac{ey}{b}$, and HB $\times$ HC $= \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Laſtly, by the 12, 2 Elem. in the Triangle BHD, it is $BDq = BHq + DHq + 2BH \times HC$; that is, $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. And extracting the Root $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}$. Where when b is greater than e, that is, when $ee - bb$ is a negative Quantity, it is again evident, that the Curve is an Ellipſe.

PROBLEM XXXVII.

In the given Angle PAB *having any how drawn the right Lines*, BD, PD, *in a given Ratio, on this Condition, that* BD *ſhall be parallel to* AP, *and* PD *terminated at the given Point* P *in the right Line* AP; *to find the Locus of the Point* D. [See Fig. 41.]

Draw CD parallel to AB, and DE perpendicular to AP; and make AP $= a$, CP $= x$, and CD $= y$, and let BD be to PD in the ſame Ratio as d to e, and AC or BD will be $= a - x$, and PD $= \frac{ea - ex}{d}$. Moreover, by reaſon of the given Angle DCE, let the Ratio of CD to CE be as d to f, and CE will be $= \frac{fy}{d}$, and EP $= x - \frac{fy}{d}$. But by reaſon of the Angles at E

being

being right ones, it is $CDq - CEq\ (= EDq) = PDq - EPq$; that is, $yy - \frac{ffyy}{dd} = \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$; and blotting out on each Side $- \frac{ffyy}{dd}$, and the Terms being rightly diſpoſed, $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$, and extracting the Root $y =$

$$\frac{fx}{d} \pm \frac{\sqrt{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx + ff}}{d}.$$

Where, ſince x and y in the laſt Equation aſcends only to two Dimenſions, the Place of the Point D will be a conic Section, and that either an Hyperbola, Parabola, or Ellipſe, as $ee - dd + ff$, (the Co-efficient of xx in the laſt Equation) is greater, equal to, or leſs than nothing.

Problem XXXVIII.

The two right Lines V E *and* V C *being given in Poſition, and cut any how in* C *and* E *by another right Line,* P E *turning about the Pole* P, *given alſo in Poſition; if the intercepted Line* C E *be divided into the Parts* C D, D E, *that have a given Ratio to one another, it is propoſed to find the Place of the Point* D. [See Fig. 42.]

Draw V P, and parallel to it, D A and E B, meeting V C in A and B. Make $VP = a$, $VA = x$, and $AD = y$; and ſince the Ratio of C D to D E is given, or converſely of C D to C E, that is, the Ratio of D A to E B, let it be as d to e, and E B will be $= \frac{ey}{d}$. Beſides,

ſides, ſince the Angle EVB is given, and conſequently the Ratio of EB to VB, let that Ratio be as e to f, and VB will be $= \frac{fy}{d}$. Laſtly, by reaſon of the ſimilar Triangles CEB, CDA, CPV, it is EB : CB :: DA : CA :: VP : VC, and by Compoſition EB + VP : CB + VC :: DA + VP : CA + VC; that is, $\frac{ey}{d} + a : \frac{fy}{d} :: y + a : x$, and multiplying together the Means and Extremes $eyx + dax = fyy + fey$. Where ſince the indefinite Quantities x and y aſcend only to two Dimenſions, it follows, that the Curve VD, in which the Point D is always found, is a conic Section, and that an Hyperbola, becauſe one of the indefinite Quantities, viz. x is only of one Dimenſion, and in the Term exy is multiplied by the other indefinite one y.

PROBLEM XXXIX.

If two right Lines, AC *and* BC, *in any given Ratio, are drawn from the two Points* A *and* B *given in Poſition, to a third Point* C, *to find the Place of* C, *the Point of Concourſe.* [See Fig. 43.]

Join AB, and let fall to it the Perpendicular CD; and making AB $= a$, AD $= x$, DC $= y$, AC will be $= \sqrt{xx+yy}$, BD $= x-a$, and BC $(= \sqrt{BDq+DCq})$ $= \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$. Now ſince there is given the Ratio of AC to BC, let that be as d to e; and the Means and Extremes being multiplied together, you will have $e\sqrt{xx+yy} = d\sqrt{xx-2ax+aa+yy}$, and by Reduction $\sqrt{\frac{ddaa-2ddax}{ee-dd}} - xx = y$. Where ſince xx is negative, and affected only by Unity, and alſo the Angle ADC a right one, it is evident, that the Curve

Curve in which the Point C is placed is a Circle; viz. in the right Line AB take the Points E and F, so that $d : e :: AE : BE :: AF : BF$, and EF will be the Diameter of this Circle.

And hence from the Converse, this Theorem comes out, that *in the Diameter of any Circle* EF *produced, having given any how the two Points* A *and* B *on this Condition,* $AE : AF :: BE : BF$, *and having drawn from these Points the two right Lines* AC *and* BC, *meeting the Circumference in any Point* C; AC *will be to* BC *in the given Ratio of* AE *to* BE.

Problem XL.

If a lucid Point, as A, *dart forth Rays towards a refracting plain Surface, as* CD; *to find the Ray* AC, *whose refracted Part* CB *will strike the given Point* B. [See Figure 51.]

From that lucid Point let fall the Perpendicular AD to the refracting Plane, and let the refracted Ray BC meet with it, being produced out on both Sides, in E; and a Perpendicular let fall from the Point B in F, and draw BD; and making $AD = a$, $DB = b$, $BF = c$, $DC = x$, make the Ratio of the Sines of Incidence and Refraction, that is, of the Sines of the Angles CAD, CED (*a*), to be d to e, and since EC and AC (as is known) (*b*) are in the same Ratio, and AC is $\sqrt{aa + xx}$,

---

Prob. XL. (*a*) For, drawing through the Point C a Line perpendicular to the Surface CD, the Angle CAD is alternate, and therefore equal to the Angle of Incidence, and CED is opposite at the interior Parallel, and therefore equal to the Angle of Refraction.

(*b*) For in the Triangle ECA, the Sides EC, CA, are as the Sines of the opposite Angles CAE, or CAD, and CEA.

$\sqrt{aa+xx}$, EC will be $=\frac{d}{e}\sqrt{aa+xx}$. Beſides, ED $(=\sqrt{EC^q-CD^q})$ is $=\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$, and DF $=\sqrt{bb-cc}$, and EF $=\sqrt{bb-cc}-\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$. Laſtly, becauſe of the ſimilar Triangles ECD, EBF, it is ED : DC :: EF : FB, and multiplying the Values of the Means and Extremes into one another, $c\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}=x\sqrt{bb-cc}+x\times\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$, or $c-x\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}=x\sqrt{bb-cc}$, and the Parts of the Equation being ſquared and duly diſpoſed,

$$x^4-2cx^3=\frac{+ddcc+ddaaxx-2ddacx+ddaacc-eebb}{dd-ee}=0.$$

Problem XLI.

To find the Locus or Place of the Vertex of a Triangle D, *whoſe Baſe* AB *is given, and the Angles at the Baſe* DAB, DBA, *have a given Difference.* [See Fig. 52.]

Where the Angle at the Vertex, or (which is the ſame Thing) where the Sum of the Angles at the Baſe is given, Euclid [in 29. 3.] has taught us, that the Locus of the Vertex is in the Circumference of a Circle; but we have propoſed the finding the Place when the Difference of the Angles at the Baſe is given. Let the Angle DBA be greater than the Angle DAB, and let ABF be their given Difference, the right Line BF

meeting AD in F. Moreover, let fall the Perpendicular DE to BF, as alſo DC perpendicular to AB meeting BF in G. And making $AB = a$, $AC = x$, and $CD = y$, BC will be $= a - x$. Now, ſince in the Triangle BCG there are given all the Angles, there will be given the Ratio of the Sides BC and GC, let that be as d to a, and CG will be $= \frac{aa - ax}{d}$; take away this from DC or y, and there will remain DG $= \frac{dy - aa + ax}{d}$. Beſides, becauſe of the ſimilar Triangles BGC, and DGE, it is BG : BC :: DG : DE. But in the Triangle BGC, it is $a : d$ :: CG : BC. And conſequently $aa : dd$ :: $CGq : BCq$, and by compounding $aa + dd : dd$ :: $BGq : BCq$, and extracting the Roots $\sqrt{aa + dd} : d$ (:: BG : BC) :: DG : DE. Therefore $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Moreover, ſince the Angle ABF is the Difference of the Angles BAD and ABD, and conſequently the Angles BAD and FBD are equal, the right-angled Triangles CAD and EBD will be ſimilar, and therefore the Sides proportional, or DA : DC :: DB : DE. But DC is $= y$. DA $(= \sqrt{ACq + DCq}) = \sqrt{xx + yy}$. DB $(= \sqrt{BCq + DCq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, and above DE was $= \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Wherefore $\sqrt{xx + yy} : y$ :: $\sqrt{aa - 2ax + xx + yy} : \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$; and the Squares of the Means and Extremes being multiplied by each other, $aayy - 2axyy +$ $xxyy$

$$xx\,yy + y^4 = \frac{dd\,xx\,yy + dd\,y^4}{aa+dd} - \frac{2aadxxy - 2aady^3 + 2ady x^3 + 2adxy^3 + a^4x^2 + a^4yy}{aa+dd} - \frac{2a^3x^3 - 2a^3xyy + aax^4 + a^2x^2y^2}{aa+dd}.$$ Multiply all the Terms by $aa+dd$, and reduce thoſe Terms that come out into due Order, and there will ariſe

$$\begin{array}{llll} -aa & -2dy & +\frac{2d}{a}y^3 & -ddyy \\ x^4 & x^3 & xx & x - 2dy^3 = 0. \\ +\frac{2d}{a}y & +aa & +\frac{2dd}{a}yy & -y^4 \end{array}$$

Divide this Equation by $xx - ax \overset{+dy}{+yy}$, and there will ariſe $xx \overset{-x}{+\frac{2d}{a}y} x \overset{-yy}{-dy} = 0$; there come out therefore two Equations in the Solution of this Problem: The firſt, $xx - ax \overset{+dy}{+yy} = 0$ is to a Circle, viz. the Place of the Point D, where the Angle FBD is taken on the other Side of the right Line BF than what is deſcribed in the Figure, the Angle ABF being the Sum of the Angles DAB and DBA at the Baſe, and ſo the Angle ADB at the Vertex being given. The laſt, viz. $xx \overset{-a}{+\frac{2d}{a}y} x \overset{-yy}{-dy} = 0$, is an Hyperbola, the Place of the Point D, where the Angle FBD obtains the Situation from the right Line BF, which we deſcribed in the Figure; that is, ſo that the Angle ABF may be the Difference of the Angles DAB, DBA, at the Baſe. And this is the Determination of the Hyperbola: Biſect AB in P; draw PQ, making the Angle BPQ equal to Half the Angle ABF: To this

draw the Perpendicular PR, and PQ and PR will be the Aſymptotes of this Hyperbola, and B a Point thro' which the Hyperbola will paſs.

Hence ariſes this Theorem. *Any Diameter, as* AB, *of a right-angled Hyperbola, being drawn, and having drawn the right Lines* AD, BD, AH, BH, *from its Ends to any two Points* D *and* H *of the Hyperbola; theſe right Lines will make equal Angles* DAH, DBH, *at the Ends of the Diameter.*

The ſame after a ſhorter Way.

At PROBLEM xxiv. I laid down a Rule about the moſt commodious Election of Terms to proceed with in the Calculus of Problems, where there happens any Ambiguity in the Election of ſuch Terms. Here the Difference of the Angles at the Baſe is indifferent in reſpect to both Angles; and in the Conſtruction of the Scheme, it might equally have been added to the leſſer Angle DAB, by drawing from A a right Line parallel to BF; or ſubtracted from the greater Angle DBA, by drawing the right Line BF. Wherefore I neither add nor ſubtract it, but add Half of it to one of the Angles, and ſubtract Half of it from the other. Then ſince it is alſo doubtful whether AC or BC muſt be made uſe of for the indefinite Term whereon the Ordinate DC ſtands, I uſe neither of them; but I biſect AB in P, and I make uſe of PC; or rather, having drawn MPQ [See Figure 53.] making, on both Sides, the Angles APQ, BPM, equal to Half the Difference of the Angles at the Baſe, ſo that it, with the right Lines AD, BD, may make the Angles DQP, DMP, equal; I let fall to MQ the Perpendiculars AR, BN, DO, and I uſe DO for the Ordinate, and PO for the indefinite Line it ſtands on. I make therefore PO $= x$, DO $= y$, AR or BN $= b$, and PR or PN $= c$. And by reaſon of the ſimilar Triangles BNM, DOM, BN will be : DO :: MN : MO. And by Diviſion DO — BN $(y - b)$: DO (y) :: MO — MN (ON

(ON or $c - x$) : MO. Wherefore $MO = \frac{cy - xy}{y - b}$. In like manner on the other Side, by reaſon of the ſimilar Triangles ARQ, DOQ, AR will be : DO :: RQ : QO, and by Compoſition DO + AR ($y + b$) : DO (y) :: QO + RQ (OR or $c + x$) : QO. Wherefore $QO = \frac{cy + xy}{y + b}$. Laſtly by reaſon of the equal Angles DMQ, DQM, MO and QO are equal, that is, $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$. Divide all by y, and multiply by the Denominators, and there will ariſe $cy + cb - xy - xb = cy - cb + xy - xb$, or $cb = xy$, the moſt noted Equation that expreſſes the Hyperbola.

Moreover, the Locus or Place of the Point D might have been found without an algebraic Calculus; for from what we have ſaid above, DO — BN : ON :: DO : MO (QO) :: DO + AR : OR. That is, DO — BN : DO + BN :: ON : OR. And mixtly (*a*), DO : BN :: $\frac{ON + OR}{2}$ (NP) : $\frac{OR - ON}{2}$ (OP). And conſequently, DO × OP = BN × NP.

Prob. XLI. (*a*) For DO — BN : DO + BN :: ON : OR; whence DO — BN + DO + BN (= 2DO) : DO + BN :: NO + OR : OR; whence alſo DO + BN : DO + BN — DO + BN (= 2BN) :: OR : OR — ON; conſequently ex æquo ord. 2DO : 2BN :: RO + ON : RO — ON; and dividing by 2, DO : BN :: $\frac{RO + ON}{2}$: $\frac{RO - ON}{2}$.

Problem XLII.

To find the Locus or Place of the Vertex of a Triangle whose Base is given, and one of the Angles at the Base differs by a given Angle from being double of the other.

In the last Scheme of the former Problem, let ABD be that Triangle, AB its Base bisected in P, APQ or BPM the third of the given Angle, by which DBA exceeds the double of the Angle DAB; and the Angle DMQ will be double of the Angle DQM (*a*). To PM let fall the Perpendiculars AR, BN, DO, and bisect the Angle DMQ by the right Line MS meeting DO in S; and the Triangles DOQ, SOM, will be similar; and consequently OQ : OM :: OD : OS, and by dividing OQ — OM : OM :: SD : OS :: (by the 3. of the 6th Elem.) DM : OM. Wherefore (by the 9. of the 5th Elem.) OQ — OM = DM. Now making PO = x, OD = y, AR or BN = b, and PR or IN = c, you will have, as in the former Problem, $OM = \frac{cy - xy}{y - b}$, and $OQ = \frac{cy + xy}{y + b}$, and consequently $OQ - OM = \frac{-2bcy + 2xyy}{yy - bb}$. Make now $DO^q + OM^q = DM^q$, that is, $yy + \frac{cc - 2cx + xx}{yy - 2by + bb} yy = \frac{4bbcc - 8bcxy + 4xxyy}{y^4 - 2bbyy + b^4} yy$, and

---

Prob. XLII. (*a*) Because $BPM = \frac{DBP - 2DAQ}{3}$, and because DBP = DMQ + BPM, therefore DMQ = 2DAQ + 3BPM — BPM = 2DAQ + 2BPM = 2DAQ + 2APQ; but DQM = DAQ + APQ; therefore DMQ = 2DQM.

and by due Reduction there will at length arise

$$y^4 * \begin{matrix} +cc \\ -2bb \\ -2cx \\ -3xx \end{matrix} yy \begin{matrix} +2bxx \\ +4bcx \\ +2bcc \end{matrix} y \begin{matrix} +b^4 \\ -3bbcc \\ -2bbcx \\ +bbxx \end{matrix} = 0 \text{ (b).}$$

Divide all by $y - b$, and it will become

$$y^3 + byy \begin{matrix} -bb \\ +cc \\ -2cx \\ -3xx \end{matrix} y \begin{matrix} -b^3 \\ +3bcc \\ +2bcx \\ -bxx \end{matrix} = 0.$$

Wherefore the Point D is in a Curve of three Dimensions; which, however, becomes an Hyperbola when the Angle BPM vaniſhes or becomes nothing; or, which is the ſame Thing, when one of the Angles at the Baſe DBA is double of the other DAB. For then BN or b vaniſhing, the Equation will become $yy = 3xx + 2cx - cc$.

And from the Conſtruction of this Equation there comes this Theorem. [See Fig. 54.] *If to the Center* C, *and Aſymptotes* CS, CT, *containing the Angle* SCT *of* 120 *Degrees, you deſcribe any Hyperbola, as* DV, *whoſe Semi-Axis's are* CV, CA; *produce* CV to B, *ſo that* VB *ſhall be* = VC, *and from* A *and* B *you drew any two right Lines* AD, BD, *meeting at the Hyperbola; the Angle* BAD *will be Half the Angle* ABD, *but a third Part of the Angle* ADE, *which the right Line* AD *comprehends with* BD *produced.* This is to be underſtood of the Hyperbola that paſſes through the Point V. But if the two right Lines A*d* and B*d*, drawn

(b) Becauſe $y^4 - 2b^2y^2 + b4 = \overline{y^2 - 2by + b^2}^2$, it is ſufficient to multiply y^2, by $y^4 - 2b^2y^2 + b^4$; and $\overline{c^2 - 2cx + x^2} \times y^2$ by $y^2 - 2by + b^2$; then abbreviating, and tranſpoſing, the Biquadratic emerges.

drawn from the ſame Points A and B, meet in the oppoſite Hyperbola that paſſes through A, then of thoſe two external Angles of the Triangle at the Baſe, that at B will be double of that at A.

Problem XLIII.

To deſcribe a Circle through two given Points, that ſhall touch a right Line given in Poſition. [See Fig. 55.]

Let A and B be the two given Points, and E F the right Line given in Poſition, and let it be required to deſcribe a Circle A B E through thoſe Points which ſhall touch that right Line F E. Join A B, and biſect it in D. Upon D erect the Perpendicular D F meeting the right Line F E in F, and the Center of the Circle will fall upon this laſt drawn Line D F, as ſuppoſe in C. Join, therefore, C B; and on F E let fall the Perpendicular C E, and E will be the Point of Contact, and C B and C E equal, as being Radii of the Circle ſought. Now ſince the Points A, B, D, and F, are given, let D B $= a$, and D F $= b$; and ſeek for D C to determine the Center of the Circle, which therefore call x. Now in the Triangle C D B, becauſe the Angle at D is a right one, you have $\sqrt{DBq + DCq}$, that is $\sqrt{aa + xx} =$ C B. Alſo D F — D C, or $b - x$ = C F. And ſince in the right-angled Triangle C F E the Angles are given, there will be given the Ratio of the Sides C F and C E. Let that be as d to e; and C E will be $= \frac{e}{d} \times$ C F, that is, $= \frac{eb - ex}{d}$. Now put C B and C E (the Radii of the Circle ſought) equal to one another, and you will have the Equation $\sqrt{aa + xx} = \frac{eb - ex}{d}$. Whoſe Parts being ſquared and multiplied by dd, there ariſes $aadd + ddxx = eebb - 2eebx + eexx$; or $xx =$

$= \frac{-2eebx - aadd + eebb}{dd - ee}$. And extracting the Root, $x = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$.

Therefore the Length of D C, and consequently the Center C is found, from which a Circle is to be described through the Points A and B that shall touch the right Line F E.

Problem XLIV.

To describe a Circle through a given Point, that shall touch two right Lines given in Position. [See Fig. 56.]

N. B. *This Proposition is resolved as* Prop. 43. *for the Point* A *being given, there is also given the other Point* B.

Suppose the given Point to be A; and let E F, F G, be the two right Lines given by Position, and A E G the Circle sought touching the same, and passing through that Point A. Let the Angle E F G be bisected by the right Line C F, and the Center of the Circle will be found therein. Let that be C; and having let fall the Perpendiculars C E, C G, to E F and F G, E and G will be the Points of Contact. Now in the Triangles C E F, C G F, since the Angles at E and G are right ones, and the Angles at F are Halves of the Angle E F G, all the Angles are given, and consequently the Ratio of the Sides C F, and C E or C G. Let that be as d to e; and if, for determining the Center of the Circle sought C, there be assumed C F $= x$, C E or C G will be $= \frac{ex}{d}$. Besides, let fall the Perpendicular A H to F C, and since the Point A is given, the right Lines A H and F H will be given. Let them be called a and b, and taking F C or x from F H or b, there will remain C H $= b - x$. To whose Square $bb - 2bx + xx$ add the Square of A H or aa, and the Sum $aa + bb - 2bx + xx$

$2bx + xx$ will be AC^q by the 47. 1. Eucl. because the Angle AHC is, by Supposition, a right one. Now make the Radii of the Circle AC and CG equal to each other; that is, make an Equality between their Values, or between their Squares, and you will have the Equation $aa + bb - 2bx + xx = \frac{eexx}{dd}$. Take away xx from both Sides, and changing all the Signs, you will have $-aa - bb + 2bx = xx - \frac{eexx}{dd}$. Multiply all by dd, and divide by $dd - ee$, and it will become $\frac{-aadd - bbdd + 2bddx}{dd - ee} = xx$.

The Root of which Equation being extracted, is $x = \frac{bdd - d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$. Therefore the Length FC is found, and consequently the Point C; which is the Center of the Circle sought.

If the found Value x or FC be taken from b or HF, there will remain $HC = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$ the same Equation which came out in the former Problem, for determining the Length of DC.

Problem XLV.

To describe a Circle through two given Points, which shall touch another Circle given in Position. [See Problem 21, and Figure 57.]

Let A, B, be the two Points given, EK the Circle given in Magnitude and Position, F its Center, ABE the Circle sought, passing through the Points A and B, and touching the other Circle in E, and let C be its Center. Let fall the Perpendiculars CD and FG to AB being produced, and draw CF cutting the Circles in the Point of Contact E, and draw also FH parallel to DG,

DG, and meeting CD in H. These being thus constructed, make AD or DB $= a$, DG or HF $= b$, GF $= c$, and EF (the Radius of the Circle given) $= d$, and DC $= x$; and CH will be $(= CD - FG) = x - c$, and $CF q\ (= CH q + HF q) = xx - 2cx + cc + bb$, and $CB q\ (= CD q + DB q) = xx + aa$, and consequently CB or CE $= \sqrt{xx + aa}$. To this add EF, and you will have $CF = d + \sqrt{xx + aa}$, whose Square $dd + aa + xx + 2d\sqrt{xx + aa}$, is equal to the Value of the same $CF q$ found before, viz. $xx - 2cx + cc + bb$. Take away from both Sides xx, and there will remain $dd + aa + 2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - 2cx$. Take away moreover $dd + aa$, and there will come out $2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - dd - aa - 2cx$. Now, for Abbreviation sake, for $cc + bb - dd - aa$, write $2gg$, and you will have $2d\sqrt{xx + aa} = 2gg - 2cx$, or $d\sqrt{xx + aa} = gg - cx$. And the Parts of the Equation being squared, there will come out $ddxx + ddaa = g^4 - 2ggcx + ccxx$. Take from both Sides $ddaa$ and $ccxx$, and there will remain $ddxx - ccxx = g^4 - ddaa + 2ggcx$. And the Parts of the Equation being divided by $dd - cc$, you will have $xx = \frac{g^4 - ddaa - 2ggcx}{dd - cc}$. And by Extraction of the affected Root, $x = \frac{-gg c + \sqrt{g^4 dd - d^4 aa + ddaacc}}{dd - cc}$.

Having found therefore x, or the Length of DC, bisect AB in D, and at D erect the Perpendicular DC $= \frac{-gg c + d\sqrt{g^4 - aadd + aacc}}{dd - cc}$. Then from the Center C, through the Point A or B, describe the Circle ABE; for that will touch the other Circle EK, and pass through both the Points A, B. Q. E. F.

PROBLEM

PROBLEM XLVI.

To describe a Circle through a given Point which shall touch a given Circle, and also a right Line, both given in Position. [See Fig. 58.]

Let the Circle to be described be BD, its Center C, and B a Point through which it is to be described, and AD the right Line which it shall touch; the Point of Contact D, and the Circle which it shall touch GEM, its Center F, and its Point of Contact E. Join CB, CD, CF, and CD will be perpendicular to AD, and CF will cut the Circles in the Point of Contact E. Produce CD to Q, so that DQ shall be = EF, and through Q draw QN parallel to AD. Lastly, from B and F to AD and QN, let fall the Perpendiculars BA, FN; and From C to AB and FN let fall the Perpendiculars CK, CL. And since BC is = CD or AK, BK will be (= AB — AK) = AB — BC, and consequently $BK^q = AB^q - 2AB \times BC + BC^q$. Subtract this from BC^q, and there will remain $2AB \times BC - AB^q$ for the Square of CK. Therefore $AB \times \overline{2BC - AB}$ is $= CK^q$; and for the same Reason it will be $FN \times \overline{2FC - FN} = CL^q$, and consequently $\frac{CK^q}{AB} + AB = 2BC$, and $\frac{CL^q}{FN} + FN = 2FC$. Wherefore, if for AB, CK, FN, KL, and CL, you write a, y, b, c, and $c - y$, you will have $\frac{yy}{2a} + \frac{1}{2}a = BC$, and $\frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b = FC$. From FC take away BC, and there will remain $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$.

Now, if the Points, where FN being produced cuts the right Line AD and the Circle GEM, be marked with the Letters H, G, and M, and upon HG produced you take HR = AB, since HN (= DQ = EF) is = GF, by

by adding FH on both Sides, you will have FN = GH, and conſequently AB — FN (= HR — GH) = GR, and AB — FN + 2EF; that is, $a - b + 2EF = RM$, and $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Wherefore, ſince above EF was $= \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$, if this be written for EF you will have $\frac{1}{2}RM = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} - \frac{yy}{2a}$. Call therefore RM, d; and d will be $= \frac{cc - 2cy + yy}{b} - \frac{yy}{a}$. Multiply all the Terms by a and b, and there will ariſe $abd = acc - 2acy + ayy - byy$. Take away from both Sides $acc - 2acy$, and there will remain $abd - acc + 2acy = ayy - byy$. Divide by $a - b$, and there will ariſe $\frac{abd - acc + 2acy}{a - b} = yy$. And extracting the Root, $y = \frac{ac}{a - b} \pm \sqrt{\frac{aabd - abbd + abcc}{aa - 2ab + bb}}$.

Which Concluſions may be thus abbreviated; make $c : b :: d : e$, then $a - b : a :: c : f$; and $fe - fc + 2fy$ will be $= yy$, or $y = f \pm \sqrt{ff + fe - fc}$. Having found y or KC or AD, take $AD = f \pm \sqrt{ff + fe - fc}$, and at D erect the Perpendicular DC $(= BC) = \frac{KC^q}{2AB} + \frac{1}{2}AB$; and from the Center C, at the Interval CB or CD, deſcribe the Circle BDE, for this paſſing through the given Point B, will touch the right Line AD in D, and the Circle GEM in E. Q. E. F.

Hence alſo a Circle may be deſcribed which ſhall touch two given Circles, and a right Line in a Poſition. [See Fig. 59.] For let the given Circles RT, SV, their Centers B, F, and the right Line given in Poſition PQ. From the Center F, with the Radius

FS — BR, deſcribe the Circle EM. From the Point B to the right Line PQ let fall the Perpendicular BP, and having produced it to A, ſo that PA ſhall be = BR, through A draw AH parallel to PQ, and deſcribe a Circle which ſhall paſs through the Point B, and touch the right Line AH and the Circle EM. Let its Center be C, join BC, cutting the Circle RT in R; and the Circle RS deſcribed from the ſame Center C, and the Radius CR will touch the Circles RT, SV, and the right Line PQ, as is manifeſt by the Conſtruction.

PROBLEM XLVII.

To deſcribe a Circle that ſhall paſs through a given Point, and touch two other Circles given in Poſition and Magnitude. [See Fig. 60.]

Let the given Point be A, and let the Circles given in Magnitude and Poſition be TIV, RHS, their Centers C and B; the Circle to be deſcribed AIH, its Center D, and the Points of Contact I and H. Join AB, AC, AD, DB, and let AB produced cut the Circle RHS in the Points R and S, and AC produced, cut the Circle TIV in T and V. And having from the Points D and C let fall the Perpendiculars DE to AB, and DF to AC meeting AB in G, and CK to AB; in the Triangle ADB, it will be $AD^q - DB^q + AB^q = 2AE \times AB$, by the 13 of the 2 Elem. But $DB = AD + BR$, and conſequently $DB^q = AD^q + 2AD \times BR + BR^q$. Take away this from $AD^q + AB^q$, and there will remain $AB^q - 2AD \times BR - BR^q$ for $2AE \times AB$. Moreover, $AB^q - BR^q$ is $= \overline{AB - BR} \times \overline{AB + BR} = AR \times AS$. Wherefore, $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. And $\frac{AR \times AS - 2AB \times AE}{BR} = 2AD$.

And

And by a like reaſoning in the Triangle ADC, there will come out again $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Wherefore $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. And $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$. And $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} \times \frac{CT}{2AC} = AF$. Whence ſince it is $AK : AC :: AF : AG$, AG will be $= \frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} \times \frac{CT}{2AK}$. Take away this from AE, or $\frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, and there will remain $GE = \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$. Whence ſince it is $KC : AK :: GE : DE$; DE will be $= \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2KC}$. Upon AB take AP, which let be to AB as CT to BR, and $\frac{2PAE}{CT}$ will be $= \frac{2BAE}{BR}$, and ſo $\frac{2PK \times AE}{CT} = \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT}$, and ſo $DE = \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2PK \times AE}{CT} \times \frac{CT}{2KC}$. Upon AB erect the Perpendicular $AQ = \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} \times \frac{CT}{2KC}$,

and in it take $QO = \frac{PK \times AE}{KC}$, and AO will be $= DE$.

Join DO, DQ, and CP, and the Triangles DOQ, CKP, will be ſimilar, becauſe their Angles at O and K are right ones, and the Sides (KC : PK :: AE, or DO : QO) proportional. Therefore the Angles OQD, KPC, are equal, and conſequently QD is perpendicular to CP. Wherefore if AN be drawn parallel to CP, and meeting QD in N, the Angle ANQ will be a right one, and the Triangles AQN, PCK, ſimilar; and conſequently PC : KC :: AQ : AN. Whence ſince AQ is $\sqrt{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, AN will be $\sqrt{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2PC}$. Produce AN to M, ſo that NM ſhall be $=$ AN, and AD will be $=$ DM, and conſequently the Circle will paſs through the Point M.

Since therefore the Point M is given, there follows this Reſolution of the Problem, without any farther Analyſis.

Upon AB take AP, which muſt be to AB as CT to BR; join CP, and draw parallel to it AM, which ſhall be to $\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}$, as CT to PC; and by the Help of the forty-fifth Problem, deſcribe through the Points A and M the Circle AIHM, which ſhall touch either of the Circles TIV, RHS, and the ſame Circle ſhall touch both. Q. E. F.

And hence alſo a Circle may be deſcribed, which ſhall touch three Circles given in Magnitude and Poſition. For let the Radii of the given Circles be A, B, C, and their Centers D, E, F. From the Centers E and F, with

with the Radii B $\pm$ A and C $\pm$ A deſcribe two Circles, and let a third Circle which touches theſe two be alſo deſcribed, and let it paſs through the Point D; let its Radius be G, and its Center H, and a Circle deſcribed on the ſame Center H, with the Radius G $\pm$ A, ſhall touch the three former Circles, as was required.

PROBLEM XLVIII.

If at the Ends of the Thread D A E, *moving upon the fixed Tack* A, *there are hanged two Weights* D *and* E, *whereof the Weight* E *ſlides through the oblique Line* B G; *to find the Place of the Weight* E, *where theſe Weights are in Æquilibrio.* [See Fig. 63.]

Suppoſe the Problem done, and parallel to A D draw E F, which let be to A E as the Weight E to the Weight D. And from the Points A and F to the Line B G let fall the Perpendiculars A B, F G. Now ſince the Weights are, by Suppoſition, as the Lines A E and E F, expreſs thoſe Weights by thoſe Lines, the Weight D by the Line E A, and the Weight E by the Line E F. Therefore the Body E, directed by the Force of its own Weight E F, tends towards F, and by the oblique Force E G tends towards G. And the ſame Body E by the direct Force A E of the Weight D is drawn towards A, and by the oblique Force B E is drawn towards B. Since therefore the Weights ſuſtain each other in Æquilibrio, the Force by which the Weight E is drawn towards B, ought to be equal to the contrary Force by which it tends towards G, that is, B E ought to be equal to E G. But now the Ratio of A E to E F is given by the Hypotheſis; and by reaſon of the given Angle F E G, there is alſo given the Ratio of F E to E G, to which B E is equal. Therefore there is given the Ratio of A E to B E. A B is alſo given in Length; and thence the Triangle A B E, and the Point E will eaſily be given, viz make A B $= a$, B E $= x$, and A E will be $= \sqrt{aa + xx}$; moreover, let A E be to B E in the given Ratio of d to e, and

$$\frac{e\sqrt{aa + xx}}{}$$

$c\sqrt{aa+xx}$ will be $=dx$. And the Parts of the Equation being squared and reduced, $eeqa = ddxx - eexx$; or $\frac{ea}{\sqrt{dd-ee}} = x$. Therefore the Length BE is found, which determines the Place of the Weight E. Q. E. F.

But if both Weights deſcend by oblique Lines, the Computation may be made thus. [See Fig. 64.] Let CD and BE be oblique Lines given in Poſition, through which thoſe Weights D and E deſcend. From the fixed Tack A to theſe Lines let fall the Perpendiculars AC, AB, and let the Lines EG, DH, erected from the Weights perpendicularly to the Horizon, meet them in the Points G and H; and the Force by which the Weight E endeavours to deſcend in a perpendicular Line; that is, the whole Gravity of E, will be to the Force by which the ſame Weight endeavours to deſcend in the oblique Line BE, as GE to BE; and the Force by which it endeavours to deſcend in the oblique Line BE, will be to the Force by which it endeavours to deſcend in the Line AE, that is, to the Force by which the Thread AE is diſtended or ſtretched, as BE to AE. And conſequently the Gravity of E will be to the Tenſion of the Thread AE, as GE to AE. And by the ſame reaſon the Gravity of D will be to the Tenſion of the Thread AD, as HD to AD. Let therefore the Length of the whole Thread DA + AE be c, and let its Part AE be $= x$, and its other Part AD will be $= c - x$. And becauſe $AE^q - AB^q$ is $= BE^q$, and $AD^q - AC^q = CD^q$; let moreover, AB be $= a$, and AC $= b$, and BE will be $= \sqrt{xx - aa}$, and CD $= \sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$. Farther, ſince the Triangles BEG, CDH, are given in Specie, let BE : EG :: f : E, and CD : DH :: f : g, and EG will be $= \frac{E}{f}\sqrt{xx - aa}$, and DH $= \frac{g}{f}\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$. Wherefore ſince GE : AE :: Weight

: Weight E : Tenſion of AE; and HD : AD :: Weight D : Tenſion of AD; and thoſe Tenſions are equal, you will have $\frac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}}$ = Tenſion of AE = the Tenſion AD = $\frac{Dc-Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}}$; from the Reduction of which Equation there comes out $gxx\sqrt{xx-2cx+cc-bb} = Dc-Dx\sqrt{xx-aa}$,

or $-\frac{gg}{DD}x^4 + 2gg\frac{c}{D}x^3 + \frac{+ggcc}{-ggbb} - DDcc + DDaa\ xx - 2DDcaax + DDccaa = 0$.

But if you deſire a Caſe wherein this Problem may be conſtructed by a Rule and Compaſs, make the Weight D to the Weight E as the Ratio $\frac{BE}{EG}$ to the Ratio $\frac{CD}{DH}$, and g will become $= D$ (a); and ſo in the Room of the precedent Equation you will have this, $-\frac{aa}{bb}xx - 2acx + aaacc = 0$, or $x = \frac{ac}{a+b}$.

Prob. XLVIII. (a) For $\frac{BE}{EG} = \frac{f}{E}$, and $\frac{CD}{DH} = \frac{f}{g}$, and $\frac{f}{E} : \frac{f}{g} :: D : E$; whence $\frac{Df}{g} = f$; whence $D = g$.

PROBLEM XLIX.

If on the String DACBF, *that ſlides about the two Tacks* A *and* B, *there are hung three Weights,* D, E, F; D *and* F *at the Ends of the String, and* E *at its middle Point* C, *placed between the Tacks: From the given Weights and Poſition of the Tacks, to find the Situation of the Point* C, *where the middle Weight hangs, and where they are in Æquilibrio.* [See Fig. 65.]

Since the Tenſion of the Thread AC is equal to the Tenſion of the Thread AD, and the Tenſion of the Thread BC to the Tenſion of the Thread BF, the Tenſions of the Strings or Threads AC, BC, EC, will be as the Weights D, E, F. Then take the Parts of the Thread CG, CH, CI, in the ſame Ratio as the Weights. Compleat the Triangle GHI. Produce IC till it meet GH in K, and GK will be = KH, and CK = $\frac{1}{2}$ CI, and conſequently C the Center of Gravity of the Triangle GHI. For, draw PQ through C, perpendicular to CE; and perpendicular to that, from the Points G and H, draw GP, HQ. And if the Force by which the Thread AC by the Force of the Weight D draws the Point C towards A, be expreſſed by the Line GC, the Force by which that Thread will draw the ſame Point towards P, will be expreſſed by the Line CP; and the Force by which it draws it towards K, will be expreſſed by the Line GP. And in like manner, the Forces by which the Thread BC, by means of the Weight F, draws the ſame Point C towards B, Q, and K, will be expreſſed by the Lines CH, CQ, and HQ; and the Force by which the Thread CE, by means of the Weight E, draws that Point C towards E, will be expreſſed by the Line CI. Now ſince the Point C is ſuſtained in Æquilibrio by equal Forces, the Sum of the Forces by which the Threads AC and BC do together draw C towards K, will be equal to the contrary Force by which the Thread EC draws that Point towards E; that is, the Sum GP + HQ will be equal to CI; and the Force by which the Thread AC draws the Point C

towards P, will be equal to the contrary Force by which the Thread BC draws the ſame Point C towards Q; that is, the Line PC is equal to the Line CQ. Wherefore, ſince PG, CK, and QH are parallel, GK will be alſo = KH, and CK $\left(=\frac{GP+HQ}{2}\right)$ $= \frac{1}{2}$ CI. Which was to be ſhewn. It remains therefore to determine the Triangle GCH, whoſe Sides GC and HC are given, together with the Line CK, which is drawn from the Vertex C to the Middle of the Baſe. Let fall therefore from the Vertex C to the Baſe CH the Perpendicular CL, and $\frac{GCq-CHq}{2GH}$ will be = $KL = \frac{GCq-KCq-GKq}{2GK}$. For 2GK write GH, and having rejected the common Diviſor GH, and ordered the Terms, you will have $GCq - 2KCq + CHq = 2GKq$, or $\sqrt{\frac{1}{2}GCq - KCq + \frac{1}{2}CHq} = GK$. Having found GK, or KH, there are given together the Angles GCK, KCH, or DAC, FBC. Wherefore, from the Points A and B in theſe given Angles DAC, FBC, draw the Lines AC, BC, meeting in the Point C; and C will be the Point ſought.

But it is not always neceſſary to ſolve Queſtions that are of the ſame Kind, particularly by Algebra, but from the Solution of one of them you may moſt commonly infer the Solution of the other. As if now there ſhould be propoſed this Queſtion.

The Thread ACDB *being divided into the given Parts* AC, CD, DB, *and its Ends being faſtened to the two Tacks given in Poſition,* A *and* B; *and if at the Points of Diviſion,* C *and* D, *there are hanged the two Weights* E *and* F; *from the given Weight* F, *and the Situation of the Points* C *and* D, *to know the Weight* E. [See Figure 66.]

From the Solution of the former Problem the Solution of this may be eaſily enough found. Produce the

Lines AC, BD, till they meet the Lines DF, CE, in G and H; and the Weight E will be to the Weight F as DG to CH.

And hence, by the bye, may appear a Method of making a Balance of only Threads, by which the Weight of any Body E may be known, from only one given Weight F.

PROBLEM L.

A Stone falling down into a Well, from the Sound of the Stone ſtriking the Bottom, to determine the Depth of the Well.

Let the Depth of the Well be x, and if the Stone deſcends with an uniformly accelerated Motion through any given Space a in any given Time b, and the Sound paſſes with an uniform Motion through the ſame given Space a in the given Time d, the Stone will deſcend through the Space x in the Time $b\sqrt{\frac{x}{a}}$; but the Sound which is cauſed by the Stone ſtriking upon the Bottom of the Well, will aſcend through the ſame Space x, in the Time $\frac{dx}{a}$. For the Spaces deſcribed by deſcending heavy Bodies, are as the Squares of the Times of Deſcent; or the Roots of the Spaces, that is, $\sqrt{x}$ and $\sqrt{a}$ are as the Times themſelves. And the Spaces x and a, through which the Sound paſſes, are as the Times of Paſſage. And the Sum of theſe Times $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, and $\frac{dx}{a}$, is the Time of the Stone's falling to the Return of the Sound. This Time may be known by Obſervation. Let it be t, and you will have $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$. And $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. And the Parts being ſquared $\frac{bbx}{a} =$

$tt -$

$tt - \frac{2tdx}{a} + \frac{ddxx}{aa}$. And by Reduction $xx = \frac{2adt + abb}{dd} x - \frac{aatt}{dd}$. And having extracted the Root $x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{ab}{2dd} \times \sqrt{bb + 4dt}$.

Problem LI.

Having given the Globe A, *and the Position of the Wall* D E, *and* B D *the Distance of the Center of the Globe* B *from the Wall; to find the Bulk of the Globe* B, *on this Condition, that if the Globe* A (*whose Center is in the Line* B D, *which is perpendicular to the Wall, and produced out beyond* B), *be moved in free absolute Space, and where Gravity cannot act, with an uniform Motion towards* D, *until it strikes against the other quiescent Globe* B; *and that Globe* B, *after it is reflected from the Wall, shall meet the Globe* A *in the given Point* C. [See Fig. 81.]

Let the Velocity of the Globe A before Reflection be a, and by Problem XII. p. 192. the Velocity of the Globe A will be after Reflection $= \frac{aA - aB}{A + B}$, and the Velocity of the Globe B after Reflection will be $= \frac{2aA}{A + B}$. Therefore the Velocity of the Globe A to the Velocity of the Globe B, is as A — B to 2 A. On G D take $gD = GH$, viz. to the Diameter of the Globe B, and those Velocities will be as G C to $Gg + gC$. For when the Globe A struck upon the Globe B, the Point G, which being on the Surface of the Globe B, is moved in the Line A D, will go through the Space Gg before that Globe B shall strike against the Wall, and through the Space gC after it is reflected from the Wall; that is, through the whole Space $Gg + gC$, in the same Time wherein the Point F of the

Globe A ſhall paſs through the Space G C, ſo that both Globes may again meet and ſtrike one another in the given Point C. Wherefore, ſince the Intervals B C and C D are given, make B C = m, B D + C D = n, and B G = x, and G C will be = $m + x$, and Gg + gC = G D + D C − 2gD = G B + B D + D C − 2 G H = $x + n - 4x$, or = $n - 3x$. Above you had A − B to 2 A, as the Velocity of the Globe A to the Velocity of the Globe B, and the Velocity of the Globe A to the Velocity of the Globe B, as G C to Gg + gC, and conſequently A − B to 2 A, as G C to Gg + gC; therefore ſince G C is = $m + x$, and Gg + gC = $n - 3x$, A − B will be to 2 A as $m + x$ to $n - 3x$. Moreover, the Globe A is to the Globe B, as the Cube of its Radius A F to the Cube of the others Radius G B; that is, if you make the Radius A F to be s, as s^3 to x^3; therefore $s^3 - x^3 : 2s^3$ (:: A − B : 2 A) :: $m + x : n - 3x$. And multiplying the Means and Extreams by one another, you will have this Equation, $s^3 n - 3s^3 x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2s^3 x$. And by Reduction, $3x^4 - nx^3 - 5s^3 x \overset{+s^3 n}{-2s^3 m} = 0$. From the Conſtruction of which Equation there will be given x, the Semi-diameter of the Globe B; which being given, that Globe is alſo given. Q. E. F.

But note, when the Point C lies on contrary Sides of the Globe B, the Sign of the Quantity 2m muſt be changed, and written $3x^4 - nx^3 - 5s^3 x \overset{+s^3 n}{+2s^3 m} = 0$.

If the Globe B were given, and the Globe A ſought on this Condition, that the two Globes, after Reflection, ſhould meet in C, the Queſtion would be eaſier; viz. in the laſt Equation found, x would be ſuppoſed to be given, and s to be ſought. Whereby, by a due Reduction of that Equation, the Terms $-5s^3 x + s^3 n - 2s^3 m$ being tranſlated to the contrary Side of the Equation, and each Part

Part divided by $5x - n + 2m$, there would come out $\frac{\frac{1}{3}x^4 - nx^3}{5x - n + 2m} = s^3$. Where s will be obtained by the bare Extraction of the Cube Root.

But if both Globes being given, you were to find the Point C, in which both would fall upon one another after Reflection: Since above it was A — B to 2 A as GC to $Gg + gC$, therefore by Inversion and Compoſition 3 A — B will be to A — B as 2 Gg to the ſought Diſtance GC.

PROBLEM LII.

If two Globes, A and B, are joined together by a ſmall Thread PQ, *and the Globe* B *hanging on the Globe* A; *if you let fall the Globe* A, *ſo that both Globes may begin to fall together by the ſole Force of Gravity in the ſame perpendicular Line* PQ; *and then the lower Globe* B, *after it is reflected upwards from the Bottom or horizontal Plane* FG, *it ſhall meet the upper Globe* A, *as falling, in a certain Point* D: *From the given Length of the Thread* PQ, *and the Diſtance* DF *of that Point* D *from the Bottom, to find the Height* PF, *from which the upper Globe* A *ought to be let fall to cauſe this Effect.* [See Fig. 83.]

Let a be the Length of the Thread PQ. In the Perpendicular PQRF from F upwards take FE equal to QR the Diameter of the lower Globe, ſo that when the loweſt Point R of that Globe falls upon the Bottom in F, its upper Point Q ſhall poſſeſs the Place E; and let ED be the Diſtance through which that Globe, after it is reflected from the Bottom, ſhall, by aſcending, paſs, before it meets the upper falling Globe in the Point D. Therefore, by reaſon of the given Diſtance DF of the Point D from the Bottom, and the Diameter EF of the inferior Globe, there will be given their Difference DE. Let that be $= b$, and let the Height RF, or QE, which that lower Globe deſcribes by falling through it before

it touches the Bottom, be $= x$, by reaſon it is unknown. And having found x, if to it you add EF and PQ, there will be had the Height PF, from which the upper Globe ought to fall to have the deſired Effect.

Since therefore PQ is $= a$, and QE $= x$, PE will be $= a + x$. Take away DE or b, and there will remain PD $= a + x - b$. But the Time of the Deſcent of the Globe A is as the Root of the Space deſcribed in falling, or $\sqrt{a + x - b}$, and the Time of the Deſcent of the other Globe B as the Root of the Space deſcribed by its falling, or $\sqrt{x}$, and the Time of its Aſcent as the Difference of that Root, and of the Root of the Space which it would deſcribe by falling only from Q to D. For this Difference is as the Time of Deſcent from D to E, which is equal to the Time of Aſcent from E to D. But that Difference is $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Whence the Time of Deſcent and Aſcent together will be as $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Wherefore, ſince this Time is equal to the Time of Deſcent of the upper Globe, it will be $\sqrt{a + x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. the Parts of which Equation being ſquared, you will have $a + x - b = 5x - b - 4\sqrt{xx - bx}$, or $a = 4x - 4\sqrt{xx - bx}$; and the Equation being ordered, $4x - a = 4\sqrt{xx - bx}$; and ſquaring the Parts of that Equation again, there ariſes $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, or $aa = 8ax - 16bx$; and dividing all by $8a - 16b$, you will have $\frac{aa}{8a - 16b} = x$. Make therefore as $8a - 16b$ to a, ſo a to x, and you will have x or QE. Q. E. I.

But if from the given QE you are to find the Length of the Thread PQ or a; the ſame Equation $aa = 8ax - 16bx$, by extracting the affected quadratic Root, would give $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$; that is, if you

you take QY a mean Proportional between QD and QE, PQ will be $= 4$ EY. For that mean Proportional will be $\sqrt{x \times x - b}$, or $\sqrt{xx - bx}$; which ſubtracted from x, or QE, leaves EY, the Quadruple whereof is $4x - 4\sqrt{xx - bx}$.

But if from the given Quantities QE, or x, as alſo the Length of the Thread PQ, or a, there were ſought the Point D in which the upper Globe falls upon the under one; the Diſtance DE, or b, of that Point from the given Point E, will be had from the precedent Equation $aa = 8ax - 16bx$ by tranſferring aa and $16bx$ to the contrary Sides of the Equation with the Signs changed, and by dividing the whole by $16x$. For there will ariſe $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Make therefore as $16x$ to $8x - a$, ſo a to b, and you will have b or DE.

Hitherto I have ſuppoſed the Globes tied together by a ſmall Thread to be let fall together: Which if they are let fall at different Times connected by no Thread, ſo that the upper Globe A, for Example, being let fall firſt, ſhall deſcend through the Space PT before the other Globe begins to fall; and from the given Diſtances PT, PQ, and DE, you are to find the Height PF, from which the upper Globe ought to be let fall, ſo that it ſhall fall upon the inferior or lower one at the Point D; make $PQ = a$, $DE = b$, $PT = c$, and $QE = x$, and PD will be $= a + x - b$, as above. And the Times wherein the upper Globe, by falling, will deſcribe the Spaces PT and TD, and the lower Globe by falling before, and then by re-aſcending, will deſcribe the Sum of the Spaces $QE + ED$, will be as $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD} - \sqrt{PT}$, and $2\sqrt{QE} - \sqrt{QD}$; that is, as $\sqrt{c}$, $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c}$, and $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. But the two laſt Times, becauſe the Spaces TD and $QE + ED$ are deſcribed together, are equal. Therefore

fore $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. And the Parts being squared $a+c-2\sqrt{ca+cx-cb}=4x-4\sqrt{xx-bx}$. Make $a+c=e$, and $a-b=f$, and by a due Reduction it will be $4x-e+2\sqrt{cf+cx}=4\sqrt{xx-bx}$, and the Parts being squared $ee-8ex+16xx+4cf+4cx+\overline{16x-4e}\times\sqrt{cf+cx}=16xx-16bx$. And blotting out on both Sides $16xx$, and writing m for $ee+4cf$, and also writing n for $8e-16b-4c$, you will have by due Reduction $\overline{16x-4e}\times\sqrt{cf+cx}=nx-m$. And the Parts being squared you will have $256cfxx+256cx^3-128eefx-128cexx+16ceef+16ceex=nnxx-2mnx+mm$. And having ordered the Equation

$$256cx^3\begin{matrix}+256cf\\-128ce\\-nn\end{matrix}xx\begin{matrix}-128cef\\+16cee\\+2mn\end{matrix}x\begin{matrix}+6ceef\\-mm\end{matrix}=0.$$

By the Construction of which Equation x or QE will be given, to which if you add the given Distances PQ and EF, you will have the Height PF, which was to be found.

Problem LIII.

If two quiescent Globes, the upper one A *and the under one* B, *are let fall at different Times; and the lower Globe begins to fall in the same Moment that the upper one, by falling, has described the Space* PT; *to find the Places* α, β, *which those falling Globes shall occupy when their Interval or Distance* $\pi\chi$ *is given.* [See Fig. 84.]

Since the Distances PT, PQ, and $\pi\chi$ are given, call the first a, the second b, the third c, and for Pπ, or the Space that the superior Globe describes by falling before it comes to the Place sought α, put x. Now the Times wherein the upper Globe describes the Spaces PT, Pπ, Tπ, and the lower one the Space Qχ, are as $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\pi}$, $\sqrt{P\pi}-\sqrt{PT}$, and $\sqrt{Q\chi}$. The latter

latter two of which Times, becauſe the Globes by falling together deſcribe the Spaces $T\pi$ and $Q\chi$, are equal. Whence alſo $\sqrt{P\pi} - \sqrt{PT}$ will be equal to $\sqrt{Q\chi}$. $P\pi$ was $= x$, and $PT = a$, and by adding $\pi\chi$, or c, to $P\pi$, and ſubtracting PQ, or b, from the Sum, you will have $Q\chi = x + c - b$. Wherefore ſubſtituting theſe, you will have $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x + c - b}$. And ſquaring both Sides of the Equation, there will ariſe $x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b$. And blotting out on both Sides x, and ordering the Equation, you will have $a + b - c = 2\sqrt{ax}$. And having ſquared the Parts, the Square of $a + b - c$ will be $= 4ax$, and that Square divided by $4a$ will be $= x$, or $4a$ will be to $a + b - c$ as $a + b - c$ is to x. But from x found, or $P\pi$, there is given the Place ſought, viz. α of the ſuperior Globe. And by the Diſtance of the Places, there is alſo given the Place of the lower one β.

And hence, if you were to find the Point where the upper Globe, by falling, will at length fall upon the lower one; by putting the Diſtance $\pi\chi = 0$, or by extirpating c, ſay $4a$ is to $a + b$ as $a + b$ is to x, or $P\pi$, and the Point π will be that ſought.

And reciprocally, if that Point π, or χ, in which the upper Globe falls upon the under one, be given and you are to find the Place T which the lower Point P of the upper falling Globe poſſeſſed, or was then in when the lower Globe began to fall; becauſe $4a$ is to $a + b$ as $a + b$ is to x; or multiplying the Means and Extremes together, $4ax = aa + 2ab + bb$, and by due ordering of the Equation $aa = 4ax - 2ab - bb$; extract the Square Root and you will have $a = 2x - b - 2\sqrt{xx - bx}$. Take therefore $V\pi$, a mean Proportional between $P\pi$ and $Q\pi$, and towards V take $VT = VQ$, and T will be the Point you ſeek. For $V\pi$ will be $= \sqrt{P\pi \times Q\pi}$, that is $= \sqrt{x \times x - b}$, or $= \sqrt{xx - bx}$; the double whereof ſubtracted from $2x - b$, or from $2P\pi - PQ$, that is, from $PQ + 2Q\pi$.

$2\,Q\pi$, leaves $PQ - 2VQ$, or $PV - VQ$, that is, PT.

If, laſtly, the lower of the Globes, after the upper has fallen upon the lower, and the lower, by their Shock upon one another, is accelerated, and the ſuperior one retarded, the Places are required where, in falling, they ſhall acquire a Diſtance equal to a given right Line. In the firſt Place you muſt ſeek the Place where the upper one falls upon the lower one; then from the known Magnitudes of the Globes, as alſo from their Celerities where they fall on each other, you muſt find the Celerities they ſhall have immediately after Reflection, after the ſame Way as in Prob. XII. p. 192. Afterwards you muſt find the higheſt Places to which the Globes with theſe Celerities, if they were carried upwards, would aſcend, and thence the Spaces will be known, which the Globes will deſcribe by falling in any given Times after Reflection, as alſo the Difference of the Spaces; and reciprocally from that Difference aſſumed, you may go back analytically to the Spaces deſcribed in falling.

As if the upper Globe falls upon the lower one at the Point π, [See Fig. 85.] and after Reflection, the Celerity of the upper one downwards be ſo great, as if it were upwards, it would cauſe that Globe to aſcend through the Space πN; and the Celerity of the lower one downwards was ſo great, as that, if it were upwards, it would cauſe the lower one to aſcend through the Space πM; then the Times wherein the upper Globe would reciprocally deſcend through the Spaces $N\pi$, NG, and the inferior one through the Spaces $M\pi$, MH, would be as $\sqrt{N\pi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\pi}$, $\sqrt{MH}$; and conſequently the Times wherein the upper Globe would run the Space πG, and the lower one πH, would be as $\sqrt{NG} - \sqrt{N\pi}$, to $\sqrt{MH} - \sqrt{M\pi}$. Make thoſe Times equal, and $\sqrt{NG} - \sqrt{N\pi}$ will be $= \sqrt{MH} - \sqrt{M\pi}$. And, moreover, ſince there is given the Diſtance GH, put $\pi G + GH = \pi H$. And by the Reduction of theſe two Equations, the Problem will be ſolved. As if $M\pi$ is $= a$, $N\pi = b$, $GH = c$, $\pi G = x$, you will have, according

according to the latter Equation, $x + c = \pi H$. Add $M\pi$, you will have $MH = a + c + x$. To πG add $N\pi$, and you will have $NG = b + x$. Which being found, according to the former Equation, $\sqrt{b+x} - \sqrt{b}$ will be $= \sqrt{a+c+x} - \sqrt{a}$. Write e for $a + c$, and $\sqrt{f}$ for $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, and the Equation will become $\sqrt{b+x} = \sqrt{e+x} - \sqrt{f}$. And the Parts being squared $b + x = e + x + f - 2\sqrt{ef+fx}$, or $e + f - b = 2\sqrt{ef+fx}$. For $e + f - b$ write g, and you will have $g = 2\sqrt{ef+fx}$, and the Parts being squared, $gg = 4ef + 4fx$, and by Reduction $\frac{gg}{4f} - e = x$.

PROBLEM LIV.

If there are two Globes, A, B, *whereof the upper one* A *falling from the Height* G, *ſtrikes upon another lower one* B *rebounding from the Ground* H *upwards; and theſe Globes ſo part from one another by Reflection, that the Globe* A *returns by Force of that Reflection to its former Altitude* G, *and that in the ſame Time that the lower Globe* B *returns to the Ground* H; *then the Globe* A *falls again, and ſtrikes again upon the Globe* B, *rebounding again back from the Ground; and after this Rate the Globes always rebound from one another and return to the ſame Place: From the given Magnitude of the Globes, the Poſition of the Ground, and the Place* G *from whence the upper Globe falls, to find the Place where the Globes ſhall ſtrike upon each other.* [See Fig. 86.]

Let e be the Center of the Globe A, and f the Center of the Globe B, d the Center of the Place G wherein the upper Globe is in its greateſt Height, g the Center of the Place of the lower Globe where it falls on the Ground; a the Semi-diameter of the Globe A, b the Semi-diameter of the Globe B, c the Point of Contact of the Globes falling upon one another, and H the Point of Contact of the lower Globe and the Ground. And the

the Celerity of the Globe A, where it falls on the Globe B, will be the ſame which is generated by the Fall of the Globe from the Height de, and conſequently is as $\sqrt{de}$. With this ſame Celerity the Globe A ought to be reflected upwards, that it may return to its former Place G. And the Globe B ought to be reflected with the ſame Celerity downwards wherewith it aſcended, that it may return in the ſame Time to the Ground it took up in mounting from it. And that both theſe may come to paſs, the Motion of the Globes in reflecting ought to be equal. But the Motions are compounded of the Celerities and Magnitudes together, and conſequently the Product of the Bulk and Celerity of one Globe will be equal to the Product of the Bulk and Celerity of the other. Whence, if the Product of the Bulk and Celerity of one Globe be divided by the Bulk of the other Globe, you will have the Celerity of the other juſt before and after Reflection, or at the End of the Aſcent, and at the Beginning of the Deſcent. Therefore this Celerity will be as $\frac{A\sqrt{de}}{B}$, or ſince the Globes are as the Cubes of the Radii as $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. But as the Square of this Celerity to the Square of the Celerity of the Globe A juſt before Reflection, ſo is the Height to which the Globe B would aſcend with this Celerity, if it was not hindered by meeting the Globe A falling upon it, to the Height ed from which the Globe B deſcends. That is, as $\frac{Aq}{Bq}de$ to de, or as Aq to Bq, or a^6 to b^6, ſo that firſt Height to x, if you put x for the latter Height cd. Therefore this Height, viz. to which B would aſcend, if it was not hindered, is $\frac{a^6}{b^6}x$. Let that be fK. To fK add fg, or $dH - de - ef - gH$; that is, $p - x$, if for the given $dH - ef - gb$ you write p, and x for the unknown de; and you will have $Kg = \frac{a^6}{b^6}x + p - x$. Whence the Celerity of the Globe B,

when

when it falls from K to the Ground, that is, when it falls through the Space K g, which its Center would deſcribe in falling, will be as $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x+p}-x$. But that Globe falls from the Place B cf to the Ground in the ſame Time that the upper Globe A aſcends from the Place A ce to its greateſt Height d, or on the other Hand falls from d to the Place A ce; and therefore ſince the Celerities of falling Bodies are equally augmented in equal Times, the Celerity of the Globe B, by falling to the Ground, will be augmented as much as is the whole Celerity which the Globe A acquires by falling in the ſame Time from d to e, or loſes by aſcending from e to d. Therefore, to the Celerity which the Globe B has in the Place B cf, add the Celerity which the Globe A has in the Place A ce, and the Sum, which is as $\sqrt{de}+\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, or $\sqrt{x}+\frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, will be the Celerity of the Globe B when it falls on the Ground. Therefore $\sqrt{x}+\frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$ will be equal to $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x+p}-x$. For $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ write $\frac{r}{s}$, and for $\frac{a^6-b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$, and then Equation will become $\frac{r}{s}\sqrt{x}=\sqrt{\frac{rt}{ss}x+p}$, and the Parts being ſquared, $\frac{rr}{ss}x=\frac{rt}{ss}x+p$. Subtract from both Sides $\frac{rt}{ss}x$, multiply all into ss, and divide by $rr-rt$, and there will ariſe $x=\frac{ssp}{rr-rt}$. Which Equation would have come out more ſimple, if I had taken $\frac{p}{s}$ for $\frac{a^3+b^3}{b^3}$, for there would have come out

$$\frac{ss}{p-s}$$

$\frac{ss}{p-t} = x$. Whence making, that $p - t$ ſhall be to t as s to x, you will have x, or ed; to which if you add ecc, you will have dc; and the Point c, in which the Globes ſhall fall upon one another. Q. E. F.

PROBLEM LV.

Three Staves being erected, or ſet up an End, in ſome certain Part of the Earth perpendicular to the Plane of the Horizon, in the Points A, B, *and* C, *whereof that which is in* A *is ſix Feet long, that in* B *eighteen, and that in* C *eight, the Line* AB *being thirty Feet long; it happens on a certain Day in the Year that the End of the Shadow of the Staff* A *paſſes through the Points* B *and* C, *and of the Staff* B *through* A *and* C, *and of the Staff* C *through the Point* A. *To find the Sun's Declination, and the Elevation of the Pole, or the Day and Place where this ſhall happen.* [See Fig. 61.]

Becauſe the Shadow of each Staff deſcribes a conic Section, or the Section of a luminous Cone, whoſe Vertex is the Top of the Staff; I will feign BCDEF to be ſuch a Curve, (whether it be an Hyperbola, Parabola, or Ellipſe) as the Shadow of the Staff A deſcribes that Day, by putting AD, AE, AF, to have been its Shadows, when BC, BA, CA, were reſpectively the Shadows of the Staves B and C. And beſides I will ſuppoſe PAQ to be the meridional Line, or the Axis of this Curve, to which the Perpendiculars BM, CH, DK, EN, and FL, being let fall, are Ordinates. And I will denote theſe Ordinates indefinitely by the Letter y, and the intercepted Parts of the Axis AM, AH, AK, AN, and AL, by the Letter x. I will ſuppoſe, laſtly, the Equation $aa + bx + cxx = yy$, to expreſs the Relation of x and y, (*i. e.* the Nature of the Curve) aſſuming a a, b, and c, as known Quantities, as they will be found to be from the Analyſis. Where I made the unknown Quantities of two Dimenſions only, becauſe the Equation is to expreſs a conic Section: And I omitted

omitted the odd Dimensions of y, because it is an Ordinate to the Axis. And I denoted the Signs of b and c, as being indeterminate by the Note $\perp$, which I use indifferently for $+$ or $-$, and its opposite $\mp$ for the contrary. But I made the Sign of the Square aa affirmative, because the concave Part of the Curve necessarily contains the Staff A, projecting its Shadows to the opposite Parts (C and F, D and E); and therefore if at the Point A you erect the Perpendicular $A\beta$, this will somewhere meet the Curve, suppose in β, that is, the Ordinate y, where x is nothing, will still be real. From thence it follows that its Square, which in that Case is aa, will be affirmative.

It is manifest therefore, that this fictitious Equation $aa \perp bx \perp cxx = yy$, as it is not filled with superfluous Terms, so neither is it more restrained than what is capable of satisfying all the Conditions of this Problem, and will denote the Hyperbola, Ellipse, or Parabola, according as the Values of aa, b, c, shall be determined, or perhaps found to be nothing. But what may be their Values, and with what Signs b and c are to be affected, and thence what Sort of a Curve this may be, will be manifest from the following Analysis.

The former Part of the Analysis.

Since the Shadows are as the Altitudes of the Staves, you will have BC : AD :: AB : AE (:: 18 : 6) :: 3 : 1. Also CA : AF (:: 8 : 6) :: 4 : 3. Wherefore naming AM $= r$, MB $= s$, AH $= t$, and HC $= \perp v$. From the Similitude of the Triangles AMB, ANE, and AHC, ALF, AN will be $= -\frac{r}{3}$. NE $= \mp\frac{s}{3}$. AL $= -\frac{3t}{4}$, and LF $= \mp\frac{3v}{4}$ (*a*); whose Signs I put

(*a*) Problem LV. AB : AM $= r$ :: AE : AN :: 3 : r :: 1 : AN, whence AN $= \frac{r}{3}$. AB : MB $= s$ :: AE

put contrary to the Signs of AM, MB, AH, HC, becauſe they tend contrary Ways with reſpect to the Point A from which they are drawn, or to the Axis PQ on which they ſtand. Now theſe being reſpectively written for x and y in the fictitious Equation $aa \perp bx \perp cxx = yy$.

r and s will give $aa \perp br \perp crr = ss$.

$-\frac{r}{3}$ and $-\frac{s}{3}$ will give $aa + \frac{br}{3} \perp \frac{1}{9} crr = \frac{1}{9} ss$.

t and $\perp v$ will give $aa \perp bt \perp ctt = vv$.

$-\frac{3}{4}t$ and $+\frac{3}{4}v$ will give $aa + \frac{3}{4}bt \perp \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv$.

Now, by exterminating ss from the firſt and ſecond Equations, in order to obtain r, there comes out $\frac{2aa}{\perp b} = r$ (*b*). Whence it is manifeſt, that $\perp b$ is affirmative. Alſo by exterminating vv from the third and fourth, to obtain t, there comes out $\frac{aa}{3b} = t$ (*c*). And having

---

:: AE : NE :: 3 : s :: 1 : NE, whence NE $= \frac{s}{3}$. CA : AH $= t$ :: FA : AL :: 4 : t :: 3 : AL, whence AL $= \frac{3t}{4}$. AC : HC $= v$ :: FA : FL :: 4 : v :: 3 : FL, whence FL $= \frac{3v}{4}$.

(*b*) For $\perp br = 8aa + 3br$, i. e. $\perp 4br - 8aa$, whence $r = \frac{2aa}{\perp b}$.

(*c*) For $9aa \perp 9bt = 16aa + 12bt$, whence $\perp 21bt = 7aa$, i. e. $\perp 3bt = aa$, or $t = \frac{aa}{\perp 3b}$.

having writ $\frac{2aa}{b}$ for r in the firſt, and $\frac{aa}{3b}$ for s in the third, there ariſe $3aa \perp \frac{4a^4c}{bb} = ss$ (*d*), and $\frac{4}{3}aa \perp \frac{a^4c}{9bb} = vv$ (*e*).

Moreover, having let fall Bλ perpendicular upon CH, BC will be : AD (:: 3 : 1) :: Bλ : AK :: Cλ : DK. Wherefore, ſince Bλ is (= AM — AH = $r - s$) = $\frac{5aa}{3b}$ (*f*), AK will be = $\frac{5aa}{9b}$ (*g*), or rather = — $\frac{5aa}{9b}$ (*b*). Alſo ſince Cλ is (= CH $\perp$ BM = $v \perp s$) = $\sqrt{\frac{4aa}{3} \perp \frac{a^4c}{9bb}} \perp \sqrt{3aa \perp \frac{4a^4c}{bb}}$, it will be DK (= $\frac{1}{3}$Cλ) = $\sqrt{\frac{4aa}{27} \perp \frac{a^4c}{81bb}} \perp \sqrt{\frac{1}{3}aa \perp \frac{4a^4c}{9bb}}$. Which being reſpectively written in the Equation $aa + bx \perp cxx = yy$, for AK and DK, or x and y, there

(*d*) By ſubſtituting $\frac{2aa}{\perp b}$ for r, $aa \perp br \perp crr = ss$ becomes $aa \perp \frac{2baa}{b} \perp \frac{4a^4c}{bb}$, i. e. $3aa \perp \frac{4a^4c}{bb} = ss$.

(*e*) But ſubſtituting $\frac{aa}{3b}$ for t, $aa \perp bt \perp ctt = vv$ becomes $aa \perp \frac{baa}{3b} \perp \frac{a^4c}{9bb}$, i. e. $\frac{4}{3}aa \perp \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

(*f*) XXV. *b*. (*g*) 147.

(*b*) As tending the contrary Way.

there comes out $\frac{4aa}{9} \perp \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27}aa \perp \frac{37a^4c}{81bb} \perp 2\sqrt{\frac{4aa}{27} \perp \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} \perp \frac{4a^4c}{9bb}}$ (*i*).

And by Reduction $-bb + 4aac = \perp 2\sqrt{36b^4 \perp 51aabbc + 4a^4cc}$; and the Parts being squared, and again reduced, there comes out $0 = 143b^4 \perp 196aabbc$, or $\frac{-143bb}{196aa} = \perp c$ (*k*).

Whence

(*i*) By substituting $-\frac{5aa}{9}$ for x, the Member $aa + bx \perp cxx$ becomes $aa - \frac{5aab}{9b} \perp \frac{25a^4c}{81bb}$ i. e. $\frac{4}{9}aa \perp \frac{25a^4c}{81bb}$; and by substituting $\sqrt{\frac{4}{27}aa \perp \frac{a^4c}{81bb}} \perp \sqrt{\frac{1}{3}aa \perp \frac{4a^4c}{9bb}}$ for y, the Member yy becomes $\left(\frac{4}{27}aa + \frac{9}{27}aa = \right)\frac{13}{27}aa \left(\perp \frac{a^4c}{81bb} + \frac{36a^4c}{81bb} = \right) \perp \frac{37a^4c}{81bb} \perp 2\sqrt{\frac{4aa}{27} \perp \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} \perp \frac{4a^4c}{9bb}}$, or $\frac{13}{27}aa \perp \frac{37a^4c}{81bb} \perp 2\sqrt{\frac{4a^4}{81} \perp \frac{17a^6c}{243bb} \perp \frac{4a^8c^2}{729bb}}$.

(*k*) By multiplying the above-mentioned Expression of the Equation of the Curve by $81bb = \sqrt{729b^4}$, and by dividing it by $a^2 = \sqrt{a^4}$, it becomes $36b^2 \perp 25a^4c = 39b^2 \perp 37a^2c \perp 2\sqrt{36b^4 \perp 51a^2b^2c \perp 4a^4c^2}$, i. e. by

Whence it is manifeſt, that $\perp c$ is negative, and conſequently the fictitious Equation $aa \perp bx \perp cxx = yy$ will be of this Form, $aa + bx - cxx = yy$. And therefore the Curve, which it denotes, is an Ellipſis; whoſe Center and two Axis are thus found.

Making $y = 0$, as happens in the Vertex's of the Figure P and Q, you will have $aa + bx = cxx$, and having extracted the Root x, $= \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}}$ $= \left\{ \begin{matrix} AQ \\ AP \end{matrix} \right\}$ (*l*).

And conſequently, taking $AV = \frac{b}{2c}$, V will be the Center of the Ellipſe, and VQ, or VP $\left(\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}}\right)$ the greateſt Semi-Axis. If, moreover, the Value of AV, or $\frac{b}{2c}$, be put for x in the Equation $aa + bx - cxx = yy$, there will come out $aa + \frac{bb}{4c} = yy$. Where-

fore

---

i. e. by Reduction and Tranſpoſition, $-b^2 + 4a^2c = \perp \sqrt{36b^4 \perp 51a^2b^2c \perp 4a^4c^2}$, this ſquared becomes $b^4 + 8a^2b^2c - 16a^4c^2 = 144b^4 \perp 20a^2b^2c - 16a^4c^2$, and by Reduction and Tranſpoſition, $0 = 143b^4 \perp 196a^2b^2c$, or, $\perp 196a^2b^2c = -143b^4$, whence $\perp c = \frac{-143b^2}{196a^2}$.

(*l*) Becauſe $y = 0$, $aa + bx - cxx = 0$, whence $xx - \frac{b}{c}x = \frac{aa}{c}$, whence $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}}$.

fore $aa + \frac{bb}{4c}$ will be $= VZq$, that is, to the Square of the leaſt Semi-Axis (m). Laſtly, in the Values of AV, VQ, and VZ already found, writing $\frac{143\,bb}{196\,aa}$ for c, there come out $\frac{98\,aa}{143\,b} = AV$, $\frac{112\,aa\sqrt{3}}{143\,b} = VQ$, and $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}} = VZ$ (n).

(m) By ſubſtituting $\frac{b}{2c}$ for x, $aa + bx - cxx = yy$ becomes $aa + \frac{bb}{2c} - \frac{bb}{4c}$, i. e. $aa + \frac{bb}{4c} = yy$.

(n) By ſubſtituting $\frac{143\,bb}{196\,aa}$ for c, $\frac{b}{2c}$ becomes $\frac{98\,aa}{143\,b} = \frac{98\,aa}{143\,b}$: Alſo $\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}}$ becomes $\frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{aa}{c}} = \frac{98\,aa}{143\,b} + \sqrt{\frac{196\,a^4}{143\,bb}} = \frac{98\,aa}{143\,b} + \frac{14\,aa}{b\sqrt{143}} = \frac{112\,aa \times 143\sqrt{143}}{b\,143\sqrt{143}} = \frac{112\,aa \times \sqrt{143} \times \sqrt{143} \times \sqrt{143}}{143\,b \times \sqrt{143}} = \frac{112\,aa\sqrt{3}}{143\,b}$: Alſo $\sqrt{aa + \frac{bb}{4c}}$ becomes $\sqrt{aa + \frac{49\,aa}{143}} = \sqrt{\frac{143\,aa + 49\,aa}{143}} = \sqrt{\frac{192\,aa}{143}} = \sqrt{\frac{64\,aa \times 3}{143}} = \frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$.

The other Part of the Analyſis. [See Fig. 62.]

Suppoſe now the Staff A R ſtanding on the Point A, and R P Q will be the Meridional Plane, and R P Z Q the luminous Cone whoſe Vertex is R. Let moreover T X Z be a Plane cutting the Horizon in V Z, and the Meridional Plane in T V X, which Section let be perpendicular to the Axis of the World, or of the Cone, and the Plane T X Z will be perpendicular to the ſame Axis, and will cut the Cone in the Periphery of the Circle T Z X, which will be every where at an equal Diſtance, as R X, R Z, R T, from its Vertex. Wherefore, if P S be drawn parallel to T X, you will have R S = R P, by reaſon of the equal Quantities R X, R T; and alſo S X = X Q, by reaſon of the equal Quantities P V, V Q; whence R X or R Z = $\left(\frac{RS + RQ}{2}\right)$ is = $\frac{RP + RQ}{2}$. Laſtly, draw R V, and ſince V Z perpendicularly ſtands on the Plane R P Q, (as being the Section of the Planes perpendicularly ſtanding on the ſame Plane) the Triangle R V Z will be right-angled at V.

Now making R A = d, A V = e, V P or V Q = f, and V Z = g, you will have A P = $f - e$, and R P = $\sqrt{ff - 2ef + ee + dd}$. Alſo A Q = $f + e$, and R Q = $\sqrt{ff + 2ef + ee + dd}$; and conſequently R Z $\left(= \frac{RP + RQ}{2}\right)$ = $\frac{\sqrt{ff - 2ef + ee + dd} + \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}}{2}$.

Whoſe Square $\frac{dd + ee + ff}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4}$ is

equal ($RVq + VZq = RAq + AVq + VZq =$) $dd + ee + gg$. Now having reduced, it is $\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4} = dd + ee - ff + 2gg$, and the Parts being ſquared and reduced into Order, $ddff = ddgg + eegg - ffgg + g^4$, or $\frac{ddff}{gg} = dd + ee - ff + gg$. Laſtly, 6, $\frac{98aa}{143b}$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, and $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (the Values of AR, AV, VQ, and VZ) being reſtored for d, e, f, and g, there ariſes $36 - \frac{196a^4}{143bb} + \frac{192aa}{143} = \frac{36 \times 14 \times 14aa}{143bb}$, and thence by Reduction $\frac{49a^4 + 36 \times 49aa}{48aa + 1287} = bb$ (*o*).

In

(*o*) By ſubſtituting 6 for d, $\frac{98aa}{143b}$ for e, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$ for f, and $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ for g; $\frac{ddff}{gg} = dd + ee - ff + gg$ becomes $36\left(+\frac{98aa}{143b} - \frac{98aa}{143b} + \frac{14aa}{b\sqrt{143}}\right.$ i. e. $\left.\frac{-14aa}{b\sqrt{143}} \times \frac{14aa}{b\sqrt{143}}\right.$ i. e.$\left.\right) - \frac{196a^4}{143bb}\left(+\frac{64aa \times 3}{143}\right.$ i. e.$\left.\right) + \frac{192aa}{143} = \left(\frac{36 \times 14 \times 14aa}{b\sqrt{143} \times b\sqrt{143}}\right.$ i. e.$\left.\right) \frac{36 \times 14 \times 14aa}{143bb}$, which by multiplying by $143bb$, and tranſpoſing, is $36 \times 143bb + 192aabb = 196a^4 + 36 \times 14 \times 14aa$; whence,

In the first Scheme $AM\,q + MB\,q$ is $= AB\,q$, that is, $rr + ss = 33 \times 33$. But r was $= \frac{2aa}{b}$, and $ss = 3aa - \frac{4a^4c}{bb}$, whence $rr = \frac{4a^4}{bb}$, and (substituting $\frac{143bb}{196aa}$ for c) $ss = \frac{4aa}{49}$. Wherefore $\frac{4a^4}{bb} + \frac{4aa}{49} = 33 \times 33$, and thence by Reduction there again results $\frac{4 \times 49a^4}{533^61 - 4aa} = bb$ (p). Putting therefore an Equality between the two Values of bb, and dividing each Part of the Equation by 49, you will have

---

whence, $bb = \frac{196a^4 + 36 \times 14 \times 14aa}{36 \times 143 + 192aa} = \frac{196a^4 + 36 \times 196aa}{192aa + 5148}$ (i. e. dividing by 4) $= \frac{49a^4 + 36 \times 49aa}{48aa + 1287}$.

(p) $rr + ss = \frac{4a^4}{bb} + 3aa - \frac{4a^4c}{bb}$ (i. e. $\frac{4a^4}{bb} + 3aa - \frac{4a^4}{bb} \times \frac{143bb}{196aa}$ i. e. $\frac{4a^4}{bb} + \frac{588a^2 - 572a^2}{196}$ i. e. $\frac{4a^4}{bb} + \frac{16aa}{196}$ i. e.) $= \frac{4a^4}{bb} + \frac{4aa}{49} = 33 \times 33$, and multiplying by $49bb$, and transposing, $49 \times 1089 - 4a^2 \times b^2 = 49 \times 4a^4$; whence $bb = \frac{49 \times 4a^4}{49 \times 1089 - 4aa} = \frac{4 \times 49a^4}{533^61 - 4aa}$.

have $\frac{a^4 + 36aa}{48aa + 1287} = \frac{4a^4}{53361 - 4aa}$ (q); whose Parts being multiplied croſs-ways, ordered and divided by 49, there comes out $4a^4 = 981aa + 39204$, whose Root aa is $\frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = 280,2254144$ (r).

Above was found $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$, or $\frac{14aa}{\sqrt{53361 - 4aa}} = b$. Whence AV $\left(\frac{98aa}{143b}\right)$ is $\frac{7\sqrt{53361 - 4aa}}{143}$, and VP or VQ $\left(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}\right)$ is $\frac{8}{143}\sqrt{160083 - 12aa}$ (s).

That

(q) $\frac{49a^4 + 36 \times 49aa}{48aa + 1287} = \frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4aa}$ and dividing by 49, $\frac{a^4 + 36aa}{1287 + 48aa} = \frac{4a^4}{53361 - 4aa}$,

(r) $a^4 - \frac{981aa}{4} = 9801$, whence $a^4 - \frac{981aa}{4} + \frac{962361}{64} \left(= \frac{962361}{64} + 9801\right) = \frac{1589625}{64}$, whence $a^2 = \frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = \frac{981 + 1260.8033149}{8} = 280.2254144$.

(s) $bb = \frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4aa} = \frac{14aa \times 14aa}{53361 - 4aa}$ whence $b = \frac{14aa}{\sqrt{53361 - 4aa}}$. AV $= \frac{98aa}{143b} =$

$98aa \times$

That is, by substituting 280,2254144 for aa, and reducing the Terms into Decimals, AV = 11,188297, and VP or VQ = 22,147085; and consequently AP (PV − AV) = 10,958788, and AQ (AV + VQ) 33,335382 (*t*).

Lastly, if ½ AR or 1 be made Radius, ½ AQ or 5,555897 will be the Tangent of the Angle ARQ of 79 gr. 47′. 48″. and ½ AP or 1,826465 the Tangent of the Angle ARP of 61 gr. 17′. 57″. Half the Sum of which Angles 70 gr. 32′. 52″. is the Complement of the Sun's Declination; and the Semi-difference 9 gr. 14′. 56″. the Complement of the Latitude of the Place. Therefore, the Sun's Declination was 19 gr. 27′. 10″. and the Latitude of the Place 80 gr. 45′. 4″. which were to be found.

$$\frac{98\,aa \times \sqrt{53361 - 4\,aa}}{143 \times 14\,aa} = \frac{7\sqrt{53361 - 4\,aa}}{143}. \quad VQ =$$

$$\frac{112\,aa\sqrt{3}}{143\,b} = \frac{112\,aa\sqrt{3} \times \sqrt{53361 - 4\,aa}}{143 \times 14\,aa} =$$

$$\frac{8\sqrt{3} \times \sqrt{53361 - 4\,aa}}{143} = \frac{8}{143}\sqrt{160083 - 12\,aa}.$$

(*t*) $AV = \frac{7\sqrt{53361 - 4 \times 280.2254144}}{143} =$

$$\frac{7 \times \sqrt{53361 - 1120.9016576}}{143} = \frac{7 \times \sqrt{52240.9016576}}{143}$$

$$= \frac{7 \times 228.582585}{143} = \frac{1600.078095}{143} = 11.188297. \quad VQ =$$

$$\frac{8\sqrt{160083 - 12 \times 280.2254144}}{143} = \frac{8 \times 395.889404}{143} =$$

$$\frac{3166.043232}{143} = 22.147085.$$

PROBLEM

PROBLEM LVI.

From the Observation of four Places of a Comet, moving with an uniform right-lined Motion through the Heavens, to determine its Distance from the Earth, and Direction and Velocity of its Motion, according to the Copernican *Hypothesis.* [See Fig. 73.]

If from the Center of the Comet in the four Places observed, you let fall so many Perpendiculars to the Plane of the Ecliptick; and A, B, C, D, be the Points in that Plane on which the Perpendiculars fall; through those Points draw the right Line AD, and this will be cut by the Perpendiculars in the same Ratio with the Line which the Comet describes by its Motion; that is, so that AB shall be to AC, as the Time between the first and second Observation to the Time between the first and third; and AB to AD, as the Time between the first and second to the Time between the first and fourth. From the Observations, therefore, there are given the Proportions of the Lines AB, AC, AD, to one another.

Moreover, let the Sun S be in the same Plane of the Ecliptick, and EH an Arch of the ecliptical Line in which the Earth moves; E, F, G, H, four Places of the Earth at the Times of the Observations, E the first Place, F the second, G the third, H the fourth. Join AE, BF, CG, DH, and let them be produced until the three latter cut the former in I, K, and L, viz. BF in I, CG in K, DH in L. And the Angle, AIB, AKC, ALD will be the Differences of the observed Longitudes of the Comet; AIB the Difference of the Longitudes of the first and second Place of the Comet; AKC the Difference of the Longitudes of the first and third Place, and ALD the Difference of the Longitudes of the first and fourth Place. There are given therefore from the Observations the Angles AIB, AKC, ALD.

Join

Join S E, S F, E F; and by reaſon of the given Points S, E, F, and the given Angle E S F, there will be given the Angle S E F. There is given alſo the Angle S E A, as being the Difference of Longitude of the Comet and Sun in the Time of the firſt Obſervation. Wherefore, if you add its Complement to two right Angles, viz. the Angle S E I to the Angle S E F, there will be given the Angle I E F. Therefore there are given the Angles of the Triangle I E F, together with the Side E F, and conſequently there is given the Side I F. And by a like Argument there are given K E and L E. There are given therefore in Poſition the four Lines A I, B I, C K, D L, and conſequently the Problem comes to this, that four Lines being given in Poſition, we may find a fifth, which ſhall be cut by theſe four in a given Ratio.

Having let fall to A I the Perpendiculars B M, C N, D O, by reaſon of the given Angle A I B there is given the Ratio of B M to M I. But B M to C N is in the given Ratio of B A and C A, and by reaſon of the given Angle C K N there is given the Ratio of C N to K N. Wherefore, there is alſo given the Ratio of B M to K N; and thence alſo the Ratio of B M to M I — K N, that is, to M N + I K. Take P to I K, as is A B to B C, and ſince M A is to M N in the ſame Ratio, P + M A will be to I K + M N in the ſame Ratio, that is, in a given Ratio. Wherefore, there is given the Ratio of B M to P + M A. And by a like Argument, if Q be taken to I L in the Ratio of A B to B D, there will be given the Ratio of B M to Q + M A. And therefore the Ratio of B M to the Difference of P + M A and Q + M A will be alſo given. But that Difference, viz. P — Q, or Q — P, is given; and therefore there will be given B M. But B M being given, there are alſo given P + M A and M I, and thence, M A, M E, A E, and the Angle E A B.

Theſe being found, erect at A a Line perpendicular to the Plane of the Ecliptick, which ſhall be to the Line B A as the Tangent of the Comet's Latitude in the firſt

Obſervation to Radius, and the End of that Perpendicular will be the Place of the Comet's Center in the firſt Obſervation. Whence the Diſtance of the Comet from the Earth is given in the Time of that Obſervation. And after the ſame Manner, if from the Point B you erect a Perpendicular which ſhall be to the Line BF as the Tangent of the Comet's Latitude in the ſecond Obſervation to Radius, you will have the Place of the Comet's Center in that ſecond Obſervation. And a Line drawn from the firſt Place to the ſecond, is that in which the Comet moves through the Heaven.

PROBLEM LVII.

If the given Angle CAD *move about the angular Point* A *given in Poſition, and the given Angle* CBD *about the angular Point* B *given alſo in Poſition, on this Condition, that the Legs* AD, BD, *ſhall always cut one another in the right Line* EF *given likewiſe in Poſition; to find the Curve, which the Interſection* C *of the other Legs* AC, BC, *deſcribes.* [See Fig. 74.]

Produce CA to *d*, ſo that A*d* ſhall be = AD, and produce CB to ϑ, ſo that Bϑ ſhall be = to BD. Make the Angle A*de* equal to the Angle ADE, and the Angle Bϑ*f* equal to the Angle BDF, and produce AB on both Sides until it meet *de* and ϑ*f* in *e* and *f*. Produce alſo *ed* to G, that *d*G ſhall be = ϑ*f*; and from the Point C to the Line AB draw CH parallel to *ed*, and CK parallel to *f*ϑ. And conceiving the Lines *e*G, *f*ϑ, to remain immoveable while the Angles CAD, CBD, move by the aforeſaid Law about the Poles A and B, G*d* will always be equal to *f*ϑ, and the Triangle CHK will be given in Specie. Make therefore A*e* = *a*, *e*G = *b*, B*f* = *c*, AB = *m*, BK = *x*, and CK = *y*. And BK will be : CK :: B*f* : *f*ϑ. Therefore *f*ϑ = $\frac{cy}{x}$ = G*d*. Take this from G*e*, and there will

will remain $ed = b - \frac{cy}{x}$. Since the Triangle CKH is given in Specie, make CK : CH :: d : e, and CH : HK :: e : f, and CH will be $= \frac{ey}{d}$, and HK $= \frac{fy}{d}$. And consequently AH $= m - x - \frac{fy}{d}$. But AH : HC :: Ae : ed, that is, $m - x - \frac{f}{d}y : \frac{ey}{d}$ :: $a : b - \frac{cy}{x}$. Therefore, by multiplying the Means and Extreams together, there will be made $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{aey}{d}$. Multiply all the Terms by dx, and reduce them into Order, and there will come out

$$fcyy \begin{matrix} + dc \\ - ae \\ - fb \end{matrix} xy - dcmy - bdxx + bdmx = 0.$$

Where, since the unknown Quantities x and y ascend only to two Dimensions, it is evident, that the Curve Line that the Point C describes is a Conick Section. Make $\frac{ae + fb - dc}{c} = 2p$, and there will come out $yy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. And the Square Root being extracted, $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}}$. Whence we infer, that the Curve is an Hyperbola, if $\frac{bd}{fc}$ be affirmative, or negative and less than $\frac{pp}{ff}$; and

and a Parabola, if $\frac{bd}{fc}$ be negative and equal to $\frac{pp}{ff}$; an Ellipſe or a Circle, if $\frac{bd}{fc}$ be both negative and greater than $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

PROBLEM LVIII.

To deſcribe a Parabola which ſhall paſs through four Points given. [See Fig. 78.]

Let thoſe given Points be A, B, C, D. Join AB, and biſect it in E. And through E draw VE a right Line, which conceive to be the Diameter of a Parabola, the Point V being its Vertex. Join AC, and draw DG parallel to AB, and meeting AC in G. Make $AB = a$, $AC = b$, $AG = c$, $GD = d$. Upon AC take AP of any Length, and from P draw PQ parallel to AB, and conceiving Q to be a Point of the Parabola; make $AP = x$, $PQ = y$. And take any Equation expreſſive of a Parabola, which may determine the Relation between AP and PQ. As that y is $= x + fx \pm \sqrt{gg + bx}$.

Now if AP or x be put $= 0$, the Point P falling upon A, PQ or y will be $= 0$, as alſo $= -AB$. And by writing in the aſſumed Equation o for x, you will have $y = e \pm \sqrt{gg}$; that is, $= e \pm g$. The greater of which Values of y, $e + g$ is $= 0$, the leſſer $e - g = -AB$, or to $-a$. Therefore $e = -g$, and $e - g$; that is, $-2g = -a$, or $g = \frac{1}{2}a$. And ſo in room of the aſſumed Equation you will have this $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bx}$ (*a*).

Moreover,

Problem LVIII. (*a*) When $x = 0$, $y = e + g$, or $y = e - g$, by the aſſumed Equation; and $y = 0$, and $y = -AB$

Moreover, if AP or x be made $=$ AC, ſo that the Point P falls upon C, you will have again PQ $= 0$. For x therefore in the laſt Equation write AC or b, and for y write 0; and you will have $0 = -\frac{1}{2}a + fb + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, or $\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; and the Parts being ſquared $-afb + ffbb = bb$, or $ffb - fa = b$. And ſo, in room of the aſſumed Equation, there will be had this, $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$.

Moreover, if AP or x be made $=$ AG or c, PQ or y will be $=$ GD or $-d$. Wherefore, for x and y in the laſt Equation write c and $-d$, and you will have $-d = -\frac{1}{2}a + fc - \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$, or $\frac{1}{2}a - d - fc = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$. And the Parts being ſquared, $-ad - fac + dd + 2dcf + ccff = ffbc - fac$. And the Equation being ordered and reduced, $ff = \frac{2d}{b-c}f + \frac{dd - ad}{bc - cc}$. For $b - c$, that is, for GC write k, and that Equation will become $ff = \frac{2d}{k}f + \frac{dd - ad}{kc}$. And the Root being extracted,

---

$y = -$ AB $= -a$, from the Figure; whence putting $e + g = 0$, then $e - g = -a$. From $e + g = 0$, we have $e = -g$; whence, by Subſtitution, $-2g = -a$; and $g = \frac{1}{2}a$; and putting $e - g = 0$, then $e + g = -a$. From $e - g = 0$, we have $e = g$; whence $2g = -a$, and $g = -\frac{1}{2}a$; whence, by Subſtitution in the aſſumed Equation, we have $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bx}$ in the firſt Suppoſition, and $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{-\frac{1}{2}x^2 + bx}$.

extracted, $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{ddc + ddk - adk}{kkc}}$. But f being found, the parabolick Equation, viz. $y = -\frac{1}{2}e + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$ will be fully determined; by whose Construction therefore the Parabola will also be determined. The Construction is thus: Draw CH parallel to BD, meeting DG in H. Between DG and DH take a mean Proportional DK, and draw EI parallel to CK, bisecting AB in E, and meeting DG in I. Then produce IE to V, so that EV shall be to EI :: EB^q : $DI^q - EB^q$, and V will be the Vertex (*b*), VE the Diameter, and $\frac{BE^q}{VE}$ the *Latus Rectum* of the Parabola sought (*c*).

Problem LIX.

To describe a conic Section through five Points given.

[See Fig. 76.]

Let those Points be A, B, C, D, E. Join AC, BE, cutting one another in H. Draw DI parallel to BE, and meeting AC in I. As also EK parallel to AC, and meeting DI produced in K. Produce ID to F, and EK to G; so that AHC shall be : BHE :: AIC : FID :: EKG : FKD, and the Points F and G will be in a conick Section, as is known.

But you ought to observe this, if the Point H falls between all the Points A, C, and BE, or without them all, the Point I must either fall between all the Points A, C, and F, D, or without them all; and the Point K be-

(*b*) Because VI : VE :: DI^2 : BE^2.
(*c*) Because BE^q = VE × *Latus Rectum*.

K between all the Points D, F, and E, G, or without them all. But if the Point H falls between the two Points A, C, and without the other two B, E, or between those two B, E, and without the other two A, C, the Point I ought to fall between two of the Points A, C, and F, D, and without the other two of them; and in like Manner, the Point K ought to fall between two of the Points D, F, and E, G, and without Side of the two other of them; which will be done by taking IF, KG, on this or that Side of the Points I, K, according to the Exigency of the Problem. Having found the Points F and G, biſect AC and EG in N and O; alſo BE, FD, in L and M. Join NO, LM, cutting one another in R; and LM and NO will be the Diameters of the conick Section, R its Center, and BL, FM, Ordinates to the Diameter LM. Produce LM on both Sides, if there be Occaſion, to P and Q, ſo that BLq ſhall be to $FMq :: PLQ : PMQ$, and P and Q will be the Vertex's of the conick Section, and PQ the *Latus Tranſverſum*. Make $PLQ : LBq :: PQ : T$, and T will be the *Latus Rectum*. Which being known, the Figure is known.

It remains only that we may ſhew how LM is to be produced each Way to P and Q, ſo that BLq may be $: FMq :: PLQ : PMQ$, viz. PLQ, or $PL \times LQ$, is $\overline{PR - LR} \times \overline{PR + LR}$; for PL is $PR - LR$, and LQ is $RQ + LR$, or $PN + LR$. Moreover, $\overline{PR - LR} \times \overline{PR + LR}$, by multiplying, becomes $PRq - LRq$. And after the ſame Manner, PMQ is $\overline{PR + RM} \times \overline{PR - RM}$, or $PRq - RMq$. Therefore $BLq : FMq :: PRq - LRq : PRQ - RMq$; and by dividing, $BLq - FMq : FMq :: RMq - LRq : PRq - RMq$. Wherefore, ſince there are given $BLq - FMq$, FMq and $RMq - LRq$, there will be given $PRq - RMq$. Add the given Quantity RMq, and there will be given the Sum PRq, and conſequently its Root PR, to which QR is equal.

Problem LX.

To describe a conick Section which shall pass through four given Points, and in one of those Points shall touch a right Line given in Position. [See Fig. 77.]

Let the four given Points be A, B, C, D, and the right Line given in Position be AE, which let the conick Section touch in the Point A. Join any two Points D, C, and let DC produced, if there be Occasion for it, meet the Tangent in E. Through the fourth Point B draw BF parallel to DC, which may meet the same Tangent in F. Also draw DI parallel to the Tangent, and which may meet BF in I. Upon FB, DI, produced if there be Occasion, take FG, HI, of such Length as that it may be $AE^q : CED :: AF^q : BFG :: DIH : BIG$. And the Points G and H will be in a conick Section, as is known; provided you take FG, IH, on the proper Sides of the Points F and I, according to the Rule delivered in the foregoing Problem. Bisect BG, DC, DH, in K, L, and M. Join KL, AM, cutting one another in O, and O will be the Center, A the Vertex, and HM an Ordinate to the Semi-diameter AO; which being known, the Figure is known.

Problem LXI.

To describe a conick Section which shall pass through three given Points, and touch right Lines given in Position in two of those Points. [See Fig. 78.]

Let those given Points be A, B, C, the Tangents AD, BD, to the Points A and B, and let D be the common Intersection of those Tangents. Bisect AB in E. Draw DE, and produce it till in F it meets CF drawn parallel to AB; and DF will be the Diameter, and AE and CF the Ordinates to that Diameter. Produce DF to O, and on DO take OV a mean Proportional

tional between DO and EO, on this Condition, that alſo $AE_q : CF_q :: VE \times \overline{VO + OE} : VF \times \overline{VO + OF}$; and V will be the Vertex, and O the Center of the Figure. Which being known, the Figure will alſo be known. But VE is $= VO - OE$, and conſequently $VE \times \overline{VO + OE} = \overline{VO - OE} \times \overline{VO + OE} = VO_q - OE_q$. Beſides, becauſe VO is a mean Proportional between DO and EO, VO_q will be $= DOE$, and conſequently $VO_q - OE_q = DOE - OE_q = DEO$. And by a like Argument you will have $VF \times \overline{VO + OF} = VO_q - OF_q = DOE - OF_q$. Therefore $AE_q : CF_q :: DEO : DOE - OF_q$. OF_q is $= EO_q - 2FEO + FE_q$. And conſequently $DOE - OF_q = DOE - OE_q + 2FEO - FE_q = DEO + 2FEO - FE_q$. And $AE_q : CF_q :: DEO : DEO + 2FEO - FE_q :: DE : DE + 2FE - \frac{FE_q}{EO}$. Therefore there is given $DE + 2FE - \frac{FE_q}{EO}$. Take away from this given Quantity $DE + 2FE$, and there will remain $\frac{FE_q}{EO}$ given. Call that N; and $\frac{FE_q}{N}$ will be $= EO$, and conſequently EO will be given. But EO being given, there is alſo given VO, the mean Proportional between DO and EO.

After this Way, by ſome of Apollonius's Theorems, theſe Problems are expeditiouſly enough ſolved; which yet may be ſolved by Algebra alone, without thoſe Theorems. As if the firſt of the laſt three Problems be propoſed: [See Fig. 78.] Let the five given Points be A, B, C, D, E, through which the conick Section is to paſs. Join any two of them, A, C, and any other two, B, E, by right Lines interſecting one another in H. Draw DI parallel to BE, meeting AC in I; as alſo any other right Line KL meeting AC in K, and the conick Sec-

tion in L. And imagine the conick Section to be given, ſo that the Point K being known, there will at the ſame Time be known the Point L; and making AK = x, and KL = y, to expreſs the Relation between x and y, aſſume any Equation which generally expreſſes the conick Sections; ſuppoſe this, $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$. Wherein a, b, c, d, e, denote determinate Quantities with their Signs, but x and y indeterminate Quantities. Now if we can find the determinate Quantities a, b, c, d, e, the conick Section will be known. Let us therefore feign the Point L to fall ſucceſſively upon the Points A, C, B, E, D, and let us ſee what will follow thence. If therefore the Point L falls upon the Point A, in that Caſe AK and KL, that is, x and y, will be 0. Then all the Terms of the Equation beſides a will vaniſh, and there will remain $a = 0$. Wherefore a is to be blotted out in that Equation, and the other Terms $bx + cxx + dy + exy + yy$ will be $= 0$. Moreover if L falls upon C, AK, or x, will be = AC, and LK or $y = 0$. Put therefore AC = f, and by ſubſtituting f for x and 0 for y, the Equation for the Curve $bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, will become $bf + cff = 0$, or $b = -cf$. And having writ in that Equation $-cf$ for b, it will become $-cfx + cxx + dy + exy + yy = 0$. Farther, if the Point L falls upon the Point B, AK or x will be = AH, and KL or y = BH. Put therefore AH = g, and BH = h, and then write g for x and h for y, and the Equation $-cfx + cxx$, &c. will become $-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0$. But if the Point L falls upon E, AK will be = AH, or $x = g$, and KL or y = HE. For HE therefore write $-k$, with a negative Sign, becauſe HE lies on the contrary Side of the Line AC, and by ſubſtituting g for x and $-k$ for y, the Equation $-cfx + cxx$, &c. will become $-cfg + cgg - dk - egk + kk = 0$. Take away this from the former Equation $-cfg + cgg + dh + egh + hh$, and there will remain $dh + egh + hh + dk + egk - kk = 0$. Divide this by $h + k$, and there will come out $d + eg + b - k$

$+ h - k = 0$. Take away this multiplied by b from $- cfg + cgg + db + egh + bb = 0$, and there will remain $- cfg + cgg + bk = 0$, or $\frac{bk}{-gg+fg} = c$. Laſtly, if the Point L falls upon the Point D, AK or x will be $=$ AI, and KL or y will be $=$ ID. Wherefore, for AI write m, and for ID, n; and likewiſe for x and y ſubſtitute m and n, and the Equation $- cfx + cxx$, &c. will become $- cfm + cmm + dn + emn + nn = 0$. Divide this by n, and there will come out $\frac{-cfm+cmm}{n} + d + em + n = 0$. Take away $d + eg + b - k = 0$, and there will remain $\frac{-cfm+cmm}{n} + em - eg + n - b + k = 0$, or $\frac{cmm-cfm}{n} + n - b + k = eg - em$. But now by reaſon of the given Points A, B, C, D, E, there are given AC, AH, AI, BH, EH, DI, that is, f, g, m, b, k, n. And conſequently by the Equation $\frac{bk}{fg-gg} = c$, there is given c. But c being given by the Equation $\frac{cmm-cfm}{n} + n - b + k = eg - em$ there is given $eg - em$. Divide this given Quantity by the given one $g - m$, and there will come out the given e. Which being found, the Equation $d + eg + b - k = 0$, or $d = k - b - eg$, will give d. And theſe being known, there will at the ſame Time be determined the Equation expreſſive of the conick Section ſought, viz. $cfx = cxx + dy + exy + yy$. And from that Equation, by the Method of Des Cartes, the conick Section will be determined.

Now if the four Points A, B, C, E, and the Poſition of the right Line AF, which touches the conick Section in one of thoſe Points A were given, the conick Section may be thus more eaſily determined. Having found, as above, the Equations $cfx = cxx + dy + exy + yy$, $d = k - b - g$, and $c = \frac{bk}{fg - gg}$, conceive the Tangent AF to meet the right Line EH in F, and then the Point L to be moved along the Perimeter of the Figure CDE till it fall upon the Point A; and the ultimate Ratio of LK to AK will be the Ratio of FH to AH, as will be evident to any one that contemplates the Figure. Make $FH = p$, and in this Caſe where LK, AK, are in a vaniſhing State, you will have $p : g :: y : x$, or $\frac{gy}{p} = x$. Wherefore for x, in the Equation $cfx = cxx + dy + exy + yy$, write $\frac{gy}{p}$, and there will ariſe $\frac{cfgy}{p} = \frac{cggyy}{pp} + dy + \frac{egyy}{p} + yy$. Divide all by y, and there will come out $\frac{cfg}{p} = \frac{cggy}{pp} + d + \frac{egy}{p} + y$. Now becauſe the Point L is ſuppoſed to fall upon the Point A, and conſequently KL, or y, to be infinitely ſmall or nothing, blot out the Terms which are multiplied by y, and there will remain $\frac{cfg}{p} = d$. Wherefore make $\frac{bk}{fg - gg} = c$, then $\frac{cfg}{p} = d$. Laſtly, $\frac{k - b - d}{g} = e$, and having found c, d, and e, the Equation $cfx = cxx + dy + exy + yy$ will determine the conick Section.

If,

If, lastly, there are only given the three Points A, B, C, together with the Position of the two right Lines, AT, CT, which touch the conick Section in two of those Points, A and C, there will be obtained, as above, this Equation expressive of a conick Section, $cfx = cxx + dy + exy + yy$ [See Fig. 80]. Then if you suppose the Ordinate KL to be parallel to the Tangent AT, and it be conceived to be produced, till it again meets the conick Section in M, and that Line LM to approach to the Tangent AT till it coincides with it at A; the ultimate Ratio of the Lines KL and KM to one another, will be a Ratio of Equality, as will appear to any one that contemplates the Figure. Wherefore in that Case KL and KM being equal to each other, that is, the two Values of y, (viz the affirmative one KL, and the negative one KM) being equal, those Terms of the Equation $cfx = cxx + dy + exy + yy$ in which y is of an odd Dimension, that is, the Terms $dy + exy$ in respect of the Term yy, wherein y is of an even Dimension, will vanish. For otherwise the two Values of y, viz. the affirmative and the negative, cannot be equal; and in that Case AK is infinitely less than LK, that is x than y, and consequently the Term exy than the Term yy. And consequently being infinitely less, may be reckoned for nothing. But the Term dy, in respect of the Term yy will not vanish as it ought to do, but will grow so much the greater, unless d be supposed to be nothing. Therefore the Term dy is to be blotted out, and so there will remain $cfx = cxx + exy + yy$, an Equation expressive of a conick Section. Conceive now the Tangents AT, CT, to meet one another in T, and the Point L to come to approach to the Point C, till it coincides with it. And the ultimate Ratio of KL to KC, will be that of AT to AC. KL was y; AK, x; and AC, f; and consequently KC, $f - x$; make $AT = g$, and the ultimate Ratio of y to $f - x$, will be the same as of g to f. The Equation $cfx = cxx + exy + yy$ subtracting on both Sides cxx, becomes $cfx - cxx = exy + yy$, that is, $\overline{f-x}$ into $cx = y$ into $\overline{ex+y}$. There-

Therefore it is $y : f - x :: cx : ex + y$, and consequently $g : f :: cx : ex + y$. But the Point L falling upon C, y becomes nothing. Therefore $g : f :: cx : ex$. Divide the latter Ratio by x, and it will become $g : f :: c : e$, and $\frac{cf}{g} = e$. Wherefore, if in the Equation $cfx = cxx + exy + yy$, you write $\frac{cf}{g}$ for e, it will become $cfx = cxx + \frac{cf}{g}xy + yy$, an Equation expreſſive of a conick Section. Laſtly, draw BH parallel to KL, or AT, from the given Point B, through which the conick Section ought to paſs, and which ſhall meet AC in H, and conceiving KL to come towards BH, until it coincides with it, in that Caſe AH will be $= x$, and $BH = y$. Call therefore the given Quantity $AH = m$, and the given Quantity $BH = n$, and then for x and y, in the Equation $cfx = cxx + \frac{cf}{g}xy + yy$, write m and n, and there will ariſe $cfm = cmm + \frac{cf}{g}mn + nn$. Take away on both Sides $cmm + \frac{cf}{g}mn$, and there will come out $cfm - cmm - \frac{cf}{g}mn = nn$. Put $f - m - \frac{fn}{g} = s$, and csm will be $= nn$. Divide each Part of the Equation by sm, and there will ariſe $c = \frac{nn}{sm}$. But having found c, the Equation for the conick Section is determined $cfx = cxx + \frac{cf}{g}xy + yy$. And then, by the Method of Des Cartes, the conick Section is given, and may be deſcribed.

END of PART I.

UNIVERSAL

ARITHMETIC.

Of the Nature *of the* Roots *of* Equations.

HITHERTO I have been ſolving ſeveral Problems. For in learning the Sciences, Examples are of more Uſe than Precepts. Wherefore I have been larger on this Head. And ſome which occurred as I was putting down the reſt, I have given their Solutions without uſing Algebra, that I might ſhew that in ſome Problems that at firſt Sight appear difficult, there is not always occaſion for Algebra. But now it is time to ſhew the Solution of Equations. For after a Problem is brought to an Equation, you muſt extract the Roots of that Equation, which are the Quantities that ſatisfy the Problem.

How EQUATIONS *are to be ſolved.*

AFTER therefore in the Solution of a Queſtion you are come to an Equation, and that Equation is duly reduced and ordered; when the Quantities which are denoted by Species, and which are ſuppoſed given, are really given in Numbers, thoſe Numbers are to be ſubſtituted in their room in the Equation, and you will have a numeral Equation, whoſe Root being extracted will ſatisfy the Queſtion. As if in the Diviſion of an Angle into five equal Parts, by putting r for the Radius of the Circle, q for the Chord of the Complement of the propoſed Angle to two right ones, and x for the Chord of the Complement of the fifth Part of that Angle, I had come to this Equation; $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x - r^4q = 0$. Where in any particular Caſe the Radius r is given in Numbers, and the Line q ſubtending the Complement of the given Angle; as if the Radius were 10, and the Chord 3; I ſubſtitute thoſe Numbers in the Equation for r and q, and there comes

comes out the numeral Equation $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$, whereof the Root being extracted will be x, or the Line ſubtending the Complement of the fifth Part of that given Angle.

Of the Nature of the Roots of an Equation.

CX. *But the Root is a Number which being ſubſtituted in the Equation for the Letter or Species ſignifying the Root, will make all the Terms vaniſh.*

Thus Unity is the Root of the Equation $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, becauſe being writ for x it produces $1 - 1 - 19 + 49 - 30$; that is, nothing. But there may be more Roots of the ſame Equation. As if in this ſame Equation $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, for x you write the Number 2, and for the Powers of x the like Powers of the Number 2, there will be produced $16 - 8 - 76 + 98 - 30$; that is, nothing. And ſo if for x you write the Number 3, or the negative Number -5, in both Caſes there will be produced nothing, the affirmative and negative Terms in theſe four Caſes deſtroying one another. Therefore ſince any of the Numbers written in the Equation fulfils the Condition of x, by making all the Terms of the Equation together equal to nothing, any of them will be the Root of the Equation (*a*). CXI.

CX. (*a*) *An Equation may be conſidered either abſolutely*, as an Aggregate of Terms which involve the Powers of an unknown Quantity, and is equal to nothing; *or relatively*, as an Aggregate of Terms, which by *containing all the Conditions of a Problem*, contain the Powers of an unknown Quantity, and is equal to nothing. Art. LXXXII, LXXXIII, &c.

202. *In both Caſes, any Quantity, which being ſubſtituted for the unknown, will make the Aggregate to vaniſh, is a Root.* For the whole Aggregate is equal to nothing (Art. LXV), and the known Quantities remain the ſame, and unchanged; alſo the unknown Quantity is the ſame, both before and after it is found; wherefore being

CXI. And that you may not wonder that the ſame Equation may have *ſeveral Roots*, you muſt know *that there may be more Solutions than one of the ſame Problem.*

As

being ſubſtituted after it is found, in the Place of its Symbol, the Aggregate will ſtill be equal to nothing; that is, will vaniſh. See Numb. 209.

203. It will be always poſſible to find a Root, that is, a Quantity which by Subſtitution ſhall cauſe all the Terms to vaniſh, if the extreme Terms of the Equation have contrary Signs; that is, becauſe the firſt Term is always ſuppoſed affirmative, *every Equation whoſe laſt Term is negative, has a real Root.* For the firſt Term being affirmative, and the laſt by Tranſpoſition into the ſecond Member becoming affirmative, two Numbers, whoſe Difference is leſs than any aſſigned Quantity, being ſucceſſively ſubſtituted into the firſt Member, will give Sums coming nearer to an Equality than by any definite Difference; conſequently a Number is given, which, by Subſtitution in the firſt Member, will make it of any aſſigned Magnitude, and therefore equal to the Quantity in the ſecond Member; and that Quantity being again tranſpoſed, the Aggregate muſt vaniſh. See Numb. 205, 217.

204. *Every Equation of even Dimenſions has two real Roots, when the laſt Term is negative; one of which is affirmative, and the other negative.* For the laſt Term becomes affirmative by Tranſpoſition, and every Power of even Dimenſions of any Number whatſoever, whether affirmative or negative, is affirmative (87, 88); whence the laſt Term being tranſpoſed, and becoming affirmative, it can be equalled, as in Numb. 203, &c. See Numb. 217.

205. *Every Equation of odd Dimenſions has at leaſt one real Root, whether its laſt Term be negative or affirmative.* For every Power of odd Dimenſions of any affirmative Number is affirmative, and of a negative Number, negative

As if there was ſought the *Interſection* of two given Circles; there are *two* Interſections, and conſequently the Queſtion admits *two Anſwers*; and therefore the Equation determining the Interſection will have *two Roots*, whereby it determines both the Interſections, *provided there be nothing in the Data whereby the Anſwer is determined to only one Interſection*. [See Fig. 87.]

---

gative (87, 88.); if the laſt Term is negative, the Root whoſe odd Power, being equal to it, cauſes the Aggregate to vaniſh, muſt be affirmative (203): And if it be affirmative, it becomes negative by Tranſpoſition, but it is ſtill a real Power (88); the Root whoſe odd Power being equal to it, will cauſe the Terms to vaniſh, muſt be negative; and will be a real Root (87, 88.) See Numb. 217.

206. *If an Equation of even Dimenſions has its laſt Term affirmative*, it may be impoſſible, by any Subſtitution in the firſt Member, to make the Aggregate to vaniſh; that is, *it may have impoſſible Roots*. Becauſe it may be impoſſible to make the firſt Member ſo great negatively, as to attain (the laſt Term being tranſpoſed, and then negative, and the Equation being of even Dimenſions [88]) any given Magnitude: And conſequently may always be deficient of the negative Quantity in the ſecond Member, and this when tranſpoſed back being affirmative, the Aggregate will not vaniſh by any Subſtitution, but come out poſitive. See Numb. 189.

207. The Impoſſibility of finding a Number, which by Subſtitution would cauſe the Aggregate of the Terms of an Equation to vaniſh, ariſes from this, that there are no Roots of negative Powers of even Dimenſions: But if ſuch Roots are imagined to exiſt, they by Subſtitution would make the Aggregate to vaniſh; whence *every Equation has a Root, if not real, at leaſt imaginary*.

And

And thus, if of the Arch APB its fifth Part AP were to be found, though perhaps you might apply your Thoughts only to the Arch APB, yet the Equation, whereby the Queſtion will be ſolved, will determine the fifth Part of all the Arches which are terminated at the Points A and B; viz. the fifth Part of the Arches ASB, APBSAPB, ASBPASB, and APBSAPBSAPB, as well as the fifth Part of the Arch APB; which fifth Parts, if you divide the whole Circumference into five equal Parts, PQ, QR, RS, ST, TP, will be AT, AQ, ATS, AQR. Wherefore, by ſeeking the fifth Parts of the Arches which the right Line AB ſubtends, to determine all the Caſes the whole Circumference ought to be divided in the five Points P, Q, R, S, T, therefore the Equation that will determine all the Caſes will have five Roots. For the fifth Parts of all theſe Arches depend on the ſame Data, and are found by the ſame kind of Calculus; ſo that you will always fall upon the ſame Equation, whether you ſeek the fifth Part of the Arch APB, or the fifth Part of the Arch ASB, or the fifth Part of any other of the Arches. Whence, if the Equation by which the fifth Part of the Arch APB is determined, ſhould not have more than one Root, while by ſeeking the fifth Part of the Arch ASB we fall upon that ſame Equation; it would follow, that this greater Arch would have the ſame fifth Part with the former, which is leſs, becauſe its Subtenſe or Chord is expreſſed by the ſame Root of the Equation. *In every Problem therefore it is neceſſary, that the Equation which anſwers ſhould have as many Roots as there are different Caſes of the Quantity ſought depending on the ſame Data, and to be determined by the ſame Method of Reaſoning* (*b*).

CXII. *But an Equation may have as many Roots as it has Dimenſions, and not more.*

CXI. (*b*) See Number 194, 210.

Thus

Thus the Equation $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, has four Roots, 1, 2, 3, -5; but not more. For any of these Numbers writ in the Equation for x, will cause all the Terms to destroy one another, as we have said; but besides these, there is no Number by whose Substitution this will happen (*c*).

CXIII. *But the Number and Nature of the Roots will be best understood from the Generation of the Equation.*

As if we would know how an Equation is generated, whose Roots are 1, 2, 3, and -5; we are to suppose x to signify ambiguously those Numbers, or x to be $= 1$, $x = 2$, $x = 3$, and $x = -5$, or which is the same Thing, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, and $x + 5 = 0$; and multiplying these together, there will come out by the Multiplication of $x - 1$ by $x - 2$ this Equation $xx - 3x + 2 = 0$, which is of two Dimensions, and has two Roots 1 and 2. And by the Multiplication of this by $x - 3$, there will come out $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, an Equation of three Dimensions and as many Roots; which again multiplied by $x + 5$ becomes $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, as above. Since therefore this Equation is generated by four Factors, $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, and $x + 5$, continually multiplied by one another, where any of the Factors is nothing, that which is made by all will be nothing; but where none of them is nothing, that which is contained under them all cannot be nothing. That is, $x^4 - x^4 - 19xx + 49x - 30$ cannot be $= 0$, as ought to be, except in these four Cases, where $x - 1$ is $= 0$, or $x - 2 = 0$, or $x - 3 = 0$, or, lastly, $x + 5 = 0$, therefore only the Numbers 1, 2, 3, and -5 can exhibit x, or be the Roots of the Equation. *And you are to reason alike of all Equations.* For *we may imagine all to be generated by such a Multiplication,*

CXII. (*c*) See Number 210.

Multiplication, although it is usually very difficult to separate the Factors from one another, and is the same Thing as to resolve the Equation and extract its Roots. For the Roots being had, the Factors are had also (*d*).

CXIV. *But*

CXIII. (*d*) 208. *All Equations above one Dimension may be considered as generated by the continual Multiplication of Binomes, or simple Equations* (Article LXVI. Numb. 181.), *consisting of the same Letter denoting the unknown, and any other undetermined Quantity.* Thus the given Equation $x^3 + px^2 - qx + r = 0$, may be the same with the Equation $x^3 + \overline{a + b - c} \times x^2 + \overline{ab - ac - bc} \times x - abc = 0$, which is produced from the continual Multiplication of the Binomes, $x + a$, $x + b$, $x - c$, or the simple Equations $x + a = 0$, $x + b = 0$, $x - c = 0$. For the Number of Binomes is equal to the Index of the highest Term, that is, to the Number of Terms except the first; and consequently, by equating the Coefficients of the corresponding Terms of the given and produced Equations, there is an Equation for each assumed undeterminate Quantity (182, 183.): Therefore so many binome Factors may be separately determined, because each Equation has its Root (207), consisting of the Letter denoting the unknown, or Root, and some numeral or determinate Quantity, from whose Multiplication the Equation of those Dimensions might be generated. See Numb. 95, 97, 98, 99.

209. If in the Equation $x^3 + \overline{a + b - c} \times x^2 + \overline{ab - ac - bc} \times x - abc = 0$, produced by the Multiplication of $x + a = 0$, $x + b = 0$, $x - c = 0$, any Quantity y be substituted for the unknown x, the Equation $y^3 + \overline{a + b - c} \times y^2 + \overline{ab - ac - bc} \times y - abc = 0$ will emerge, which is the Product of $y + a = 0$, $y + b = 0$, $y - c = 0$; whence, *if in any Equation any of the second Members of the Factors be*

 substituted

CXIV. *But the Roots are of two Sorts, affirmative, as in the Example brought,* 1, 2, *and* 3; *and negative, as* — 5. *And of theſe ſome are often impoſſible.*

Thus,

ſubſtituted for x, the unknown, with the Sign changed, a Product will reſult, one of whoſe Factors will be that Member connected with itſelf under contrary Signs, that is, nothing; whence the Product is nothing; that is, *the Aggregate of the Terms vaniſhes.* Thus in the above Equation, $-a$ ſubſtituted, produces $-a^3 + a^3 + ba^2 - ca^2 - ba^2 + ca^2 + bca - bca = 0$; and $-b$, $-b^3 + b^3 + ab^2 - cb^2 - ab^2 + cb^2 + bca - bca = 0$; and $+c$, $c^3 - c^3 + bc^2 + ac^2 - ac^2 - bc^2 + abc - abc = 0$; there being a Part of the ſecond Term equal to the firſt; the Remainder of the ſecond Term equal to Part of the third; and ſo on; and Part of the Penultimate equal to the laſt: But the equal Parts have contrary Signs, whence being deſtroyed, the Aggregate vaniſhes.

210. *The ſecond Members of the Factors,* that is, the Roots of the ſimple generating Equations, *and no other Quantities are the Roots of the Equation, their Signs being changed* (181): Becauſe they alone can by Subſtitution, under contrary Signs, cauſe the Aggregate of the Terms to vaniſh (209). Hence *an Equation has ſo many Roots, and no more, as it has Dimenſions*; and the Problem from the Sum of whoſe Conditions it was collected (194), admits ſo many Solutions, and no more, as the Equation has Dimenſions, or, as there are Units in the Index of its higheſt Term. Hence alſo *the Letter denoting the unknown denotes each Root equally, and in like Manner*; becauſe each Root ſubſtituted for the Letter cauſes the Aggregate in like Manner to vaniſh (209).

211. *If the Letter* x *denoting the Root is found, or any Power of it, in the laſt Term of an Equation, ſo many of the latter Terms of the Equation are wanting, as there are Units*

Thus, the two Roots of the Equation $xx - 2ax + bb = 0$, which are $a + \sqrt{aa - b}$ and $a - \sqrt{aa - bb}$, are

---

Units in the Index of it (96), *and converſely*: Alſo putting n for the Dimenſions of any Equation, and Aſteriſks for the wanting Terms, *its Number of Terms is* $n + 1$ (94).

212. *An Equation of any Dimenſions is the Product of the Factors, into which it can by Diviſion be reſolved* (152), that is, may *be conſidered as the Product of ſimple or compound Equations, the Sum of whoſe Dimenſions is equal to its Dimenſions:* Thus, a Biquadratic may be conſidered as the Product, either of four ſimple; or of two quadratic; or laſtly, of one ſimple, and one cubic Equation: Whence, Equations may be reduced to lower Dimenſions, by being divided by their Factors. *If an Equation is diviſible by a rational Diviſor, it is ſaid to be reducible; otherwiſe, irreducible:* And every Equation which is irreducible by a rational Diviſor of Half its Dimenſions, will alſo be irreducible by Diviſors of greater Dimenſions (164): And *all Equations are reducible to infinite Series* (155).

213. There are *two Characteriſtics of the Roots* of any Equation: 1. *They are Diviſors of it* (212): 2. *They cauſe the Aggregate of the Terms to vaniſh, when they are ſubſtituted* (210).

214. *If any Equation is diviſible by* $x - a + \sqrt{a}$, *or if* $a + \sqrt{a}$ *be its Root; then alſo ſhall* $x - a - \sqrt{a}$ *be a Diviſor, and* $a - \sqrt{a}$ *a Root: Alſo if* $x - a + \sqrt{-a}$ *be a Diviſor, and* $a + \sqrt{-a}$ *a Root; ſo alſo ſhall* $x - a - \sqrt{-a}$, *and* $a - \sqrt{-a}$ (153).

215. *If all the Terms of an Equation are rational, the irrational Factors,* (if any) *muſt have deſtroyed themſelves* (120).

216. *If the Terms of an Equation are ſome rational, and ſome irrational; the Sum of the Rationals and Irrationals, are ſeparately equal to nothing* (116).

are real, when aa is greater than bb: but when aa is is leſs than bb, they become impoſſible; becauſe then $aa - bb$ will be a negative Quantity, and the ſquare Root of a negative Quantity is impoſſible. For every poſſible Root, whether it be affirmative or negative, if it be multiplied by itſelf, produces an affirmative Square; therefore that will be an impoſſible one, which is to produce a negative Square. By the ſame Argument you may conclude, that the Equation $x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0$, has one real Root, which is 2, and two impoſſible ones, $1 + \sqrt{-2}$ and $1 - \sqrt{-2}$. For any of theſe, 2, $1 + \sqrt{-2}$, $1 - \sqrt{-2}$, being writ in the Equation for x, will make all its Terms deſtroy one another; but $1 + \sqrt{-2}$, and $1 - \sqrt{-2}$, are impoſſible Numbers, becauſe they ſuppoſe the Extraction of the ſquare Root out of the negative Number -2 (*e*).

CXV. *But it is juſt, that the Roots of Equations ſhould be often impoſſible, leſt they ſhould exhibit the Caſes of Problems that are often impoſſible, as if they were poſſible.*

As if you were to determine the Interſection of a right Line and a Circle, and you ſhould put two Letters for the Radius of the Circle and the Diſtance of the right Line from its Center; and when you have the Equation defining the Interſection, if for the Letter denoting the Diſtance of the right Line from the Center, you put a Number leſs than the Radius, the Interſection will be poſſible; but if it be greater, impoſſible; and the two Roots of the Equation, which determine the two Interſections, ought to be either poſſible or impoſſible, that they may truly expreſs the Matter [See Fig. 88]. And thus, if the Circle CDEF, and the Ellipſis ACBF, cut

CXIV. (*e*) Every Quantity, whether real or imaginary, whether affirmative or negative, which being ſubſtituted for x, the Letter denoting the unknown, cauſes the Terms to vaniſh; or which, joined with it, divides the Equation, is looked upon as a Root or Factor.

cut one another in the Points C, D, E, F, and to any right Line given in Poſition, as A B, you let fall the Perpendiculat C G, D H, E I, F K, and by ſeeking the Length of any one of the Perpendiculars, you come at length to an Equation; that Equation, when the Circle cuts the Ellipſis in four Points, will have four real Roots, which will be thoſe four Perpendiculars. But if the Radius of the Circle, its Center remaining, be diminiſhed until (the Points E and F meeting) the Circle at length touches the Ellipſe; thoſe two of the Roots, which expreſs the Perpendiculars E I and F K now coinciding, will become equal. And if the Circle be yet diminiſhed, ſo that it does not touch the Ellipſe in the Points E, F, but only cuts it in the other two Points C D; then out of the four Roots, thoſe two which expreſſed the Perpendiculars E I, F K, which are now become impoſſible, will become, together with thoſe Perpendiculars, alſo impoſſible (*f*).

CXVI. *And after this Way in all Equations, by augmenting or diminiſhing their Terms, of the unequal Roots, two will become, firſt equal, and then impoſſible. And thence it is, that the Number of the impoſſible Roots is always even* (*g*.)

CXVII. *But*

CXV. (*f*) *In Algebra the Root of an impoſſible Quantity has its Expreſſion; but in Geometry none. In Algebra* you obtain a general Solution, and there is an Expreſſion in all Caſes of the Thing required; only within certain Bounds, *that Expreſſion* repreſents an imaginary Quantity, or rather is the Symbol of an Operation which in that Caſe cannot be performed; and *ſerves only to ſhew the Geneſis of the Quantity, and the Limits within which it is poſſible.*

CXVI. (*g*) 217. *If an Equation has any impoſſible Roots, their Number is even:* for, to make the Coefficients rational, and the laſt Term real (215), the radical Sign muſt diſappear (120); which it could not do, except

CXVII. *But ſometimes the Roots of Equations are poſſible, when the Schemes exhibit them as impoſſible. But this happens by reaſon of ſome Limitation in the Scheme, which does not belong to the Equation.* [See Fig. 89.]

As if in the Semi-circle ADB, having given the Diameter AB, and the Chord AD, and having let fall the Perpendicular DC, I was to find the Segment of the Diameter AC, you will have $\frac{AD^2}{AB} = AC$. And, by this Equation, AC is exhibited a real Quantity, where the inſcribed Line AD is greater than the Diameter AB; but by the Scheme, AC then becomes impoſſible, viz. in the Scheme the Line AD is ſuppoſed to be inſcribed in the Circle, and therefore cannot be greater than the Diameter of the Circle; but in the Equation there is nothing that depends upon that Condition. From this Condition alone of the Lines the Equation comes out, that AB, AD, and AC, are continually proportional. And becauſe the Equation does not contain all the Conditions of the Scheme, it is not neceſſary that it ſhould be bound to the Limits of all Conditions. Whatever is more in the Scheme than in the Equation, may conſtrain that to Limits; but not this. For which Reaſon, when Equations are of odd Dimenſions, and conſequently cannot have all their Roots impoſſible, the Schemes often ſet Limits to the Quantities on which all the Roots depend, which Limits it is impoſſible they

---

their Number was even. Hence *alſo their Product is poſitive, and does not alter the Sign of the Product of the real Roots* (57). Whence it follows, that *a Cubic can have but two impoſſible Roots*; and that *every Equation whoſe laſt Term is negative, has, if the Exponent be odd, one at leaſt*; *and if more, an odd Number of real Roots*, as in Numb. 205; and that *if the Index be even, it has at leaſt two*; *and if more, an even Number of real Roots*, as in Numb. 204.

they can exceed, keeping the ſame Conditions of the Schemes (*h*).

CXVIII. *Of thoſe Roots that are real ones, the affirmative and negative ones lie on contrary Sides, or tend contrary Ways.*

Thus, in the laſt Scheme but one, by ſeeking the Perpendicular CG, you will light upon an Equation that has two affirmative Roots CG and DH, tending from the Points C and D the ſame Way; and two negative ones, EI and FK, tending from the Points E and F the oppoſite Way. Or if in the Line AB to which the Perpendiculars are let fall, there be given any Point P, and the Part of it PG extending from that given Point to ſome of the Perpendiculars, as CG, be ſought, we ſhall light on an Equation of four Roots, PG, PH, PI, and PK, whereof the Quantity ſought PG, and thoſe that tend from the Point P the ſame Way with PG (as PK), will be affirmative, but thoſe which tend the contrary Way (as PH, PI), negative (*i*).

CXIX. *Where*

CXVII. (*h*) For not only the Magnitude, but the Poſition of Quantities, will reſtrain the Expreſſions of the Roots. See Note following.

CXVIII. (*i*) Although all Quantities which by Subſtitution make the Terms vaniſh, or which will form Diviſors of it, are in general accounted Roots of an Equation, conſidered abſolutely as an Aggregate of Terms, containing the Powers of an unknown Quantity without any Relation to the Solution of a Problem; yet, when an Equation is conſidered as containing the Relation of Quantities in order to the Solution of a Problem, *it ſeems neceſſary to diſtinguiſh between Factors and Roots*, and to reſtrain the latter Term to thoſe which anſwer to the Conditions of the Problem; in which

CXIX. *Where there are none of the Roots of the Equation impoſſible, the Number of the affirmative and negative Roots may be known from the Signs of the Terms of the Equation. For there are ſo many affirmative Roots, as there are Changes of the Signs in a continual Series from + to —, and from — to +; the reſt are negative.*

As in the Equation $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, where the Signs of the Terms follow one another in this Order, $+ - - - + -$, the Variations of the ſecond — from the firſt +, of the fourth + from the third —, and of the fifth — from the fourth +, ſhew, that there are three affirmative Roots, and conſequently, that the fourth is a negative one. But where ſome of the Roots are *impoſſible*, the Rule is of no Force; unleſs as far as thoſe impoſſible Roots, which are neither negative nor affirmative, may be taken for *ambiguous* ones. Thus in the Equation $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$; the Signs ſhew that there is one affirmative Root and two negative ones. Suppoſe $x = 2p$, or $x - 2p = 0$; and multiply the former Equation by this, $x - 2p = 0$, that

---

Caſe, none but affirmative Quantities could be accounted Roots: For if the Problem is purely algebraic, where Magnitude only, and no Conſideration of Poſition, or contrary Values, can have Place, no Roots but ſuch as are affirmative will anſwer; becauſe, that a negative Quantity ſhould be actually leſs than nothing is equally impoſſible, as that the double Product of two Numbers ſhould be greater than the Sum of their Squares: That is, negative and imaginary Roots are equally impoſſible, where Magnitude only is conſidered. When the Problem is geometrical, where, beſide Magnitude, Poſition alſo, and contrary Values are taken into Conſideration; then negative Roots do not ſolve the Problem, but ſhew the Solution of it, in the oppoſite Poſition or Value; and if the Problem was changed to that oppoſite Poſition, thoſe negative Factors would become affirmative Roots.

that one affirmative Root more may be added to the former; and you will have this Equation,

$$x^4 - px^3 + ppxx \overset{-}{-} \frac{bp^3}{q} x + 2pq = 0,$$

which ought to have two affirmative and two negative Roots; yet it has, if you regard the Change of the Signs, four affirmative ones. There are therefore *two impoſſible* ones, which, for their Ambiguity, in the former Caſe ſeem to be negative ones; in the latter, affirmative ones (*k*).

But

CXIX. (*k*) See Numb. 192.

218. Since Equations are the Products of Binomes, it follows, that *the Coefficients of the Terms are Unity, the Sum of the Roots, the Sums of the Products of two, of three, of four, &c.* (97). Whence

219. *If the Roots be real Quantities, the Square of the middle Term of three will be greater than the Product of the adjacent Terms; and conſequently every ſubſequent Term divided by the next Antecedent, will decreaſe continually* (109): Whence *there will be a Succeſſion for each binomial Factor, and an Alternation for each Reſidual* (114); *That is, a Succeſſion for each negative, and an Alternation for each affirmative Root* (181). Now, becauſe the laſt Term of a Quadratic, whoſe Roots are impoſſible, is augmented by the Square of the Quantity under the radical Sign (193); the Square of the Middle of three Terms of an Equation, into whoſe Compoſition one or more ſuch Quadratics have entered, will not always exceed the Product of the adjacent; nor the Ratio of each ſubſequent Term, divided by the antecedent, continually decreaſe; and conſequently *the Alternations and Succeſſions will not ſhew the Numbers of poſitive and negative Roots, unleſs the impoſſible Roots be taken ambiguouſly for poſitive and negative* (192).

But you may know almoſt, by this Rule, how many Roots are impoſſible.

CXX. *Make a Series of Fractions, whoſe Denominators are Numbers in this Progreſſion,* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. going on to the Number which ſhall be the ſame as that of the Dimenſions*

This Rule of Harriott is otherwiſe thus demonſtrated. Becauſe the Roots of the Equation are by Suppoſition all real, the Roots in all the Equations of Limits deducible from it will be real; and conſequently in all the Quadratics (271): Now the poſitive Roots, in every Quadratic, are equal in Number to the Permutations of its Signs (190), and this Number cannot be augmented by any negative Root; that is, by any Multiplication by a binomial Factor (57): And it can be augmented by one only, in one Multiplication; by two, &c. in two Multiplications, &c. by a reſidual Factor (58); that is, it can be augmented but by one poſitive Root in the cubic, by two in the biquadratic, &c. wherefore, univerſally, the Number of Permutations is equal to the Number of poſitive Roots: Now the Number of Terms or Signs is $n + 1$ (211): Therefore the Number of Permutations and Succeſſions together are n, that is, the Number of Roots (210): Wherefore, ſince the Number of Alternations is the Number of Poſitive, the Number of Succeſſions is that of the negative Roots.

220. *The Variations of affirmative and negative Roots, combined together in Equations, are equal to the Number of Terms in Equations of that Degree; that is, always exceed the Number of Roots by Unity:* thus the Roots of a Quadratic may be, 1ſt. both affirmative; or, 2d. both negative; or 3d. one affirmative and one negative: thoſe of a cubic may be, 1ſt. all affirmative; 2d. all negative; 3d. one affirmative and two negative; or 4th. two affirmative and one negative, &c. For all the Variations of the Signs are 2^n (185), and the ſame recur in Number $n - 1$ (35); whence $2^n - n - 1 = n + 1$, are the Variations.

Dimenſions of the Equation; and the Numerators, the ſame Series of Numbers in a contrary Order. Divide each of the latter Fractions by each of the former. Place the Fractions that come out, over the middle Terms of the Equation, And under any of the middle Terms, if its Square multiplied into the Fraction ſtanding over its Head is greater than the Rectangle of the Terms on both Sides, place the Sign +; but if it be leſs, the Sign —. But under the firſt and laſt Term place the Sign +. And there will be as many impoſſible Roots, as there are Changes in the Series of the underwritten Signs from + to —, and — to + (l).

As

CXX. (*l*) For any Quadratic, whoſe laſt Term is affirmative, will have both its Roots impoſſible, if $\frac{1}{4}$ the Square of the middle Term does not exceed the Product of the Extremes (189); that is, if the Square of the middle Term multiplied into its Fraction $\frac{1}{4}$, does not exceed the Product of the Extremes: Now, the Roots of the propoſed Equation being Limits to the Roots of the Equation of Limits, and of all Equations (and conſequently of all Quadratics) deducible from it by the Multiplication of its Terms into thoſe of arithmetical Progreſſions, and converſely; the Roots of the Equations of Limits being the Limits of the Roots of the propoſed (267): if any Roots in the Equations of Limits are impoſſible, there will be as many impoſſible Roots in the propoſed, as in all the Quadratics deducible from it (271). But the Square of the middle Term of three in the propoſed, multiplied into its Fraction, has the ſame Ratio to the Product of the Terms adjacent to it, as the Square of the middle Term of the Quadratic deduced for thoſe three, multiplied into $\frac{1}{4}$, has to the Product of its Extremes: Therefore, as often as the Square of the middle Term of the propoſed, multiplied into its Fraction, is leſs than the Product of the Terms adjacent to it; ſo often alſo $\frac{1}{4}$ the Square of the middle Term of the Quadratic deduced for them, is leſs than the Product of the Extremes; and conſequently, two

As if you have the Equation $x^3 + pxx + 3pp x - q = 0$; I divide the ſecond of the Fractions of this Series

---

Roots of the propoſed are impoſſible: So often therefore marking with the Sign —, there will be two Alternations; and conſequently, the Number of impoſſible Roots, and of Alternations in the underwritten Signs, will be equal.

That *the Square of the middle Term of three (in any propoſed Equation) multiplied into its Fraction has the ſame Ratio, to the Product of the Extremes adjacent to it; as* $\frac{1}{4}$ *the Square of the middle Term of the correſponding Quadratic has, to the Product of its Extremes,* appears from this: that in deducing each limiting Quadratic from the correſponding Terms of the propoſed whoſe Index is n, there are ſo many Multiplications by the Series of Laterals deſcending or aſcending to Cypher, and ſo many Diviſions by the unknown, as there are Units in $n-2$ (CXXXVIII); and therefore, that the numeral Coefficients of the Terms of the Quadratic are generated from the continual Multiplication of the ſame Fractions, from whoſe Diviſion the Fraction over the middle Term of the propoſed emerges; and conſequently, that the Square of the numeral Coefficient in the Quadratic, multiplied into $\frac{1}{4}$, produces the Fraction placed over the correſponding middle Term in the propoſed Equation: that is, the Square of the middle Term in the propoſed, multiplied into its Fraction, has the ſame Ratio to the Product of the Terms adjacent to it; as $\frac{1}{4}$ the Square of the middle Term of the Quadratic, has to the Product of its Extremes.

Thus, let the propoſed be $x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$; there can be deduced Quadratics for every Term except the Extremes, by $(5-2=)$ 3 Multiplications and Diviſions: viz. 1ſt. for $x^5 - Ax^4 + Bx^3$, there is found $10x^2 - 4Ax + B$; 2d. for $-Ax^4 + Bx^3 - Cx^2$, there is found

$2Ax^2$

Series $\frac{3}{1}$. $\frac{2}{2}$. $\frac{1}{3}$, viz. $\frac{2}{2}$ by the firſt $\frac{3}{1}$, and the third $\frac{1}{3}$ by the ſecond $\frac{2}{2}$, and I place the Fractions that come out (viz. $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{3}$) over the middle Terms of the Equation, as follows;

$$x^3 + \overset{\frac{1}{3}}{p}xx + 3\overset{\frac{1}{3}}{p}px - q = 0.$$
$$+ \quad - \quad + \quad +$$

Then

$2Ax^2 - 2Bx + C$ (231); 3d. for $Bx^3 - Cx^2 + Dx$, there is found $Bx^2 - 2Cx + 2D$ (231); and laſtly, for $-Cx^2 + Dx - E$, is found $Cx^2 - 4Dx + 10E$ (231). Now the Equation, with its Fractions, is

$$x^3 - \overset{\frac{2}{3}}{A}x^4 + \overset{\frac{1}{2}}{B}x^3 - \overset{\frac{1}{2}}{C}x^2 + \overset{\frac{2}{3}}{D}x - E = 0:$$

but in the firſt and laſt Quadratic, the Ratio of $4 \times 4 \times \frac{1}{4}$ to $10 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; and in the ſecond and third Quadratic, the Ratio of $2 \times 2 \times \frac{1}{4}$ to 2 is $\frac{1}{2}$.

'Tis to be noted, 1ſt. that although it is a certain Criterion, that there are two impoſſible Roots, as often as the Square of any Term (multiplied into its Fractions) is deficient of the Product of the Terms adjacent; yet *it is no Proof that the Roots are real, if the Square of any Term (multiplied into its Fraction) exceeds the Product of the adjacent Terms*; and conſequently, that nothing can be concluded from ſuch Exceſs, concerning the Poſſibility or Reality of the Roots; that is, *the Roots may be imaginary, though there ſhould be ſuch an Exceſs.* 2*d.* That although real Roots in the propoſed, give real Roots in all the Equations of Limits; yet *real Roots in all the Equations of Limits, do not give real Roots in the propoſed* (271). Laſtly, *every Rule, depending upon the Compariſon of the Square of a Term with the Product of the adjacent Terms on either Side, muſt ſometimes fail to diſcover the impoſſible Roots*; becauſe the Number of ſuch Compariſons being always leſs by Unity than the Number of Quantities in the Equation, they cannot include and fix the Relations, upon which the Ratios of greater or leſs Inequality of the Squares and Products depend.

Then, becauſe the Square of the ſecond Term $ppxx$ multiplied into the Fraction over its Head $\frac{1}{3}$, viz. $\frac{ppx^4}{3}$ is leſs than $3ppx^4$, the Rectangle of the firſt Term x^3 and third $3ppx$, I place the Sign — under the Term pxx. But becauſe $9p^4xx$ (the Square of the third Term $3ppx$) multiplied into the Fraction over its Head $\frac{1}{3}$, is greater than nothing, and thereforé much greater than the negative Rectangle of the ſecond Term pxx, and the fourth $-q$, I place the Sign + under that third Term. Then, under the firſt Term x^3 and the laſt $-q$, I place the Sign +. And the two Changes of the underwritten Signs (which are in this Series $+-++$; the one from + into —, and the other from — into +) ſhew that there are two impoſſible Roots. And thus the Equation $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$ has two impoſſible Roots,

$$\overset{+}{x^3} - \overset{+}{4xx} + \overset{-}{4x} - \overset{+}{6} = 0.$$

Alſo the Equation $x^4 - 6xx - 3x - 2 = 0$ has two

$$\overset{+}{x^4} - \overset{+}{6xx} - \overset{-}{3x} - \overset{+}{2} = 0.$$

For this Series of Fractions $\frac{1}{1}.\frac{3}{2}.\frac{3}{3}.\frac{1}{2}$, by dividing the ſecond by the firſt, and the third by the ſecond, and the fourth by the third, gives this Series $\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}$, to be placed over the middle Terms of the Equation. Then the Square of the ſecond Term, which is here nothing, multiplied into the Fraction over Head, viz. $\frac{3}{2}$, produces nothing, which is yet greater than the negative Rectangle $-6x^4$ contained under the Terms on each Side x^4 and $-6xx$. Wherefore, under the Term that is wanting, I write +. In the reſt, I go on as in the former Example; and there comes out this Series of the underwritten Signs $+++-+$, where two Changes ſhew there are two impoſſible Roots. And after the ſame Way, in the Equation $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx$

$2xx - 5x - 4 = 0$, are discovered two impossible Roots, as follows;

$$\overset{+}{x^5} \overset{+}{-} \overset{\frac{2}{3}}{4x^4} \overset{+}{+} \overset{\frac{1}{2}}{4x^3} \overset{-}{-} \overset{\frac{1}{2}}{2xx} \overset{+}{-} \overset{\frac{2}{3}}{5x} \overset{+}{-} \overset{+}{4} = 0.$$

CXXI. *Where two or more Terms are wanting together, under the first of the deficient Terms you must write the Sign —, under the second Sign +, under the third the Sign —, and so on, always varying the Signs; except that under the last of such deficient Terms you must always place +, when the Terms next on both Sides the deficient Terms have contrary Signs.* As in the Equations

$$\begin{matrix} x^5 + ax^4 * * * + a^4 = 0, \text{ and} \\ + \quad + - + - + \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x^5 + ax^4 * * * - a^5 = 0; \\ + \quad + - + + \quad + \end{matrix}$$

the first whereof has four, and the latter two impossible Roots. Thus also the Equation,

$$\overset{+}{x^7} \overset{-}{-} \overset{\frac{3}{7}}{2x^6} \overset{+}{+} \overset{\frac{5}{9}}{3x^5} \overset{-}{-} \overset{\frac{3}{5}}{2x^4} \overset{+}{+} \overset{\frac{3}{5}}{x^3} \overset{-}{*} \overset{\frac{5}{9}}{*} \overset{+}{*} \overset{\frac{3}{7}}{-} \overset{+}{3} = 0$$

has six impossible Roots (*m*).

CXXII. *Hence*

CXXI. (*m*) Because, if the Signs on each Side the vanished Term be the same, 'tis a Token that there are impossible Roots (244); and therefore the Signs — and +, writen alternately, will by their Permutations denote their Number: But, if these Signs be contrary, it betokens that a Term may have vanished through an Equality of the similar Products of real Roots, with contrary Signs in that Term (112), so that one Permutation less will suffice; which is done by writing + under the latter Term, which will diminish the Number of Alternations by Unity.

CXXII. *Hence alſo may be known, whether the impoſſible Roots are among the affirmative or negative ones. For the Signs of the Terms over Head of the ſubſcribed changing Terms ſhew, that there are as many impoſſible affirmative Roots as there are Variations of them, and as many negative ones as there are Succeſſions without Variations.* Thus, in the Equation

$$\begin{array}{cccccccc} x^5 & - & 4x^4 & + & 4x^3 & - & 2xx - 5x & - 4 = 0, \\ + & & + & & - & & + \quad + & + \end{array}$$

becauſe by the Signs that are writ underneath that are changeable, viz. $+ - +$, by which it is ſhewn there are two impoſſible Roots, the Terms over Head $- 4x^4 + 4x^3 - 2xx$ have the Signs $- + -$, which by two Variations ſhew there are two affirmative Roots; therefore there will be two impoſſible Roots among the affirmative ones. Since therefore the Signs of all the Terms of the Equation $+ - + - - -$ by three Variations ſhew that there are three affirmative Roots, and that the other two are negative, and that among the affirmative ones there are two impoſſible ones; it follows, that the Equation has one true affirmative Root, two negative ones, and two impoſſible ones. But if the Equation had been

$$\begin{array}{cccccccc} x^5 & - & 4x^4 & - & 4x^3 & - & 2xx - 5x & - 4 = 0, \\ + & & + & & - & & - \quad + & + \end{array}$$

then the Terms over Head of the ſubſcribed former varying Terms $+ -$, viz. $- 4x^4 - 4x^3$, by their Signs that do not change $-$ and $-$, ſhew, that one of the negative Roots is impoſſible; and the Terms over the latter underwritten varying Terms $- +$, viz. $- 2xx - 5x$, by their Terms not varying $-$ and $-$ ſhew, that another of the negative Roots is impoſſible. Wherefore, ſince the Signs of the Equation $+ - - - - -$ by one Variation ſhew there is one affirmative Root, and that the other four are negative; it follows, there is one affirmative, two negative, and two impoſſible ones. And this is ſo, where there

there are not more impoſſible Roots than what are diſcovered by the Rule preceding. For there may be more, although it ſeldom happens (*n*).

Of

CXXII. (*n*) Becauſe the Series of Fractions, made by the Laterals, may be expounded, as in Numb. 101, to be thoſe whoſe Numerators are the Indices of the Terms, or the Numbers of the Terms ſubſequent; and their Denominators, the Indices of the Coefficients, or the Numbers of the Terms antecedent: Therefore, *the Fraction into which the Square of any Coefficient or Term is to be multiplied, is* often enunciated to be, *that whoſe Numerator is the Product of the Indices of the Term and of the Coefficient, and whoſe Denominator is the Product of thoſe Indices each increaſed by Unity: Or that, whoſe Numerator is the Product of the Numbers of the Terms preceding and ſubſequent, and Denominator the Product of them when increaſed each by Unity:* For 'tis manifeſt, that the Numerators decreaſe, and the Denominators increaſe, by Unity, in the Fractions compoſed of the Laterals; wherefore, in dividing each Subſequent by its Antecedent (that is, in the multiplying each Subſequent by the Reciprocal of the Antecedent (149) the Factors which compound the Denominators, exceed thoſe which compound the Numerators by Unity each.

Other Rules were publiſhed by Mr. M'Laurin, in his ſecond Letter to M. Foulkes, Eſq; to which the Reader is referred, as well as for the Proof of the following two Rules, which are thence recited as being of more univerſal Uſe.

1ſt. *Let the Unciæ of the Terms be found; let the Unciæ, each diminiſhed by Unity, be the Numerators, and the Unciæ, each doubled, be the Denominators of Fractions to be ſet over the middle Terms of the Equation: Then, as often as the Square of any Term, multiplied into its Fraction, does not exceed the Products of the Terms adjacent to it on each Side, taken in order and added and ſubducted alternately, ſo often there will be two impoſſible Roots.*

Of the TRANSMUTATIONS *of* EQUATIONS (*a*).

CXXIII. *Moreover, all the affirmative Roots of any Equation may be changed into negative ones, and the negative into affirmative ones, and that only by changing the Signs of the alternate Terms* (*b*).

Thus in the Equation $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, the three affirmative Roots will be changed into negative ones, and the two negative ones into Affir-

---

2d. *Let the Product of the Numbers of the Terms, antecedent and subsequent to any Term, be found: To this Product, let be added the Squares of the Distances of the Pairs of Terms adjacent, in order on each Side. Lastly, let into these Sums be multiplied the Products of these Pairs: Then as often as the Square of a Term, multiplied into Half the Product of the Number of Terms which are antecedent and consequent to it, does not exceed the Products of the adjacent Terms, multiplied into the said Sums added and subducted in order alternately, so often there will be two impossible Roots.*

CXXIII. (*a*) 221. *To transform an Equation, is to change it into another of the same Dimensions, whose Roots shall have a known Relation to the Roots of the proposed. Transformation is performed, by forming an Equation from the given Relation of the Roots, by finding the Value of the Roots of the proposed in this, and by substituting this Value and its Powers, into the Place of the unknown and its Powers, in the proposed Equation. Hence the Value of the Roots of the transformed being found, the Roots of the proposed will be found, by means of the Equation which expresses their given Relation.*

(*b*) Because that in the even Places the Coefficients involve an odd Number of Roots (218), under their contrary

Affirmatives, by changing only the Signs of the ſecond, fourth, and ſixth Terms, as is done here, $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2xx - 5x + 4 = 0$. This Equation has the ſame

---

contrary Signs; and that if an odd Number of Quantities is to be multiplied, all their Signs being changed before Multiplication, the Sign of the Product would be changed (88): and becauſe that in the odd Places the Coefficients involve an even Number of Roots, under the contrary Signs (218); and that if an even Number of Quantities is to be multiplied, all their Signs being changed before Multiplication, the Sign of the Product would remain the ſame (88): Therefore, by changing the Signs of the Terms in the even Places only, all theſe Coefficients will be changed into the Sum of the Roots, the Sums of their Products by threes, fives, &c. under their proper Signs: Conſequently, in this tranſformed Equation, all the affirmative Roots are changed into negative, and all the negative into affirmative (181). Now this tranſformed Equation, by tranſpoſing the Terms into the oppoſite Member, will be the ſame with the propoſed, having the Signs in the odd Places only changed (LXVII); conſequently, by changing the Signs of the alternate Terms, the affirmative Roots are changed into negative, and the negative Roots into affirmative. Thus, $x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 - Dx + E = 0$, by changing the Signs in the even Places, becomes $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 - Dx - E = 0$; and this, tranſformed by Tranſpoſition, becomes $-x^5 - Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 + Dx + E = 0$.

Again, let the Signs be changed in the even Places only; afterwards, let the Signs be changed in the odd Places only; theſe two tranſformed are the ſame in all Reſpects, except that the Signs of the Terms of the ſame Exponent are contrary: But by changing the Signs in the even Places only, the affirmative Roots were changed into negative, and the negative into affirmative; therefore, by changing the Signs in the odd Places only,

ſame Roots with the former, unleſs that in this, thoſe Roots are affirmative that were negative there, and negative here that were affirmative there; and the two impoſſible

---

the ſame Change will be made in the Roots. The Terms alſo of this latter being tranſpoſed, will give the former; and conſequently the Change is made in the Roots, by the Change of the Signs in the alternate Places. Thus $x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 - Dx + E = 0$, by changing the Signs in the odd Places only, becomes $-x^5 - Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 + Dx + E = 0$; and this, by Tranſpoſition, becomes $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 - Dx - E = 0$, in which the Signs in the even Places only are changed.

Again, by changing the Signs in the alternate Places, the Alternations in the propoſed become Succeſſions in the transformed, and the Succeſſions become Alternations; and the Number of Alternations in the propoſed is the ſame with that of the Succeſſions of the tranſformed, and the Number of Succeſſions the ſame with that of the Alternations: but the propoſed had ſo many affirmative Roots as Alternations, and negative Roots as Succeſſions (CXIX); therefore the transformed has ſo many negative Roots as the propoſed has affirmative, and ſo many affirmative as the propoſed has negative; and no Change has been made, except in the Signs of the Roots: whence they are the ſame with contrary Signs.

222. *By changing the Signs of all the Terms of an Equation, no Change is made in the Signs of the Roots.* For by changing the Signs of the Terms in the even Places, the Sums of the Terms in the odd Places are not changed; and by changing the Signs of the Terms in the odd Places, the Sums of the Terms in the even Places remain unchanged: wherefore, by changing the Signs of all the Terms, the Sum of all the Terms is unchanged, and remains $= 0$ (LXV); therefore, the Roots are the ſame

impoſſible Roots, which lay hid there among the affirmative ones, lie hid here among the negative ones; ſo that theſe being deducted, there remains only one Root truly negative.

CXXIV. There are alſo other Tranſmutations of Equations, which are of Uſe in divers Caſes. *For we may ſuppoſe the Root of an Equation to be compoſed any how out of a known and unknown Quantity, and then ſubſtitute what we ſuppoſe equivalent to it.* As if we ſuppoſe the Root to be equal to the Sum, or Difference, of any known and unknown Quantity. *For after this Rate we may augment or diminiſh the Roots of the Equation by that known Quantity, or ſubtract them from it; and thereby cauſe that ſome of them that were before negative, ſhall now become affirmative; or ſome of the affirmative ones become negative; or alſo that all ſhall become affirmative, or all negative* (*c*). Thus in the Equation $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, if I have a mind to augment the Roots by Unity, I ſuppoſe $x + 1 = y$, or $x = y - 1$; and then for x I write $y - 1$ in the Equation, and for the

---

ſame (CX): The Equation alſo, thus changed by tranſpoſing the Terms, is the ſame as at firſt. Thus $x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 - Dx - E = 0$, by changing all the Signs, becomes $-x^5 + Ax^4 - Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$; and, by Tranſpoſition, $x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 - Dx - E = 0$, as at firſt.

CXXIV. (*c*) 223. *When it is required to transform an Equation into another, whoſe Roots ſhall be leſs than the Roots of the propoſed, by a given Difference* e, *for* x *and its Powers ſubſtitute* y + e *and its Powers.* For, by Suppoſition, $x - e = y$; wherefore, $x = y + e$; whence, ſince x denotes all the Roots of the propoſed indiſcriminately, and y all thoſe of the transformed, each Root of the transformed will be deficient of each of the propoſed, by the given Quantity e. Thus, $y + e$ being

the Square, Cube, or Biquadrate of x, I write the like Power of $y - 1$, as follows:

x^4	$y^4 - 4y^3 + 6yy - 4y + 1$
$-x^3$	$-y^3 + 3yy - 3y + 1$
$-19xx$	$-19yy + 38y - 19$
$+49x$	$+49y - 49$
-30	-30
Sum	$y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0.$

And

substituted for x, in the Equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, it becomes

$$\begin{array}{rrrr} y^3 & +3e & +3e^2 & +e^3 \\ & -p & -2pe & -pe^2 \\ & & +q & +qe \\ & & & -r \end{array} = 0.$$

Each of whose Roots is less by the Quantity e.

224. *When it is required to transform an Equation into another, whose Roots shall be greater than the Roots of the proposed, by a given Excess* e, *for* x *and its Powers substitute* y — e *and its Powers.* For, by Supposition, $x + e = y$; whence $x = y - e$; and all the Roots of the transformed will exceed those of the proposed, by the given Excess e. Thus $y - e$ being substituted for x in the Equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, it becomes

$$\begin{array}{rrrr} y^3 & -3e & +3e^2 & -e^3 \\ & -p & +2pe & -pe^2 \\ & & +q & -qe \\ & & & -r \end{array} = 0.$$

Each of whose Roots is greater by the Excess e.

225. *When it is required to transform an Equation into another, whose Roots shall be the Excess of a given Quantity* e *above the Roots of the proposed, substitute* e — y *and its Powers for* x *and its Powers.* For, by Supposition, $x + y = e$;

And the Roots of the Equation that is produced, viz. $y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0$, will be

2, 3, 4,

$x + y = e$; whence $x = e - y$. Thus, $e - y$ being ſubſtituted for x in $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, it becomes

$$\begin{array}{l} e^3 - 3pe^2 + 3y^2e - y^3 \\ -pe^2 + 2pye - py^2 \\ qe - qy \\ -r \end{array} = 0.$$

Each of whoſe Roots is the Exceſs of e above the reſpective Roots of the propoſed.

226. *When an Equation is transformed by having its Roots diminiſhed, or increaſed, by a given Quantity* e; *the laſt Term of the transformed is the ſame with the propoſed, having* e *in the Place of* x; *the Signs of* e *being the ſame when the Roots are diminiſhed, but contrary to thoſe of* x, *when increaſed. The Coefficient of the Penultimate is found, by multiplying every Part of the Coefficient of* e *in the laſt Term, by the Index of* e *in each Part of the laſt Term, and dividing the Product by* e, viz. by the Quantity which is common to thoſe Parts. *The Coefficient of the Antepenultimate is found, by multiplying the Parts of the Coefficient of* e *in the Penultimate, by the Index of* e *in each, and by dividing the Product by* 2e, *and ſo on. Whence, in general,*

227. *The Terms of the transformed may be found without Involution.* For the laſt is had, by ſubſtituting e and its Powers for x and its Powers; and the following Terms, viz. penultimate, ante-penultimate, &c. are found, by multiplying every Part of the laſt found Term in which e is, by the Index of e in that Part; and by dividing the Products by the Product of e into the Index of y in that Term which is ſought: And the Indices of y are the Laterals, beginning with the penultimate Term. For the transformed Equation conſiſts of thoſe Powers of $y + e$, which are marked by the Indices of e in the Parts of the laſt Term, multiplied each by their reſpective

2, 3, 4, — 4, which before were 1, 2, 3, — 5, i. e. bigger by Unity. Now, if for x I had writ $y + 1$ $\frac{e}{x}$, there

Coefficients; wherefore, beginning from the laſt Term, the higheſt Index of e being n, the Unciæ of the Terms, reckoned from it, will be 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n \times n - 1}{1 \times 2}$, $\frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3}$, &c. where the lateral Diviſors are the Indices of y in the Term itſelf, as in Numb. 101, &c.

228. *When an Equation is tranſformed by the Diminution of its Roots by a given Quantity* e, *the affirmative Roots only are diminiſhed, but the negative Roots are augmented by that given Quantity* e; for the Sign of e in $y + e$, is the ſame with the Sign of the negative, and contrary to the Sign of the affirmative Roots (181).

229. Whence *if the Quantity* e, *by which the Roots are diminiſhed, is equal to any affirmative Root, that Root will vaniſh* by the Tranſformation; *and* conſequently the Product of the Roots, that is, the laſt Term of the tranſformed will vaniſh; that is, *the tranſformed will be lowered by one Dimenſion: Alſo if two, three, &c. Roots of the propoſed be equal to each other, and to* e, *the Quantity by which the Roots are diminiſhed; the Equation will be tranſformed into one of two, three, &c. Dimenſions lower.* Thus ſuppoſe an Equation, none of whoſe Roots are equal to each other, and but one of them equal to e, be propoſed, viz. $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, the tranſformed will be

$$\begin{array}{llll} y^4 + 4e & y^3 + e^2 & + e^3 & \\ - p & - 3pe & y^2 - 3pe^2 & y + e^4 = 0; \\ & + q & + 2qe & \\ & & - r & \end{array}$$

Whoſe laſt Term, viz. $e^4 - pe^3 + qe^2 - re + s$ is vaniſhed,

there would have come out the Equation $y^4 + 5y^3 - 10yy - \frac{5}{4}y + \frac{39}{16} = 0$, whereof there be two affirmative

---

vanished, upon Account of e being equal to one Root x; just as the Aggregate of the proposed would have vanished by its Substitution. Now dividing this transformed by y, it becomes one Dimension lower, viz.

$$y^3 \begin{matrix} +4e \\ -p \end{matrix} y^2 \begin{matrix} +6e^2 \\ -3pe \\ +q \end{matrix} y \begin{matrix} +e^3 \\ -3pe^2 \\ +2qe \\ -r \end{matrix} = 0:$$

Again, suppose two Roots x equal to e, and consequently to each other, the transformed will be

$$y^4 \begin{matrix} +4e \\ -p \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +6e^2 \\ -3pe \\ +q \end{matrix} y^2 * * = 0;$$

wanting the two last Terms, and dividing by y^2, is

$$y^2 \begin{matrix} +4e \\ -p \end{matrix} y \begin{matrix} +e^2 \\ -3pe \\ +q \end{matrix} = 0,$$

two Dimensions lower, and so on.

230. *And conversely, if by diminishing the Roots of an Equation by any Quantity, the last Term of the transformed should vanish, that Quantity is equal to some affirmative Root of the Equation; and if the penultimate Term also should vanish, the proposed has two Roots equal, and equal to that Quantity; and if, moreover, three Terms of the transformed should vanish, three Roots of the proposed are equal, and equal to that Quantity, &c.*

231. In general, *if every Term of an Equation, having* n *Number of equal Roots, be multiplied by the Index of the unknown Quantity in the Term, and the Product divided by the unknown Quantity, the transformed will contain* n — 1 *of those equal Roots:* For this is equivalent to a Transformation,

mative Roots, $\frac{1}{2}$ and $1\frac{1}{2}$, and two negative ones, $-\frac{1}{2}$ and $-6\frac{1}{2}$. But by writing $y-6$ for x, there would have come out an Equation whose Roots would have

---

mation, by diminishing the Roots by a Quantity equal to those equal Roots; in like manner, $n-2$ *of the equal Roots will remain, after two Multiplications and Divisions; and so on.*

232. *If* e, *the Quantity by which the Roots are diminished, be greater than the greatest affirmative Root of the proposed,* all its affirmative Roots will become negative (228); whence *all the Roots of the transformed are negative, and all its Terms affirmative* (181); *and the least Root of the transformed, answers to the greatest Affirmative of the proposed.* For the Excess of e above the Affirmatives is that, which makes them negative; and that Excess is least, which exceeds the greatest Affirmative: Hence also, *those Roots of the transformed, which are less than* e, *are those which were affirmative in the proposed; and those, which are greater than* e, *are those which were negative also in the proposed* (228).

233. *And conversely, if the Terms of the transformed become affirmative by having the Roots diminished by any Quantity, that Quantity is greater than the greatest affirmative Root of the proposed; and if the Sign — intervenes once, all the Roots of the transformed, except one, are negative; and that one is greater than* e *that Quantity.*

234. *To make all the Roots of any Equation negative, is to diminish them by a Quantity greater than the greatest affirmative Root; or to substitute an affirmative Quantity for the unknown, greater than the greatest affirmative Root:* For this Substitution is equivalent to Transformation, by Diminution of the Roots (227). 'Tis evident, that if the Quantity e is less than the least affirmative Root, the Quality of the Roots is unchanged, though the Affirmatives are diminished and the Negatives augmented by it.

235. *When*

have been 7, 8, 9, 1, viz. all affirmative; and writing for the ſame $[x]\ y + 4$, there would have come out thoſe Roots diminiſhed by 4, viz. $-3\ -2\ -1\ -9$. all of them negative.

After

---

235. *When an Equation is transformed, by having its Roots increaſed by a given Quantity* e, *the affirmative Roots only are increaſed, but the Negatives are diminiſhed by it*; its Sign being the ſame with that of the affirmative, and the contrary to that of the negative Roots.

236. Whence, *if this Quantity is equal to one, two, three, &c. of the negative Roots, ſo many Terms of the tranſformed will vaniſh, and it will be depreſſed by ſo many Dimenſions; and converſely, if the tranſformed be depreſſed, the propoſed has ſo many negative equal Roots, and equal to the Quantity* e *by which the Roots are increaſed.*

237. *If the Quantity* e, *by which the Roots are augmented, be greater* (*that is, more remote from nothing*) *than the greateſt negative Root*, all the Negatives will become Affirmative by the Tranſformation; and *all the Roots of the tranſformed will be affirmative, and the Terms alternately affirmative and negative; and the leaſt Root in the tranſformed anſwers to the greateſt negative Root of the propoſed*, and is the Exceſs of *e* the given Quantity above the greateſt negative Root of the propoſed: For the Exceſſes of *e*, above the negative Roots of the propoſed, are the affirmative Roots of the tranſformed which are leſs than *e*; and that Exceſs muſt be leaſt, which exceeds the greateſt; *and the Roots greater than* e, *were affirmative in the propoſed* (228).

238. *And converſely, if the Terms of the tranſformed become alternately poſitive and negative, the Quantity by which the Roots are augmented, is greater than the greateſt negative Root; and if one Succeſſion intervenes, there will be a negative Root greater than* e.

239. To

After this manner, by augmenting or diminiſhing the Roots, if any of them are impoſſible, they will ſometimes be more eaſily detected than before. Thus in the Equation $x^3 - 3aax - 3a^3 = 0$, there are no Roots that appear impoſſible by the preceding Rule; but if you augment the Roots by the Quantity a, writing $y - a$ for x,

239. *To make all the Roots of an Equation affirmative, is to augment them by a Quantity greater than the greateſt negative Root; or to ſubſtitute a negative Quantity for the unknown, greater than the greateſt negative Root: whereby the reſulting Quantity will become affirmative, if the Equation is of even Dimenſions; but negative, if of odd Dimenſions* (88): This Subſtitution being equivalent to Tranſformation, by augmenting the Roots.

240. *When an Equation is tranſformed, by having its Roots ſubducted from a given Quantity* e, as in Numb. 225, *the affirmative Roots of the propoſed become negative in the tranſformed, and each diminiſhes the Quantity* e; *likewiſe, the negative Roots of the propoſed become affirmative in the tranſformed, and each increaſes the Quantity* e. For if a be an affirmative Root, then $a = x$, and $x = e - y$; whence $a = e - y$, and $y = e - a$: Again, if a be a negative Root, then $-a = x$, and $x = e - y$; whence $-a = e - y$, and $y = e + a$.

241. *If the Quantity* e, *from which the Roots are ſubducted, be equal to one, two, &c. affirmative Roots of the propoſed, the tranſformed will be depreſſed ſo many Dimenſions; and converſely, if the tranſformed is depreſſed, the propoſed has ſo many affirmative Roots equal, and equal to* e.

242. *If the Quantity* e, *from which the Roots are ſubducted, is greater than the greateſt affirmative Root, all the Roots of the tranſformed will be affirmative* (240); *and the Terms, alternately, affirmative and negative; and converſely, if the Terms be alternately affirmative and negative, the Quantity* e *is greater than the greateſt affirmative Root.*

for x, you may now, by that Rule, discover two impossible Roots in the Equation resulting, $y^3 - 3ayy - a^3 = 0$.

CXXV. *By the same Operation you may also take away the second Terms of Equations. This will be done, if you subduct the known Quantity of the second Term of the Equation proposed, divided by the Number of Dimensions of the highest Term of the Equation, from the Quantity which you assume to signify the Root of the new Equation, and substitute the Remainder for the Root of the Equation proposed* (*d*). As if there was proposed the Equation $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, I subtract the known Quantity

---

CXXV. (*d*) That is, *divide the Coefficient of the second Term by the Index of the first, and connect the Quote to the Letter assumed by the contrary Sign.* For, by this means, if the second Term is affirmative, being the Sum of the Roots under a contrary Sign (218); each negative Root is increased by the affirmative Sum of the Roots divided by their Number (224); that is, the negative Sum of the Roots is increased by an equal affirmative Sum, and therefore vanishes: and if the second Term is negative, each affirmative Root is diminished by the negative Sum of the Roots, divided by their Number (223); that is, the affirmative Sum of the Roots is diminished by an equal negative Sum, and therefore vanishes.

243. *The Use of exterminating the second Term, is to make the Solution of the Equation more easy:* For *if the proposed be a Quadratic, the transformed will be unaffected, and* (LXXIV. h.) *its affirmative Root is equal to the negative; if* the proposed be *cubic, in the transformed either the Sum of two affirmative Roots is equal to one negative, or the Sum of two Negatives to one Affirmative; if* the proposed be *a Biquadratic, in the transformed, either the Sum of three Negatives is equal to one Affirmative, or the Sum of two Negatives is equal to the Sum of two Affirmatives, or one Negative is equal to the Sum of three Affirmatives: The Sum*

of

Quantity of the second Term, which is -4, divided by the Number of the Dimensions of the Equation, viz. 3, from the Species or Letter which is assumed to signify the new Root, suppose from y, and the Remainder $y + \frac{4}{3}$ I substitute for x, and there comes out

$$\begin{array}{rrrrr} y^3 & +4yy & +\frac{16}{3}y & +\frac{64}{27} & \\ & -4yy & -\frac{32}{3}y & -\frac{64}{9} & \\ & & +4y & +\frac{16}{3} & \\ & & & -6 & \\ \hline y^3 & * & -\frac{4}{3}y & -\frac{146}{27} & = 0. \end{array}$$

CXXVI. *By the same Method, the third Term of an Equation may be also taken away.* Let there be proposed the Equation $x^4 - 3x^3 + 3xx - 5x - 2 = 0$, and make $x = y - e$, and substituting $y - e$ in the room of x, there will arise this Equation;

$$y^4 \begin{matrix} -4e \\ -3 \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +6ee \\ +9e \\ +3 \end{matrix} yy \begin{matrix} -4e^3 \\ -9ee \\ -6e \\ -5 \end{matrix} y \left.\begin{matrix} +e^4 \\ +3e^3 \\ +3ee \\ +5e \\ -2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

The third Term of this Equation is $6ee + 9e + 3$ multiplied by yy. Where, if $6ee + 9e + 3$ were nothing,

---

of the affirmative Roots being always equal to the Sum of the negative Roots, in every Equation which wants the second Term (112). Now when the Roots of the transformed are found, those of the proposed are had from their known Relation (221).

244. *In every Equation which wants the second Term, if all its Roots are real, the third Term will be negative:* For the first Term being affirmative, the third ought to have the contrary Affection (112). If, therefore, the third Term is affirmative, when the second is wanting, there may be, and generally are, impossible Roots; but it does not follow, that when there are impossible Roots, the third Term shall be affirmative.

nothing, you would have what you desired. Let us suppose it therefore to be nothing, that we may thence find what Number ought to be substituted in this Case for e, and we shall have the quadratic Equation $6ee + 9e + 3 = 0$; which, divided by 6, will become $ee + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, or $ee = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}$, and extracting the Root $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$, or $= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$, that is, $= -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, and consequently either $= -\frac{1}{2}$ or $= -1$. Whence $y - e$ will be either $y + \frac{1}{2}$, or $y + 1$. Wherefore, since $y - e$ was writ for x; in the room of $y - e$ there ought to be writ $y + \frac{1}{2}$, or $y + 1$, for x, that the third Term of the Equation that results may be taken away. And that will happen in both Cases. For if for x you write $y + \frac{1}{2}$, there will arise this Equation, $y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} = 0$; but if you write $y + 1$, there will arise this Equation, $y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0$ (e),

CXXVII. *More*

CXXVI. (e) *The Quantity, proper to be extended with the assumed Letter* y, *in order that from its Substitution the transformed Equation shall want any assigned Term, will be found by the Solution of the Equation of the Coefficient of that Term in the transformed, into which the general Formula is changed.* Thus $x^5 - px^4 + qx^3 - rx^2 + sx - t = 0$, is transformed into

$x^5 =$	$y^5 +$	$5ey^4 +$	$10e^2y^3 +$	$10e^3y^2 +$	$5e^4y +$	e^5
$-px^4 =$	$-p$	$-4pe$	$-6pe^2$	$-4pe^3$	$-pe^4$	
$qx^3 =$		$+q$	$+3qe$	$+3qe^2$	$+qe^3$	
$-rx^2 =$			$-r$	$-2re$	$-re^2$	
$sx =$				$+s$	$+se$	
$-t =$					$-t$	

Now to find the Quantity proper for the Extermination of the second Term $5e - p \times y^4$; because $5e - p = 0$, then $5e = p$, and $e = \frac{p}{5}$: now putting it universally for

CXXVII. *Moreover, the Roots of Equations may be multiplied or divided by given Numbers; and after this Rate, the Terms of Equations be diminiſhed, and Fractions and radical Quantities ſometimes be taken away.*

As if the Equation were $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{4}{27}^6 = 0$; in order to take away the Fractions, I ſuppoſe y to be $= \frac{1}{3}z$; and

---

for the Dimenſions of the Equation, the Quantity will be $y \pm \frac{p}{n}$, as in the above Rule. Again to exterminate the third Term $\overline{10e^2 - 4pe + q} \times y^3$; becauſe $10e^2 - 4pe + q = 0$, then $e = \frac{1}{5}p + \sqrt{\frac{1}{5}5p^2 - \frac{1}{5}q}$ (LXXIV); that is, putting $5 = n$, $y \pm \frac{p}{n} + \sqrt{\frac{p^2}{n^2} - \frac{q}{n}}$ will be the Quantity to be ſubſtituted: and in like manner the fourth Term may be exterminated, by a Quantity found by the Solution of the cubic Equation, which is the Coefficient of the fourth Term of the transformed, and ſo on. Hence it appears, that *to find the Quantity proper to be connected with the aſſumed Letter, to exterminate the 2d, 3d, 4th, 5th, &c. Term of an Equation, there is to be ſolved a ſimple, a quadratic, a cubic, a biquadratic Equation, &c. reſpectively; and conſequently there is but one Quantity, which, connected with the unknown, will exterminate the 2d Term; two Quantities the 3d; three the 4th; four the 5th* (CXII); *and ſo on.*

In like manner an Equation which wants the 2d, 3d, &c. Term, may be transformed into one which ſhall have that Term, and whoſe Value ſhall be e; viz. by finding the Value of e in the Equation of the indeterminate Coefficients of that Term, and ſubſtituting $y \pm \frac{p}{n}$, $y \pm \frac{p}{n} + \sqrt{\frac{p^2}{n^2} - \frac{q}{n}}$, &c. for the 2d, 3d, &c. Term, reſpectively.

and then, by ſubſtituting $\frac{1}{3}z$ for y, there comes out this new Equation, $\frac{z^3}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0$, and having rejected the common Denominator of the Terms, $z^3 - 12z - 146 = 0$, the Roots of which Equation are thrice greater than before. And again, to diminiſh the Terms of this Equation, if you write $2v$ for z, there will come out $8v^3 - 24v - 146 = 0$, and dividing all by 8, you will have $v^3 - 3v - 18\frac{1}{4} = 0$; the Roots of which Equation are Half of the Roots of the former. And here, if at laſt you find v, make $2v = z$, $\frac{1}{3}z = y$, and $y + \frac{4}{3} = x$, and you will have x the Root of the Equation $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, as firſt propoſed.

And thus, in the Equation $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, to take away the radical Quantity $\sqrt{3}$; for x I write $y\sqrt{3}$, and there comes out the Equation $3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, which, dividing all the Terms by $\sqrt{3}$, becomes $3y^3 - 2y + 1 = 0$ (*f*).

CXXVII. (*f*) 245. *An Equation may be transformed into another whoſe Roots ſhall have a given Ratio to the Roots of the propoſed, viz.* y : x :: a : b ; *by finding the Value of* x *in an Equation formed from the Proportion*; *and by ſubſtituting this Value and its Powers for* x *and its Powers in the propoſed.* Thus if the Equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ be propoſed, becauſe $x = \frac{yb}{a}$ the tranſformed will be $\frac{y^3b^3}{a^3} - \frac{pb^2y^2}{a^2} + \frac{qby}{a} - r = 0$. Now, by multiplying by a^3, and dividing by b^3, the tranſformed is $y^3 - \frac{pa}{b}y^2 + \frac{qa^2}{b^2} - \frac{ra^3}{b^3} = 0$. Hence it appears, that, becauſe $x = \frac{yb}{a}$, and that $\frac{b}{a}$ is the Reciprocal of the given Ratio $\frac{a}{b}$, *the Tranſformation is done by ſubſtituting for* x *and its Powers, the Products of* y *and its Powers into the Reciprocal of the given Ratio*

and its ſimilar Powers; or, which is at length the ſame thing, by multiplying the Terms of the Equation by the reſpective Terms of a geometrical Progreſſion, beginning from Unity, in the Ratio of Unity, to a Fraction expreſſing the given Ratio.

246. Hence, *if it be required to multiply the Roots of an Equation by any given Quantity* a, *for* x *and its Powers,* y *divided by the Multiplier* a, *or* y *multiplied into* $\frac{1}{a}$ *the Reciprocal of the Multiplier, and its Powers, is to be ſubſtituted*; for, from the Nature of Multiplication, the Conſequent of the Ratio of Numb. 245 is Unity. *Or, which comes to the ſame thing, by multiplying the Terms of the Equation, by the reſpective Terms of a Series, (beginning from Unity) of Proportionals, in the Ratio of Unity to the Multiplier.*

247. *If it be required to divide the Roots of an Equation by any given Quantity* b, *for* x *and its Powers ſubſtitute* y *multiplied into the Diviſor, viz.* y b, *or* y *divided by the Reciprocal of the Diviſor, and its Powers*; becauſe the Antecedent of the Ratio is Unity (245). *Or, which comes to the ſame Thing, the Terms of the Equation are to be divided reſpectively by the Terms of a Series, beginning from Unity, of continued Proportionals in the Ratio of Unity to the Diviſor.*

248. *If the firſt Term of an Equation has a Coefficient different from Unity, it can be taken away by multiplying the Roots by that Coefficient*; thus $ax^3 - px^2 + qx - r = 0$, multiplied by 1, a, a^2, a^3 (246), becomes $ax^3 - pax^2 + qa^2x - a^3r = 0$. Now, by dividing by a, it becomes $x^3 - px^2 + qax - a^2r = 0$. Whence it appears, that the Operation will be performed at once, *by expunging it from the firſt Term, and by multiplying the Terms of the Equation, beginning with the third, by the Coefficient, its Square, Cube, &c. reſpectively.* Hence alſo

249. *If an Equation has Fractions, it may be transformed into one which ſhall be clear of Fractions, and whoſe firſt Term ſhall have Unity for its Coefficient; if the Terms being firſt multiplied by the Product of the Denominators, the Terms beginning with the third, are multiplied by the Coefficient of the firſt*

firſt Term, and its Powers reſpectively; as in Numb. 248. and the Coefficient is expunged from the firſt Term.

250. *An Equation can be cleared of Radicals by Multiplication, when the Radicals recur in ſuch Terms of the Equation, as that when a Series of Proportionals is formed in the Ratio of Unity to the Radical, the Product of the Numerators of the Indices of the factor Terms, in the Equation and Series, can be meaſured by their common Denominator:* For then the Products will be Unity or Rational (79). Thus if a Quadratic Radical recurs in the alternate Terms, it can be exterminated, as $x^5 - \sqrt{p}x^4 + qx^3 - \sqrt{p}rx^2 + sx - \sqrt{p}t = 0$ is cleared, by multiplying by the reſpective Terms of the Series $1, \sqrt{p}, p, p\sqrt{p}, p^2, p^2\sqrt{p}$, and becomes $x^5 - px^4 + pqx^3 - p^2rx^2 + p^2sx - p^3t = 0$. So $x^8 - \sqrt[3]{q^2}x^7 + \sqrt[3]{q}x^6 - rx^5 + \sqrt[3]{q^2}x^4 - \sqrt[3]{q}x^3 + sx^2 - \sqrt[3]{q^2}x + \sqrt[3]{qt} = 0$ into $1, \sqrt[3]{q}, \sqrt[3]{q^2}, q, q\sqrt[3]{q}, q\sqrt[3]{q^2}, q^2, q^2\sqrt[3]{q}, q^2\sqrt[3]{q^2}$, becomes $x^8 - qx^7 + qx^6 - qrx^5 + q^2x^4 - q^2x^3 + q^2sx^2 - q^3x + q^3t = 0$. Alſo $x^8 - \sqrt[2]{p}\sqrt[3]{q^2}\sqrt[4]{r^3}\sqrt[5]{s^4}x^7 + \sqrt[3]{q}\sqrt[4]{r^2}\sqrt[5]{s^3}x^6 - \sqrt[2]{p}\sqrt[4]{r}\sqrt[5]{s^2}x^5 + \sqrt[3]{q^2}\sqrt[5]{s}x^4 - \sqrt[2]{p}\sqrt[3]{q}\sqrt[4]{r^3}tx^3 + \sqrt[4]{r^2}\sqrt[5]{s^4}vx^2 - \sqrt[2]{p}\sqrt[3]{q^2}\sqrt[4]{r}\sqrt[5]{s^1}zx + \sqrt[3]{q}\sqrt[5]{s^2}A = 0$ into $1, \sqrt[2]{p}\sqrt[3]{q}\sqrt[4]{r}\sqrt[5]{s}, p\sqrt[3]{q^2}\sqrt[4]{r^2}\sqrt[5]{s^1}p\sqrt[2]{pq}\sqrt[4]{r^3}\sqrt[5]{s^3}, p^2q\sqrt[3]{qr}\sqrt[5]{s^4}, p^2\sqrt[2]{p}\sqrt[3]{q^2}r\sqrt[4]{rs}, p^2q^2r\sqrt[4]{r^2}s\sqrt[5]{s}, p^3\sqrt[2]{pq^2}\sqrt[3]{qr}\sqrt[4]{r^3}s\sqrt[5]{s^2}, p^4q^2\sqrt[3]{q^2}r^2s\sqrt[5]{s^3}$, becomes $x^8 - pqrsx^7 + pqrsx^6 - p^2qrsx^5 + p^2q^2rsx^4 - pq^2r^2stx^3 + p^3q^2r^2s^2x^2 - p^4q^3r^2s^2zx + p^4qr^2s^2A = 0$.

251. *The Coefficients, or the laſt Term of an Equation will be made diviſible by any Number or Numbers, if the Roots of the Equation be multiplied by that Number, or the Product of the aſſigned Numbers.* For if the Equation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ has its Roots multiplied into abc, it

CXXVIII. *Again, the Roots of an Equation may be changed into their Reciprocals, and after this Way the Equation may be ſometimes reduced to a more commodious Form* (*g*).

Thus, the laſt Equation $3y^3 - 2y + 1 = 0$, by writing $\frac{1}{z}$ for y, becomes $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, and all the Terms being multiplied by z^3, and the Order of the Terms changed, $z^3 - 2zz + 3 = 0$. *The laſt*

---

becomes $x^4 - abcpx^3 + a^2b^2c^2qx^2 - a^3b^3c^3rx + a^4b^4c^4s = 0$, (246) all whoſe Coefficients are diviſible by a, or b, or c, or abc.

CXXVIII (*g*) 252. *An Equation may be transformed into another whoſe Roots ſhall be the Reciprocals of the propoſed, by ſubſtituting Unity, or rather the laſt Term, divided by the aſſumed Letter* y, *and its Powers, into the Place of* x *and its Powers*; for then the Proportion (245) $x : y :: a : b$, becomes $x : 1 :: 1 : y$, and the Value of x is $\frac{1}{y}$. If we ſubſtitute Unity or any other Quantity beſide the laſt Term, we ſhall have fractional Coefficients, or the higheſt Term will have a Coefficient different from Unity; thus by ſubſtituting $\frac{1}{y}$ for x in the Equation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, we have $\frac{1}{y^4} - \frac{p}{y^3} + \frac{q}{y^2} - \frac{r}{y} + s = 0$; and by tranſpoſing, $s - \frac{r}{y} + \frac{q}{y^2} - \frac{p}{y^3} + \frac{1}{y^4} = 0$; and multiplying by y^4, $sy^4 - ry^3 + qy^2 - py + 1 = 0$; and if we divide by s, $y^4 - \frac{r}{s}y^3 + \frac{q}{s}y^2 - \frac{p}{s}y + \frac{1}{s} = 0$: In like manner if we ſubſtitute $\frac{a}{y}$ for x, we ſhall have $sy^4 - ray^3 + qa^2y^2 - pa^3y + a^4 = 0$, or $y^4 - \frac{ra}{s}y^3 + \frac{qa^2}{s}y^2 - \frac{pa^3}{s}y + \frac{a^4}{s} = 0$: Whereas if $\frac{s}{y}$ were ſubſtituted, we ſhould have $sy^4 -$

rsy^3

Term but one of an Equation may alſo by this Method be taken away, provided the ſecond was taken away before, as you ſee done in the precedent Example. Or if you would take away the laſt but two, it may be done, provided you have taken away the third before (*h*). *Moreover, the leaſt Root may be thus converted into the greateſt, and the greateſt into the leaſt, which may be of ſome Uſe in what follows* (*i*).

Thus, in the Equation $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, whoſe Roots are 3, 2, 1, — 5, if you write $\frac{1}{y}$ for x, there will come out the Equation $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0$, which, multiplying all the Terms by y^4, and dividing them by 30, the Signs being changed, becomes $y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}y^2 + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0$, the Roots whereof are $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{5}$; the greateſt of the affirmative Roots 3 being now changed into the leaſt $\frac{1}{3}$, and the leaſt 1 being now made greateſt, and the negative Root — 5, which of all was the moſt remote from 0, now coming neareſt to it.

There are alſo other Tranſmutations of Equations, but which may all be performed after that Way of tranſmutating we have ſhewn, when we took away the third Term of the Equation (*k*).

CXXIX.

$rsy^3 + qs^2y^2 - ps^3y + s^4 = 0$, *i. e.* dividing by s, $y^4 - ry^3 + qsy^2 - ps^2y + s^3 = 0$.

(*h*) Becauſe by the Operation the Order of the Coefficients is now inverted.

(*i*) Becauſe as $x = \frac{1}{y}$, and $y = \frac{1}{x}$, when x is greateſt, y muſt be leaſt; and converſely.

(*k*) 253. *An Equation is transformed into another whoſe Roots ſhall be mean Proportionals between the Roots of the propoſed and any given Quantity* a, *by ſubſtituting for* x *and its Powers, the Square of the aſſumed* y *divided by the Quan-*

CXXIX. *From the Generation of Equations it is evident, that the known Quantity of the ſecond Term of the Equation, if its Sign be changed, is equal to the Aggregate of all the Roots under their proper Signs; and that of the third Term equal to the Aggregate of the Rectangles of each two of the Roots; that of the fourth, if its Sign be changed, is equal to the Aggregate of the Contents under each three of the Roots; that of the fifth is equal to the Aggregate of the Contents under each four, and ſo on* ad infinitum (*l*).

---

tity a, *and the Powers of this Quote.* For the Proportion (245) $x : y :: a : b$ becomes $x : y :: y : a$, whence the Value of x is $\frac{y^2}{a}$. Thus if in $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, $\frac{y^2}{a}$ be ſubſtituted for x, we have $\frac{y^6}{a^3} - \frac{py^4}{a^2} + \frac{qy^2}{a} - r = 0$, that is, $y^6 - pay^4 + qa^2y^2 - ra^3 = 0$, whoſe Roots are mean Proportionals between a and the Roots of the propoſed.

254 *An Equation may be transformed into another whoſe Roots ſhall be the Square, Cube,* &c. *Roots of the propoſed, by ſubſtituting for* x *its ſuppoſed Value, that is,* y^2, y^3, &c. for ſince $\sqrt{x} = y$ then $x = y^2$; or if $\sqrt[3]{x} = y$, then $x = y^3$; and hence it is, that Equations can be depreſſed, if the Indices of all the Terms can be meaſured by the Index of the loweſt Power of x (184): Thus $x^6 + qx^4 + sx^2 + v = 0$ is depreſſed to $y^3 + qy^2 + sy + v = 0$, by putting $x^2 = y$, whence $x = \sqrt{y}$; and the Roots of the transformed are the ſquare Roots of the propoſed (221,) as in N°. 184.

255. *In every kind of Transformation,* if the Quantity by which the Roots are diminiſhed, multiplied, &c. be a real Quantity, *any imaginary Quantity* diminiſhed, &c. by it, *muſt remain imaginary; wherefore all imaginary Roots remain after Transformation.* It is alſo manifeſt, that when the Roots of the transformed are found, thoſe of the propoſed may be found, from their known Relation to thoſe of the transformed (221.)

CXXIX. (*l*) See Numb. 95, &c.

Let

Let us assume $x = a$, $x = b$, $x = -c$, $x = d$, &c. or $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, $x - d = 0$, and by the continual Multiplication of these we may generate Equations, as above. Now, by multiplying $x - a$ by $x - b$, there will be produced the Equation $xx \begin{matrix} - a \\ - b \end{matrix} x + ab = 0$; where the known Quantity of the second Term, if its Signs are changed, viz. $a + b$, is the Sum of the two Roots a and b, and the known Quantity of the third Term is the only Rectangle contained under both. Again, by multiplying this Equation by $x + c$, there will be produced the cubick Equation $x^3 \begin{matrix} - a \\ - b \\ + c \end{matrix} xx \begin{matrix} + ab \\ - ac \\ - bc \end{matrix} x + abc = 0$, where the known Quantity of the second Term having its Signs changed, viz. $a + b - c$, is the Sum of the Roots a, and b, and $-c$; the known Quantity of the third Term $ab - ac - bc$ is the Sum of the Rectangles under each two of the Roots a and b, a and $-c$, b and $-c$; and the known Quantity of the fourth Term under its Sign changed, $-abc$, is the only Content generated by the continual Multiplication of all the Roots, a by b into $-c$. Moreover, by multiplying that cubick Equation by $x - d$, there will be produced this biquadratick one;

$$x^4 \begin{matrix} - a \\ - b \\ + c \\ - d \end{matrix} x^3 \begin{matrix} + ab \\ - ac \\ - bc \\ + ad \\ + bd \\ - cd \end{matrix} xx \begin{matrix} + abc \\ - abd \\ + bcd \\ + acd \end{matrix} x - abcd = 0.$$

Where the known Quantity of the second Term under its Signs changed, viz. $a + b - c + d$, is the Sum of all the Roots; that of the third, $ab - ac - bc + ad + bd - cd$, is the Sum of the Rectangles under every two Roots; that of the fourth, its Signs being changed, $-abc + abd - bcd - acd$, is the Sum of the Contents under each Ternary; that of the fifth, $-abcd$, is the only Content under them all.

CXXX. *And hence we first infer, that of any Equation that involves neither Surds nor Fractions all the rational Roots, and the Rectangles of any two of the Roots, and the Contents of any three or more of them, are some of the integral Divisors of the last Term; and therefore when it is evident that no Divisor of the last Term is either a Root of the Equation, or Rectangle, or Content of two or more Roots, it will also be evident that there is no Root, or Rectangle, or Content of Roots, except what is surd* (*m*).

CXXXI. *Let us suppose now, that the known Quantities of the Terms of any Equation under their Signs changed, are* p, q, r, s, t, v, *viz. that of the second* p, *that of the third* q, *of the fourth* r, *of the fifth* s, *and so on. And the Signs of the Terms being rightly observed, make* $p = a$, $pa + 2q = b$, $pb + qa + 3r = c$, $pc + qb + ra + 4s = d$, $pd + qc + rb + sa + 5t = e$, $pe + qd + rc + sb + ta + 6v = f$, *and so on* in infinitum, *observing the Series of the Progression. And* a *will be the Sum of the Roots,* b *the Sum of the Squares of each of the Roots,* c *the Sum of the Cubes,* d *the Sum of the Biquadrates,* e *the Sum of the Quadrato-cubes,* f *the Sum of the Cubo-cubes, and so on.*

As in the Equation $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, where the known Quantity of the second Term is -1, of the third -19, of the fourth $+49$, of the fifth -30; you must make $1 = p$, $19 = q$, $-49 = r$, $30 = s$. And there will thence arise $a = (p =) 1$, $b = (pa + 2q = 1 + 38 =) 39$, $c = (pb + qa + 3r = 39 + 19 - 147 =) -89$, $d =$

CXXX. (*m*) It can have no fractional Root, for a fractional Root would give fractional Coefficients, and if they were removed the highest Term would have a Coefficient different from Unity, which is contrary to Supposition; now Roots which are neither Integers nor Fractions must be Surds (161). Also, if the highest Term of an Equation has a Coefficient different from Unity, one, or some, or all the generating Binomes (121) had either a Coefficient in the first Number, or their second Number fractional.

(*p c*

($pc + qb + ra + 4s = -89 + 741 - 49 + 120 =$) 723. Wherefore the Sum of the Roots will be 1, the Sum of the Squares of the Roots 39, the Sum of the Cubes — 89, and the Sum of the Biquadrates 723, viz. the Roots of that Equation are 1, 2, 3, and — 5, and the Sum of theſe $1 + 2 + 3 - 5$ is 1; the Sum of the Squares, $1 + 4 + 9 + 25$, is 39; the Sum of the Cubes, $1 + 8 + 27 - 125$, is — 89; and the Sum of the Biquadrates, $1 + 16 + 81 + 625$, is 723 (*n*).

CXXXI. (*n*) This Rule follows eaſily from the algebraical Expreſſions of the Quantities, and the binomial Theorem. For q being $= p$, and p the Sum of the Roots (CXXIX), $- q$ the Sum of the Products of 2 Roots, their Signs being changed (95), r the Sum of the Products of three Roots (CXXIX), $- s$ the Sum of the Products of 4 Roots, with their Signs changed (95), t the Sum of the Products of 5 Roots, and ſo on; putting $x + y + z$, &c. for the Roots: Becauſe $(pa - 2q)$ the Square of the Sum leſs twice the Sum of the Products of the Roots is equal to the Sum of the Squares of the Roots, therefore

from $pa = x^2 + y^2 + z^2$, &c. $+ 2xy + 2xz + 2zy$, &c.
ſubduct $-2q = 2xy + 2xz + 2zy$, &c.
remains $pa + 2q = x^2 + y^2 + z^2$, &c. the Sum of the Squares $= b$.

Again, becauſe pb the Sum of the Squares multiplied into the Sum of the Roots is equal to the Sum of the Cubes, more the Sum of the Squares of each Root into the other Roots; and becauſe $- qa$ the Sum of the Products of two Roots into the Sum of the Roots is equal to the Sum of the Squares of each Root into the other Roots, more thrice the Sum of the Products of three Roots, i. e. $3r$; therefore ſubducting the latter Products from the former, i. e. $pb - qa + 3r$, the Reſidue, viz. $pb + qa - 3r$ will be the Sum of the Cubes leſs thrice the Sum of the Products of three Roots, which being therefore added, we have the Sum of the Cubes.

Thus

Thus from $p\,b = x^3 + y^3 + z^3$, &c. $+ \overline{2y + 2z}$, &c. $\times x^2 + \overline{2x + 2z}$, &c. $\times y^2 + \overline{2x + 2y} \times z^2$, &c. ſubduct $-a\,q = \overline{xyz}$, &c. $\times 3 + \overline{2y + 2z}$, &c. $\times x^2 + \overline{2x + 2z}$, &c. $\times y^2 + \overline{2x + 2y}$, &c. $\times z^2$, &c. remains $p\,b + a\,q = x^3 + y^3 + z^3$, &c. $- \overline{xyz}$, &c. $\times 3$; add $3r = \overline{xyz}$, &c. $\times 3$

the Sum $p\,b + a\,q + 3r = x^3 + y^3 + z^3$, &c. $= c$, the Sum of the Cubes.

Again, becauſe $p\,c$ the Sum of the Cubes into the Sum of the Roots is equal to the Sum of the Biquadrates more the Sum of the Cubes of each Root into the other Roots; and becauſe $-q\,b$ the Sum of the Products of two Roots into the Sum of the Squares is equal to the Sum of the Cubes of each Root into the other Roots more the Sum of the Squares of each Root into the Sums of the Products of two Roots; therefore ſubducting the latter Products from the former, that is, $-q\,b$ from $p\,c$, the Reſidue $p\,c + q\,b$ is equal to the Sum of the Biquadrates leſs the Sum of the Squares of each Root into the Sum of the Products of two Roots: Now $r\,a$ the Sum of the Products of three Roots into the Sum of the Roots is equal to the Sum of the Squares of each Root into the Sum of the Products of two Roots more $-4s$, quadruple the Sum of the Products of four Roots; adding therefore the latter Product to the former Reſidue, the Sum, $pc + qb + ra$, is equal to the Sum of the Biquadrates, more quadruple the Sum of the Products of four Roots; therefore ſubducting $-4s$ this quadruple Sum, the Reſidue is the Sum of the Biquadrates. Thus from $p\,c = x^4 + y^4$, &c. $+ \overline{y + z}$, &c. $\times x^3 + \overline{x + z}$, &c. $\times y^3 +$, &c. ſubduct $- q\,b = \overline{yz}$, &c. $\times x^2 + \overline{xz +}$, &c. $\times y^2 + \overline{y + z}$, &c. $\times x^2 + \overline{x + z}$, &c. $\times y^3$, &c. remains $p\,c + q\,b = x^4 + y^4$ &c. $- \overline{yz}$, &c. $\times x^2 - \overline{xz + nl +}$, &c. $\times y^2$, &c. add $r\,a = \overline{xyzn + xyzl}$, &c. $\times 4 + \overline{yz +}$, &c. $\times x^2 + \overline{xz +}$, &c. $\times y^2$, &c.

Sum

Sum $pc+qb+ra=x^4+y^4$, &c. $+\overline{xyzn+xyzl,\text{ &c.}}\times 4$
ſubduct $-4s=$ $\overline{xyzn+xyzl,\text{ &c.}}\times 4$

remains $pc+qb+ra+4s=x^4+y^4+z^4$, &c. $=d$.
Sum of the Biquadrates.

In like Manner, from $pd=x^5+z^5+$, &c. $+\overline{y+z+,\text{ &c.}}\times x^4+\overline{x+z,\text{ &c.}}\times y^4$, &c.
ſubduct $-qc=\overline{yz,\text{ &c.}}\times x^3+\overline{xz+,\text{ &c.}}\times y^3+\overline{y+z}\times x^2+\overline{x+z+,\text{ &c.}}\times y^4$, &c.
remains $pd+qc=x^5+y^5$, &c. $-\overline{yz+,\text{ &c.}}\times x^3-\overline{xz+\text{ &c.}}\times y^3$, &c.
add $rb=\overline{yzn+yzm,\text{ &c.}}\times x^2$, &c. $+\overline{yz+,\text{ &c.}}\times x^3$ &c.
the Sum $pd+qc+rb=x^5+y^5$, &c. $+\overline{yzn+yzm,\text{ &c.}}\times x^2$, &c.
ſubduct $-sa=\overline{xyznl+yznlm,\text{ &c.}}\times 5+\overline{yzn+yzm,\text{ &c.}}\times x^2$, &c.
rem. $pd+qc+rb+sa=x^5+y^5$, &c. $-\overline{xyznl+yznlm,\text{ &c.}}$
$\times 5$ add $5t$ $=$ $\overline{xyznl+yzlmn,\text{ &c.}}\times 5$

Sum $pd+qc+rb+sa+5t=x^5+y^5+z^5$, &c. $=e$. Sum of Quadratocubes, and ſo on.

Now that the Sum of the Roots multiplied into the Sum of the Products of two Roots, of three Roots, of four Roots, &c. is equal reſpectively to triple, quadruple, quintuple, &c. the Sum of the Products of the Roots, by threes, by fours, by fives, &c. more the Sum of the Squares of each Root into the Sum of the other Roots, into the Sum of their Products by twos, by threes, &c. reſpectively, appears from this; that in thoſe reſpective Multiplications, each Root is multiplied either into a Product into which it had entered before, and then the Power of it, either Square, Cube, &c. is produced; or into a Product into which it had not entered before; and then this Product is produced ſo many times as there are Factors in it. Thus xyz is produced by x into yz, by y into xz and by z into xy, viz. thrice, and ſo of every other

other Product of three different Factors, when the Sum of the Roots is multiplied into the Sum of the Products of two Roots. Thus x into yzn, y into xzn, z into zyn, and n into zyz, produces $xyzn$; that is, $xyzn$ is produced four times, and so of every other Product of four different Factors, when the Sum of the Roots is multiplied into the Sum of the Products of three Roots. Thus again, x into $yznm$, y into $xznm$, z into $xynm$, n into $xyzm$, and m into $xyzn$, produces $xyznm$, that is, $xyznm$ is produced five times, and so of every other Product of five different Factors, when the Sum of the Roots is multiplied into the Sum of the Products by four Roots; and so on continually.

Of the LIMITS *of the Roots of* EQUATIONS.

CXXXII. *AND hence are collected the* Limits *between which the Roots of the Equation shall consist, if none of them is impossible. For when the Squares of all the Roots are affirmative, the Sum of the Squares will be affirmative, and therefore greater than the Square of the greatest Root. And by the same Argument, the Sum of the Biquadrates of all the Roots will be greater than the Biquadrate of the greatest Root, and the Sum of the Cubo-Cubes greater than the Cubo-Cube of the greatest Root* (*a*).

CXXXIII. *Wherefore, if you desire the Limit which no Roots can pass, seek the Sum of the Squares of the Roots, and extract its Square Root. For this Root will be* greater *than the greatest Root of the Equation.* But you will come nearer the greatest Root if you seek *the Sum of the Biquadrates, and extract its Biquadratick Root; and yet* nearer,

---

CXXXII. (*a*) The Sums of the even Powers are affirmative, whether the Roots are affirmative or negative. (88)

if

if you ſeek the Sum of the Cubo-Cubes, and extract its Cubo-cubical Root; and ſo on in infinitum. *(b)*

CXXXIII. (*b*) For let all the Roots x, y, z, n, m, &c. be affirmative, and x the leaſt Root, y greater than x, z greater than y, and ſo on continually. Then ſince x^2 is to y^2 as x to a third Proportional in the Ratio of x to y, and x^3 is to y^3 as x to a fourth Proportional in the ſame Ratio; and ſince x is not greater than y, the Ratio of x^2 to y^2 will not be leſs than the Ratio of x^3 to y^3, and (comp.) the Ratio $x^2 + y^2$ to y^2 will not be leſs than the Ratio of $x^3 + y^3$ to y^3 and (altern.) the Ratio of $x^2 + y^2$ to $x^3 + y^3$, will not be leſs than the Ratio of y^2 to y^3: But ſince y is not greater than z, the Ratio of 1 to y, that is, of y^2 to y^3 is not leſs than the Ratio of 1 to z, that is, of z^2 to z^3; therefore the Ratio of $x^2 + y^2$ to $x^3 + y^3$ is not leſs than the Ratio of z^2 to z^3, and (altern.) the Ratio of $x^2 + y^2$ to z^2 is not leſs than the Ratio of $x^3 + y^3$ to z^3; and therefore (comp.) the Ratio of $x^2 + y^2 + z^2$ to z^2 is not leſs than the Ratio of $x^3 + y^3 + z^3$ to z^3. And by the ſame reaſoning, the Ratio of $x^2 + y^2 + z^2 + n^2$ to n^2 will not be leſs than the Ratio of $x^3 + y^3 + z^3 + n^3$ to n^3, and ſo on continually; *viz.* the Ratio of the Sum of the Squares to the Square of the greateſt Root, or to the Square of that Root, than which there is no greater in the Equation, is not leſs than the Ratio of the Sum of the Cubes to the Cube of the ſame Root; that is, it is equal if all the Roots be equal, but greater if any of the Roots be unequal. And after the ſame Manner, the Ratio of the Sum of the Cubes to the Cube of the greateſt Root is not leſs than the Ratio of the Sum of the Biquadrates to the Biquadrate of the greateſt Root, and ſo on continually. Therefore the Ratio of the Sum of the Squares to a mean Proportional between this Sum and the Square of the greateſt Root, is greater than the Ratio of the Sum of the Cubes to the firſt of two mean Proportionals between this Sum and the Cube of the greateſt Root, and this Ratio is greater than the Ratio of the Sum of the Biquadrates to the firſt of three mean Proportionals between

Thus, in the precedent Equation, the Square Root of the Sum of the Squares of the Roots, or $\sqrt{39}$, is $6\frac{1}{2}$ nearly, and $6\frac{1}{2}$ is farther diſtant from 0 than any of the Roots 1, 2, 3, — 5. But the Biquadratick Root of the Sum of the Biquadrates of the Roots, viz. $\sqrt[4]{723}$, which is $5\frac{1}{4}$ nearly, comes nearer to the Root that is moſt remote from nothing, viz. — 5.

CXXXIV. *If, between the Sum of the Squares and the Sum of the Biquadrates of the Roots you find a mean Proportional, that will be a little greater than the Sum of the Cubes of the Roots connected under affirmative Signs (c). And hence,*

---

tween this Sum and the Biquadrate of the greateſt Root, and ſo on continually: that is, the Ratio of the ſquare Root of the Sum of the Squares to the greateſt Root is greater, or more remote from the Ratio of Equality, than the Ratio of the Cube Root of the Sum of the Cubes to the greateſt Root; and this Ratio is greater than the Ratio of the Biquadrate Root of the Sum of the Biquadrates to the greateſt Root, and ſo on continually. Now ſhould any of thoſe Roots be changed into negative, yet thoſe Powers of them, whoſe Indices are even Numbers, will continue affirmative (88); and conſequently, it follows univerſally, that the Ratio of the Square Root of the Sum of the Squares to the greateſt Root, or moſt diſtant from nothing, is greater than the Ratio of the Biquadrate Root of the Sum of Biquadrates to the greateſt Root; and this greater than the Ratio of the Cubo-Cubic Root of the Sum of the Cubo-Cubes to the greateſt, and ſo on continually.

CXXXIV. (*c*) Since all the Roots under affirmative Signs are not equal, and ſince x^2, x^3, x^4, &c. are continually Proportional, alſo y^2, y^3, y^4, &c. and z^2, z^3, z^4, &c. &c. therefore the Products of the correſponding Terms $x^2 \times y^2$, $x^3 \times y^3$, $x^4 \times y^4$, will be continued Proportionals; that is, $x^3 \times y^3$ is a geometrical Mean between $x^2 \times y^2$ and $x^4 \times y^4$, and therefore between $x^3 \times y^4$ and $x^4 \times y^2$; therefore the Sum of the Extremes is greater than

hence, the half Sum of this mean Proportional, and of the Sum of the Cubes collected under their proper Signs, found as before, will be greater than the Sum of the Cubes of the Affirmative Roots, and the half Difference greater than the Sum of the Cubes of the Negative Roots.

CXXXV. *And consequently, the greatest of the Affirmative Roots will be less than the Cube Root of that half Sum, and*

---

than double the Mean, viz. $\overline{x^2 \times y^4} + \overline{x^4 \times y^2}$ is greater than $2 \times \overline{x^3 \times y^3}$ (Eucl. V. 25); but the Product of the Sums $\overline{x^2 + y^2}$ into $\overline{x^4 + y^4}$ is equal to the Products of x^2 into x^4, and of y^2 into y^4 (that is, to the Squares of x^3 and y^3 (N°. 79.) together with the Rectangles x^2 into y^4 and y^2 into x^4 (Eucl. II. 4.) now the Square of the Sum $x^3 \times y^3$ is equal to the Squares of x^3 and y^3 together, with $2 \times \overline{x^3 \times y^3}$ (Eucl. II. 4.) therefore the Product of the Sum $x^2 \times y^2$ into $x^4 \times y^4$ is greater than the Square of the Sum $x^3 + y^3$. Whence if a third Proportional P be taken in the Ratio of $x^2 + y^2$ to $x^3 + y^3$, it will be less than $x^4 + y^4$, and (as was shewn before) the Product of the Sum $x^2 + y^2 + z^2$ into the Sum $\overline{P + z^4}$, cannot be less than the Square of the Sum $x^3 + y^3 + z^3$; and consequently, the Product of the Sum $x^2 + y^2 + z^2$, into $x^4 + y^4 + z^4$, will be greater than the Square of $x^3 + y^3 + z^3$. In like manner, the Product of the Sum $x^2 + y^2 + z^2 + n^2$ into $x^4 + y^4 + z^4 + n^4$, is greater than the Square of the Sum $x^3 + y^3 + z^3 + n^3$, and so on continually, viz. If between the Sum of the Squares and the Sum of the Biquadrates a mean Proportional be taken, it will be greater than the Sum of the Cubes under affirmative Signs. And after the same manner, if a mean Proportional be taken between the Sum of the Biquadrates and Sum of the Cubo-cubes, it will be greater than the Sum of the Quadrato-cubes, and so on *in infinitum*.

and the greateſt of the Negative Roots leſs than the Cube Root of that Semi-difference (*d*).

Thus, in the precedent Equation, a mean Proportional between the Sum of the Squares of the Roots 39, and the Sum of the Biquadrates 723, is nearly 168. The Sum of the Cubes under their proper Signs was, as above,—89, the half Sum of this and 168 is $39\frac{1}{2}$, the Semi-difference is $128\frac{1}{2}$. The Cube Root of the former, which is about $3\frac{1}{2}$, is greater than the greateſt of the Affirmative Roots 3. The Cube Root of the latter, which is $5\frac{1}{27}$ nearly, is greater than the Negative Root -5. By which Example it may be ſeen how near you may come this Way to the Root, where there is only one Negative Root or one Affirmative one.

CXXXVI. *And yet you might come nearer ſtill, if you found a mean Proportional between the Sum of the Biquadrates of the Roots and the Sum of the Cubo-Cubes, and if from the Semi-Sum and Semi-Difference of this, and of the Sum of the Quadrato-Cube of the Roots, you extracted the Quadrato-Cubical Roots. For the Quadrato-Cubical Root of the Semi-Sum would be greater than the greateſt Affirmative Root, and the Quadrato-Cubic Root of the Semi-Difference would be greater*

CXXXV. (*d*) For the Sum of the Cubes under their proper Signs added to the Sum of the Cubes taken affirmatively, is double the Sum of the Cubes of the affirmative Roots, (N°. 22.) and the Sum of the Cubes under their proper Signs ſubducted from the Sum of the Cubes taken affirmatively, is double the Sum of the Cubes of the negative Roots (36); but a mean Proportional between the Sum of the Squares and the Sum of the Biquadrates, is greater than the Sum of the Cubes taken affirmatively (CXXXIV.); therefore half the Sum of this mean Proportional, and of the Sum of the Cubes of the Roots under their proper Signs, exceeds the Sum of the Cubes of the affirmative Roots, and half their difference exceeds the Sum of the negative Roots; wherefore, by extracting the Cube Roots of the half Sum and of the half Difference, Limits are found which exceed the greateſt affirmative, and the greateſt negative Root.

greater than the greateſt negative Root, but by a leſs Exceſs than before (*e*). *Since therefore, any Root, by augmenting or*

CXXXVI. (*e*) By the ſame method of Reaſoning it follows, that if a mean Proportional be taken between the Sum of the Biquadrates and Sum of the Cubo-Cubes, half the Sum of this Mean and the Sum of the Quadrato-Cubes of the Roots under their proper Signs, will be greater than the Sum of the Quadrato-Cubes of the Affirmative Roots, and half the Difference greater than the Sum of the Quadrato-Cubes of the negative Roots; and, conſequently the Quadrato-Cubic Root of this half Sum, will be greater than the greateſt affirmative Root; and the Quadrato-Cubic Root of the half Difference greater than the greateſt negative Root, and ſo on continually.

256. The Cubic and Quadrato-Cubic Roots of the half Sum and half Difference being greater than the Sum of the affirmative and Sum of the negative Roots; (CXXXIV. *c*.) and the Sum of the affirmative Roots, when many, being greater than the greateſt affirmative Root; alſo the Sum of the negative Roots, when many, being greater than the greateſt negative Root; it follows, that when there is but one affirmative, or one negative Root, it is itſelf the Sum; and that therefore *the Cubic and Quadrato-Cubic Roots of the half Sum and half Difference, are nearer Limits to the greateſt affirmative and negative Roots, when they are ſingle in the Equation, than when there are more than one of each.*

257. *The Ratio, which the Exceſs of a mean Proportional between the Sum of the Squares and the Sum of the Biquadrates of the Roots above the Sum of their Cubes under affirmative Signs, has to the Cube of the greateſt Root, is greater than the Ratio, which the Exceſs of a mean Proportional between the Sum of the Biquadrates of the Roots, and the Sum of their Cubo-Cubes above the Sum of their Quadrato-Cubes under affirmative Signs has to the Quadrato-Cube of the greateſt Root; and this Ratio is greater than the Ratio which the Exceſs of a mean Proportional between the Sum of the Cubo-Cubes of the Roots and the Sum of their Biquadrato-Biquadrates above the Sum of their Biquadrato-Cubes under*

or diminiſhing all the Roots, may be made the leaſt, and then the

---

affirmative Signs has to the Biquadrato-Cube of the greateſt Root, and ſo on continually: for let R, S, T, denote reſpectively thoſe above-mentioned mean Proportionals; r, s, t, reſpectively the Sums of the Cubes, Quadrato-Cubes, and Biquadrato-Cubes, under affirmative Signs; and c, e, g, reſpectively the Sums of the Cubes, Quadrato-Cubes, and Biquadrato-Cubes, under their own Signs: Then is $\frac{R+c}{2}$ the Sum of the Cubes of the affirmative Roots increaſed by the Quantity $\frac{R-r}{2}$; and $\frac{R-c}{2}$ the Sum of the Cubes of the negative Roots changed into affirmative, and increaſed by $\frac{R-r}{2}$: Alſo $\frac{S+e}{2}$ the Sum of the Quadrato-Cubes of the affirmative Roots, increaſed by the Quantity $\frac{S-s}{2}$; and $\frac{S-e}{2}$ the Sum of the Quadrato-Cubes of the negative Roots changed into affirmative, and increaſed by the Quantity $\frac{S-s}{2}$: Alſo $\frac{T+g}{2}$ the Sum of the Biquadrato-Cubes of the affirmative Roots, increaſed by the Quantity $\frac{T-t}{2}$; and $\frac{T-g}{2}$ the Sum of the Biquadrato-Cubes of the negative Roots changed into affirmative, and increaſed by $\frac{T-t}{2}$, and ſo on continually. But the Ratio of the Sum of the Cubes of the Roots, whether Affirmative or Negative under affirmative Signs, to the Cube of the greateſt Root, viz. moſt remote from nothing under an affirmative Sign, is greater than the Ratio of the Sum of the Quadrato-Cubes of the ſame Roots to the Quadrato-Cube of the greateſt Root; and this Ratio greater than the Ratio of

the leaſt converted into the greateſt, and afterwards all beſides the

the Sum of the Biquadrato-Cubes to the Biquadrato-Cube of the greateſt Root, and ſo on continually: Whence becauſe alſo the Ratio of $\frac{R-r}{2}$ to the Cube of the greateſt Root is greater than the Ratio of $\frac{S-s}{2}$ to the Quadrato-Cube of the greateſt Root, and this Ratio greater than the Ratio of $\frac{T-t}{2}$ to the Biquadrato-Cube of the greateſt Root, and ſo on continually; it follows, that the Ratio of $\frac{R+c}{2}$ to the Cube of the greateſt Root is greater than the Ratio of $\frac{S+s}{2}$ to the Quadrato-Cube of the greateſt Root, and this Ratio greater than the Ratio of $\frac{T+t}{2}$ to the Biquadrato-Cube of the greateſt Root, and ſo on continually.

258. *If* $\frac{R+c}{2}$, $\frac{S+e}{2}$, $\frac{T+g}{2}$, *be reſpectively greater than the Cube, Quadrato-Cube, Biquadrato-Cube, of the greateſt Root*; then the Ratio of $\frac{R+c}{2}$ to the firſt of two mean Proportionals between $\frac{R+c}{2}$ and the Cube of the greateſt Root, will be greater than the Ratio of $\frac{S+e}{2}$ to the firſt of four mean Proportionals between $\frac{S+e}{2}$ and the Quadrato-Cube of the greateſt Root; and this Ratio greater than the Ratio of $\frac{T+g}{2}$ to the firſt of ſix mean Proportionals between $\frac{T+g}{2}$ and the Biquadrato-Cube of the

the greateſt be made negative, it is manifeſt how any Root deſired may be found nearly (f).

CXXXVII.

---

greateſt Root, and ſo on continually: that is, *the Cube Root of the Quantity* $\frac{R\pm c}{2}$ *will be greater, and therefore the more remote from the greateſt affirmative or negative Root of the Equation, than the Quadrato-Cubic Root of the Quantity* $\frac{S\pm e}{2}$; *and this Root exceeds the greateſt Root more than the Biquadrato-Cubic Root of the Quantity* $\frac{T\pm g}{2}$ *exceeds it, and ſo on continually. But if* $\frac{R\pm c}{2}$, $\frac{S\pm e}{2}$, $\frac{T\pm g}{2}$, *be reſpectively leſs than the Cube, Quadrato-Cube, Biquadrato-Cube, of the greateſt Root, it may happen* that the Ratio of $\frac{R\pm c}{2}$ to ſome intermediate Cube N^3 between $\frac{R\pm c}{2}$ and the Cube of the greateſt Root is leſs than the Ratio of $\frac{S\pm e}{2}$ to N^5, and this Ratio leſs than the Ratio of $\frac{T\pm g}{2}$ to N^7; and conſequently, *that the Cube Root of the Quantity* $\frac{R\pm c}{2}$ *may exceed the greateſt Root by a leſs Quantity than the Quadrato-Cubic Root of* $\frac{S\pm e}{2}$; *and this by a leſs Quantity than the Biquadrato-Cubic Root of* $\frac{T\pm g}{2}$, *and ſo on continually.*

(f) *When it is known that there is but one affirmative or one negative Root, and that it is the greateſt,* and conſequently that $\frac{R\pm c}{2}$, $\frac{S\pm e}{2}$, $\frac{T\pm g}{2}$, are greater reſpectively than the Cube, Quadrato-Cube, Biquadrato-Cube, &c. of the greateſt

CXXXVII. *If all the Roots except two are negative, thoſe two may be both together found this Way.*

The Sum of the Cubes of thoſe two Roots being found according to the precedent Method, as alſo the Sum of the Quadrato-Cubes, and the Sum of the Quadrato-Quadrato-Cubes of all the Roots: between the two latter Sums ſeek a mean Proportional, and that will be the Difference between the Sum of the Cubo-Cubes of the affirmative Roots, and the Sum of the Cubo-Cubes of the negative Roots nearly; and conſequently, the half Sum of this mean Proportional, and of the Sum of the Cubo-Cubes of all the Roots, will be the Sum of

---

greateſt Root; *the ſuperior Limit of the greateſt affirmative and greateſt negative Root, will be had by extracting the Cube Root of the Quantity* $\frac{R \pm e}{2}$; *but more accurately, by extracting the Quadrato-Cubic Root of the Quantity* $\frac{S \pm e}{2}$; *and nearer ſtill, by extracting the Biquadrato-Cubic Root of* $\frac{T \pm g}{2}$, *and ſo on continually: But if it appears that the ſingle Root is not the greateſt of the Equation, the Cube Root of* $\frac{R \pm c}{2}$ *may be a more accurate Limit than the Quadrato-Cubic Root* $\frac{S \pm e}{2}$, *and this more accurate than of the Biquadrato-Cubic Root of* $\frac{T \pm g}{2}$, *and ſo on continually* (258). *Whence it is, that the Author guards againſt a Miſapplication of this Rule to the finding the ſuperior Limit of any Root when it is not the greateſt, to any deſired Accuracy, by adding, ſince any Root, by augmenting or diminiſhing all the Roots, may be made the leaſt,* (223) *and then the leaſt converted into the greateſt* (CXXVII.) *and afterwards all beſides the greateſt be made Negative, a Method is given, by which any aſſigned Root may be obtained to any Accuracy; viz. by making each Root in rotation the greateſt, a ſuperior Limit can be found for each, which ſhall*

of the Cubo-Cubes of the affirmative Roots, and the Semi-Difference will be the Sum of the Cubo-Cubes of the negative Roots. Having therefore both the Sum of the Cubes, and alſo the Sum of the Cubo-Cubes of the two affirmative Roots, from the Double of the latter Sum ſubtract the Square of the former Sum, and the Square Root of the Remainder will be the Difference of the Cubes of the two Roots. And having both the Sum and Difference of the Cubes, you will have the Cubes themſelves. Extract their Cube Roots, and you will nearly have the two affirmative Roots of the Equation. And if in higher Powers you ſhould do the like, you will have the Roots yet more nearly (*g*). But theſe Limitations,

---

not exceed it above a given Difference; that is, the Roots themſelves may be approximated as near as you pleaſe.

CXXXVII. (*g*) For having found the Sums of all the Powers as high as the Biquadrato-Cubes, the mean Proportional between the Sum of the Squares and Sum of the Biquadrates will be but little greater than the Sum of all the Cubes under affirmative Signs (CXXXIV). Whence $\frac{R+c}{2}$ the half Sum of this mean Proportional, more the Sum of the Cubes under their proper Signs, will but little exceed the Sum of the Cubes of the two affirmative Roots; and the mean Proportional between the Sum of the Biquadrato-Cubes and the Sum of the Quadrato-Cubes under their proper Signs, will but little exceed the Sum of the Cubo-Cubes under their proper Signs; that is, but little exceed the Difference of the Sums of the Cubo-Cubes of the two affirmative and of the negative Roots (XXIV): Whence the half Sum of this mean Proportional more the Sum of all the Cubo-Cubes under affirmative Signs, will but little exceed the Sum of the Cubo-Cubes of the two affirmative Roots, and half their Difference the Sum of the Cubo-Cubes of the negative Roots. Now the Square of the Sum of the Cubes of the two affirmative Roots is equal to the Sum of their Cubo-Cubes (79) more double the Product of their Cubes (Eucl. Book II. Prop. 4.) ſubducting therefore this Square from double the Sum of their Cubo-Cubes, the Reſidue

tions, by reaſon of the Difficulty of the Calculus, are of leſs Uſe, and extend only to thoſe Equations that have no imaginary Roots. Wherefore I will now ſhew how to find the Limits another Way, which is more eaſy, and extends to all Equations (*h*).

CXXXVIII.

Reſidue is the Sum of their Cubo-Cubes leſs double the Product of their Cubes, that is, the Square of the Difference of their Cubes (Eucl. Book II. Prop. 7.); wherefore extracting the Square Root of this Reſidue, there is had the Difference of the Cubes of the two affirmative Roots; and the Sum added to the Difference, is double the Cube of the greater (22. 36.) and the Difference ſubducted from the Sum is double the Cube of the leſs, conſequently the Cube Root of the half Sum is nearly the greater, and the Cube Root of the half Difference but little exceeds the leſs affirmative Root.

(*h*) This Rule for finding the ſuperior Limits (were it not for the great Labour of the Calculation, and that it will not ſerve when there are impoſſible Roots, for the Root of an imaginary Quantity cannot be approximated to) gives nearer and therefore better Limits than *the Limits obtained by Transformations*, as is next ſhewn, becauſe theſe latter *are true, or mean Limits, viz. equidiſtant from the Roots.*

259. *The greateſt negative Coefficient of the Equation, made affirmative and increaſed by Unity, is a ſuperior Limit to the greateſt affirmative Root:* for if all the Coefficients were equal and negative, and the Equation tranſformed by diminiſhing the Roots, by any of them increaſed by Unity, (224) all the Terms of the Transformed muſt become Affirmative (the Sum of the Affirmative Parts in each being greater than the Sum of the negative Parts) a fortiori therefore, if the Roots are diminiſhed by the greateſt increaſed by Unity when unequal, and ſome of them Affirmative, the Terms muſt all become Affirmative, therefore the Roots of the Tranſformed are all Negative (232): Whence the Quantity by which they were diminiſhed, is greater than the greateſt Root

CXXXVIII. *Multiply every Term of the Equation by the Number of its Dimenſions, and divide the Product by the Root of the Equation. Then again multiply every one of the Terms that come out by a Number leſs by Unity than before, and divide the Product by the Root of the Equation. And ſo go on, by always multiplying by Numbers leſs by Unity than before, and dividing the Product by the Root, till at length all the Terms are deſtroyed, whoſe Signs are different from the Sign of the firſt or higheſt Term, except the laſt. And that Number will be greater than any affirmative Root; which being writ in the Terms that come out for the Root, makes the Aggregate*

---

(233). But this is commonly a very remote Limit, and uſeleſs if no Term but the laſt is Negative.

260. $\sqrt[4]{\frac{q^2-2pr+2s}{n}}$ *is a Theorem given by Mr* Mac Laurin *for finding an inferior Limit to the greateſt Root*, that is, *from the Square of the Coefficient of the third Term, ſubduct double the Product of the ſecond and fourth; to the Reſidue add double the Coefficient of the fifth Term, divide the Sum by the Index of the firſt Term, and extract the Biquadratic Root of the Quote, and it will be a little leſs than the greateſt Root*; for from the algebraical Expreſſions of the Quantities and the binomial Theorem, it appears that the Coefficient of the third Term is the Sum of the Products of the Roots, taken two by two; whence its Square is equal to the Sum of the Squares of the Products of two by two, more the Sum of double the Products of the Squares of each Root into the Products of the other Roots taken two by two, and more alſo the Sums of the Products of the Roots taken four by four; alſo that the Product of the Coefficients of the ſecond and fourth Terms is the Sum of the Products of the Squares of each Root into the Products of the Roots taken two by two, more the Sum of the Products of the Roots taken four by four; and that therefore ſubducting double this Product from the Square of the third Coefficient, the Reſidue is the Sum

of

Aggregate of thoſe which were each Time produced by Multiplication to have always the ſame Sign with the firſt or higheſt Term of the Equation.

As if there was propoſed the Equation $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$. I firſt multiply this thus; $\overset{5}{x^5} - 2\overset{4}{x^4} - 10\overset{3}{x^3} + 30\overset{2}{xx} + 63\overset{1}{x} - 120\overset{0}{.}$ Then I again multiply the Terms that come out divided by x, thus; $5\overset{4}{x^4} - 8\overset{3}{x^3} - 30\overset{2}{xx} + 60\overset{1}{x} + 63\overset{0}{,}$ and dividing the Terms that come out again by x, there comes out $20x^3 - 24xx - 60x + 60$; which, to leſſen them, I divide by the greateſt

---

of the Squares of the Products of the Roots taken two by two, leſs double the Sum of the Products of the Roots taken four by four: Wherefore adding this double Sum, that is, double the Coefficient of the fifth Term, the Sum is the Sum of the Products of the Square of the Roots taken two by two; that is, the Sum of the Products of the Square of each Root into the Sum of the Squares of the other Roots: Now the Sum of the Products of the Square of each Root into the Sum of the Squares of the other Roots, is leſs than the Product of the Sum of the Biquadrates of the Roots into half the Index of the higheſt Term leſs Unity; and this laſt Product is leſs than the Product of the Biquadrate of the greateſt Root into the Index of the higheſt Term; therefore dividing the above Sum of double the Coefficient of the fifth Term, and the Difference of the Square of the Coefficient of the third Term, and the double Product of the ſecond and fourth Terms, by the Index of the higheſt Term, the Quote is leſs than the Biquadrate of the greateſt Root, and the biquadrate Root of the Quote is leſs than the greateſt Root. Hence, *if the Equation be Cubic, this Limit is to be found by* $\sqrt[4]{\frac{qq - 2pr}{n}}$ *becauſe* $2s = 0$.

greateſt common Diviſor 4, and you have $5x^3-6xx-15x+15$. Theſe being again multiplied by the Progreſſion 3, 2, 1, 0, and divided by x, become $15xx-12x-15$, and again divided by 3 become $5xx-4x-5$. And theſe multiplied by the Progreſſion 2, 1, 0, and divided by $2x$ become $5x-2$. Now, ſince the higheſt Term of the Equation x^5 is Affirmative, I try what Number writ in theſe Products for x will cauſe them all to be Affirmative. And by trying 1, you have $5x-2=3$ Affirmative; but $5xx-4x-5$, you have -4 Negative. Wherefore the Limit will be greater than 1. I therefore try ſome greater Number, as 2. And ſubſtituting 2 in each for x, they become,

$$\begin{array}{llllll} 5x & -2 & =8 & & & \\ 5xx & -4x & -5 & =7 & & \\ 5x^3 & -6xx & -15x & +15 & =1 & \\ 5x^4 & -8x^3 & -30xx & +60x & +63 & =79 \\ x^5 & -2x^4 & -10x^3 & +30xx & +63x & -120=46. \end{array}$$

Wherefore, ſince the Numbers that come out 8. 7. 1. 79. 46. are all Affirmative, the Number 2 will be greater than the greateſt of the affirmative Roots. In like manner, if I would find the Limit of the negative Roots, I try negative Numbers. *Or that which is all one, I change the Signs of every other Term, and try Affirmative ones.* But having changed the Signs of every other Term, the Quantities in which the Numbers are to be ſubſtituted, will become

$$\begin{array}{llllll} 5x & +2 & & & & \\ 5xx & +4x & -5 & & & \\ 5x^3 & +6xx & -15x & -15 & & \\ 5x^4 & +8x^3 & -30xx & -60x & +63 & \\ x^5 & +2x^4 & -10x^3 & -30xx & +63x & +120. \end{array}$$

Out of theſe I chuſe ſome Quantity wherein the negative Terms ſeem moſt prevalent; ſuppoſe $5x^4+8x^3-30xx-60x+63$, and here ſubſtituting for x the Numbers 1 and 2, there come out the negative Numbers -14 and -33. Whence the Limit will be greater than -2. But ſubſtituting the Number 3, there comes out

out the affirmative Number 234. And in like manner in the other Quantities, by ſubſtituting the Number 3 for x, there comes out always an affirmative Number, which may be ſeen by bare Inſpection. Wherefore the Number -3 is greater than all the negative Roots. And ſo you have the Limits 2 and -3, between which are all the Roots (*i*).

CXXXIX.

CXXXVIII. (*i*) Becauſe that when the Roots are diminiſhed by any Quantity e, the laſt Term of the transformed differs nothing from the propoſed, but in the letter denoting the unknown; and that the preceding Terms of the transformed are derived according to this Rule from the laſt Term (226, 227); therefore by treating the propoſed according to this Rule, Equations are derived which are the preceding Terms of the transformed, ſuppoſing the propoſed to be its laſt Term. Now if the Quantity e, by which the Roots are diminiſhed, is greater than the greateſt affirmative Root, the Roots become all negative, and all the Terms of the transformed become Affirmative (232); and converſely (233). Therefore that affirmative Quantity, which ſubſtituted in all the Equations derived according to this Rule, makes the Reſults all Affirmative, that is, of the ſame Sign with the higheſt Term of the Equation, is greater than the greateſt affirmative Root. Again, If the Quantity e, by which the Roots are increaſed, is greater than the greateſt negative Root, the Roots become all Affirmative; and all the Terms of the transformed, if the Equation is of even Dimenſions, become Affirmative and Negative alternately; but if of odd Dimenſions, Negative and Affirmative alternately (238); and converſely (239. Therefore that negative Quantity, which ſubſtituted in the given Equation, and in the Expreſſions by this Rule derived from it, makes the Reſults, when the Dimenſions are even, Affirmative and Negative alternately, and when the Dimenſions are odd, Negative and Affirmative alternately, is greater than the greateſt negative Root.

Hence

CXXXIX. *But the Invention of theſe Limits is of Uſe both in the Reduction of Equations by rational Roots, and in the*

Hence *the ſuperior Limit of the greateſt affirmative Root is found by inquiring the leaſt integer affirmative Number, which, ſubſtituted in thoſe Expreſſions, will give them all Affirmative* (234): And *it muſt be greater than the Coefficient of the ſecond Term of the transformed divided by the Dimenſions*, ſuppoſing all the Roots to be Affirmative (for were the Roots all equal it muſt be greater than this Quote); *and it muſt not be greater than the greateſt negative Coefficient of the propoſed made Affirmative, and increaſed by Unity* (259): And in this Inquiry *we ought always to begin with that Expreſſion thus derived*, that is, that Term of the transformed, *where the negative Roots ſeem moſt to prevail.*

Hence alſo *the ſuperior Limit of the greateſt negative Root is found, by inquiring the leaſt integer negative Number, which, ſubſtituted in theſe Expreſſions, will give them alternately Affirmative and Negative, if the Dimenſions are even, but Negative and Affirmative alternately, if odd* (239): And *it muſt be greater than the Coefficient of the ſecond Term of the transformed divided by the Dimenſions, and not greater than the greateſt affirmative Coefficient of the propoſed made negative, and increaſed by Unity*; (for if the Signs were changed in the alternate Places, it would be the greateſt negative Coefficient, and greater than the greateſt affirmative Root (CXXIII); and is therefore now greater than the greateſt negative Root): *and in this Inquiry we ought to begin with that Expreſſion or Term, where the affirmative Roots ſeems moſt to prevail.*

But the ſuperior Limit of the negative Roots is moſt eaſily found by the Subſtitution of affirmative Numbers, having firſt changed the Signs of the alternate Terms of the transformed (CXXIII); for the ſuperior Limit of the affirmative Roots of the transformed, will be the ſuperior Limit of the negative Roots of the propoſed.

CXXIII.

the Extraction of Surd Roots out of them; leſt we might ſometimes go about to look for the Root beyond theſe Limits. Thus,

---

261. *An Equation ſhall be transformed into another, which ſhall have all its Roots affirmative, by ſubſtituting for* x *the ſuperior Limit of the affirmative Roots* e, *diminiſhed by* y, *the aſſumed Letter denoting the unknown; viz. by ſubſtituting* e — y: for the Exceſs being always poſitive, and the Terms of the higheſt Power of the ſubſtituted Quantity $e - y$, having their Signs alternately + and —, and making a Part of every Term of the transformed, will be therefore always greater than the Parts of the ſame Terms, which have oppoſite Signs; ſo that the Signs of this higheſt Power every where prevailing, the Terms of the transformed will be alternately Affirmative and Negative: whence all its Roots are Affirmative (142).

262. Again, *having found* — e *the ſuperior Limit of the negative Roots, if for* x *we ſubſtitute* y — e, *all the Roots of the Transformed will become Affirmative; for all the Terms, as before, will be alternately Affirmative and Negative, and therefore all the Roots Affirmative.* If the Roots of the propoſed are all Negative, it is plain that they will become all Affirmative, by changing the Signs of the alternate Terms (CXXIII). Having found the ſuperior Limit of the greateſt affirmative Root, the Limits of the other Roots or *the mean Limits are found in the following Manner, in which we ſuppoſe, for the ſake of Brevity, that all the Roots of the propoſed are Affirmative*; it being an eaſy Tranſmutation of any Equation (261, 262). Let alſo *the Roots be denominated 1ſt, 2d, 3d, &c. according to their Magnitude, the leaſt being the firſt, &c.*

263. Having found *the ſuperior Limit of the greateſt Root, if it be ſubſtituted for the unknown* x, *the Reſult will be poſitive* (234, 209, 261) for no Number which is not a Root, if all the Roots are poſſible, can make the Reſult = 0; and if there are impoſſible Roots, their Product is Affirmative, and cannot alter the Sign of the Product of the poſſible Roots.

If

Thus, in the laſt Equation, if I would find the rational Roots, if perhaps it has any; from what we have ſaid, it

If o *be ſubſtituted for* x, by deſtroying all the Terms in which x was, *the Reſult will be the laſt Term with its proper Sign*, that is + if the Dimenſions of the Equations are even, and — if odd; for by Suppoſition the Roots are all Affirmative, and therefore the Factors all Reſiduals (181); that is, the Signs of the Terms are alternately + and — (59); and the laſt +, or —, according as the Index is even, or odd, (88).

If for x *a Number leſs than the leaſt Root be ſubſtituted, the Sign of the reſulting Quantity will be the ſame as that of the laſt Term*; for all the Factors ſtill retain their own Signs, and are Reſiduals.

If for x *a Number, mean between the firſt and ſecond Roots*, (that is, greater than the leaſt, and leſs than the ſecond) *be ſubſtituted, the Sign of the reſulting Number will be contrary to the Sign of the laſt Term of the propoſed*; for the leaſt Factor is become poſitive, or a Binomial, and the others remaining Reſidual, the Sign of the Product is contrary.

If for x *a Number, mean between the ſecond and third Roots, be ſubſtituted, the Reſult will have the Sign of the laſt Term of the propoſed*; for two Factors having changed their Signs, the Sign of the Product will remain the ſame as before they were changed, and therefore the Sign of the whole Product will be the ſame as before: *and ſo on continually*; that is, *if there be ſucceſſively ſubſtituted Numbers leſs than the leaſt Root, and mean between all the Roots, the Reſults will be in order the ſame, and the contrary alternately, with the Sign of the laſt Term of the propoſed.*

264. *And converſely, If Numbers ſucceſſively ſubſtituted for* x, *give Reſults whoſe Signs are the ſame and contrary alternately to the Signs of the laſt Term of the propoſed, thoſe Numbers* are in Succeſſion, leſs than the leaſt Root, mean between the 1ſt, 2d, 3d, &c. Roots of the propoſed; and therefore *limit them*. Whence, *if two Num-*

bers

it is certain they can be no other than the Diviſors of the laſt Term of the Equation, which here is 120. Then

---

bers ſubſtitutea for x, *give Reſults with contrary Signs, one or more Roots are limited by thoſe Numbers*; for the Signs being contrary, one is contrary to the Sign of the laſt Term of the propoſed, and therefore one, or an odd Number of Factors, muſt have changed their Signs.

265. *If the Roots of an Equation be ſucceſſively diminiſhed by Quantities equal to its Roots, beginning with the leaſt or firſt Root, the laſt Term of the transformed will be always exterminated*, (229); and its Penultimate or rather (having reduced the Dimenſions by dividing by x) *the laſt Term of the reduced is the Product of the Exceſſes of the other Roots of the propoſed above that Root, whereby they were diminiſhed in the Transformation* (232). Now, *when they are diminiſhed by the leaſt, or firſt Root*, thoſe Exceſſes remain all poſitive; but the Factors, or Exceſſes, or Reſiduals, are one leſs in Number in the reduced, than in the propoſed; *therefore the Sign of the laſt Terms of this reduced, and of the propoſed, are contrary.* Again, *if the Roots are diminiſhed by the ſecond Root*, the Product of the Exceſſes of the other Roots above it, that is, *the laſt Term of this reduced will have its Sign the ſame with that of the laſt Term of the propoſed*; for one Exceſs is become negative, i. e. one Factor a Binomial, and the reſidual Factors are alſo leſs by one, whence the whole Number of reſidual Factors is diminiſhed by an even Number, and conſequently their Product retains its Sign; that is, the Signs of the laſt Terms of the reduced and propoſed are the ſame. Again, *if the Roots are diminiſhed by the third Root, the Sign of the laſt Term of the reduced will be contrary to that of the laſt Term of the propoſed*; for two Exceſſes will have become negative, that is, two Factors will have become binomial, and one reſidual Factor is wanting: whence the whole Number of Reſiduals is diminiſhed by three, an odd Number, and therefore the Sign of the Product is changed, *and ſo on continually.* Whence, *if the Roots*

of

Then trying all its Diviſors, if none of them writ in the Equation for x would make all the Terms vaniſh, it is certain

---

of the propoſed, beginning with the leaſt, are ſucceſſively ſubſtituted for x *in the Equation reduced by one Dimenſion, the Signs of the Reſults will be alternately the ſame, and contrary to the Sign of the laſt Term of the reduced* (for they muſt be alternately contrary and the ſame with the Sign of the laſt Term of the propoſed) that is, *the leaſt Root of the propoſed is leſs than the leaſt of the reduced, and the greateſt of the propoſed greater than the greateſt of the reduced; and the intermediate Roots of the propoſed are mean between the Roots of the reduced, and conſequently are Limits to them.*

266. And *converſely, the Roots of the reduced are mean Limits to the Roots of the propoſed: Hence the reduced is called the Equation of Limits; and if to its Roots be added Cipher and the ſuperior Limit of the greateſt Root of the propoſed, there are given all the Limits of the Roots of the propoſed, and each Equation is the Equation of Limits to the other.*

267. Hence, *if the propoſed Equation be reduced by ſucceſſive Multiplications and Diviſions, as directed by this Rule, to a ſimple Equation, the Root of the ſimple Equation is the mean Limit of the Roots of the Quadratic, whoſe Roots are the mean Limits of the Roots of the Cubic, and ſo on to the propoſed: ſo that there is a compleat Series of Equations from the ſimple Equation to the propoſed, each of which determines the Limits of the following Equation: And converſely, the propoſed contains all the Limits of the Roots of the firſt Equation of Limits, whoſe Roots are all the Limits of the Roots of the ſecond Equation of Limits; and ſo on, deſcending through all the Equations deducible from the propoſed by ſucceſſive Multiplications of the Terms by their Indices, and Diviſions by the Root; or becauſe the Indices are in arithmetical Progreſſion, by Multiplications by the Terms of any arithmetical Progreſſion.*

268 If two Roots of the propoſed Equation are equal, then their intermediate Limit muſt be equal to each of them; and this Limit is a Root of the Equation of Limits:

certain that the Equation will admit of no Root, but what is Surd. But there are many Diviſors of the laſt Term 120, *viz.* 1. — 1. 2. — 2. 3. — 3. 4. — 4. 5. — 5. 6. — 6. 8. — 8. 10. — 10. 12. — 12. 15. — 15. 20. — 20. 24. — 24. 30. — 30. 40. — 40. 60. — 60. 120. and — 120. To

---

mits: *If* therefore *in ſubſtituting a Root of the Equation of Limits in the propoſed, the Reſult is* = 0, *then the Limit is a Root of the propoſed, and two Roots of the propoſed are equal; and as often as ſuch a Reſult emerges equal to nothing, ſo many Pair of Roots in the propoſed will be equal, and each of them equal to that Limit.*

269. *No rational Number whatever ſubſtituted for* x *will give a Reſult* = 0, *if all the Roots of the Equation be imaginary* (206): for no rational Number can be equal to an imaginary one; and though a Number equal to the real Part of an imaginary Root ſhould be ſubſtituted, yet the poſitive Product of the radical imaginary Part will always remain (193), and the Reſult always be affirmative.

270. *If two rational Limits are found for every Root of an Equation, the Roots are all real and unequal: If the Alternation of the Signs of the reſults emerging from the Subſtitution of rational Numbers is interrupted by a Cypher only, the Roots are all real, and there are ſo many pairs of equal Roots as Interruptions. If the Alternation is interrupted not by Cypher, but by the Intervention of poſitive Reſults in the place of negative, then ſo many pair of Roots are imaginary.*

271. *If any Roots of the Equation of Limits are impoſſible, or imaginary, there muſt be ſo many at leaſt impoſſible in the propoſed:* for the laſt Term of the Equation of Limits is the Product of the Exceſſes of the Roots of the propoſed above the Quantity whereby they were Diminiſhed (232.); if therefore there are any impoſſible Expreſſions in thoſe Exceſſes, there muſt of conſequence be impoſſible Expreſſions in the Roots of the

To try all these Divisors would be tedious. But it being known that the Roots are between 2 and — 3, we are freed from that Labour. For now there will be no need to try the Divisors, unless those only that are within these Limits, *viz.* the Divisors 1, and — 1. and — 2. For if none of these are the Root, it is certain that the Equation has no Root but what is Surd (*k*).

The

---

proposed. *But it does not follow, that if all the Roots of the Equation of Limits are Real, the Roots of the proposed shall all be Real*; because the Roots of the Equation of Limits are not all the Limits, but only the mean Limits of the Roots of the proposed: *Yet it will follow, that if all the Roots of the proposed are Real, all the Roots of all the Equations of Limits deducible from it, are also real*; for the Roots of the proposed are all the Limits of the first Equation of Limits, and so on; but of imaginary Quantities there can be no real Limits.

CXXXIX. (*k*) When any imaginary Roots are in the proposed, the superior Limit of the greatest affirmative Root will be less accurately determined, if their Product, which is always Affirmative, bears any considerable proportion to that of the affirmative Roots.

The Reduction of EQUATIONS *by Surd Diviſors.*

CXL. HItherto I have treated of the Reduction of Equations which admit of rational Diviſors. (*a*) But *before we can conclude, that an Equation of four*

CXL. (*a*) It may be of Uſe to ſet forth in one View the moſt uſual Methods of finding the rational Roots of Equations, whoſe Dimenſions aſcend above the Quadratic, the Reduction of which is given in Art. LXXIV.

The firſt and *moſt general Method is by finding the Diviſors of the laſt Term*, Art. CXXX. which being the Product of all the Roots, as many of the Roots as are Rational, muſt be found among the Diviſors of the laſt Term: *Every Diviſor of the laſt Term, which ſubſtituted for* x *cauſes the Aggregate to vaniſh, or, which being connected with* x *meaſures the Aggregate of the Terms*, (*Art.* CX. CXIII.) *is a Root.*

If the Equation be Cubic, it is ſufficient to find the ſimple Diviſors; if Biquadratic, the Diviſors of two Dimenſions are alſo to be ſought; and in general, for Equations of ſuperior Dimenſions, Diviſors are to be ſought, whoſe Dimenſions are half, or one Degree lower than half the Dimenſions of the propoſed. (212. 164.)

In general, *when all the Roots are found, except two, theſe two are moſt expeditiouſly found, by finding the Roots of the Quadratic Quote, which will emerge by dividing the propoſed by the Product of the Diviſors already found.*

But as the Diviſors of the laſt Term of the propoſed Equation may be numerous, *the Labour of Subſtitution will be abridged, by dividing the Roots by their common Diviſor if they admit of one* (247.); and when the Submultiples of the Roots are found, the Roots themſelves will be had by their known Relation to thoſe of the Transformed (221).

four, ſix, or more Dimenſions, is irreducible, we muſt firſt try whether

---

The Number of Diviſors to be ſubſtituted is further abridged by finding the ſuperior Limit of the greateſt Root of the Propoſed by Art. CXXXV. or CXXXVIII.

But this Number will be reduced to the real Roots by tranſforming the propoſed into others ſucceſſively, whoſe Roots ſhall be greater and greater, and leſs and leſs, by Unity, than thoſe of the propoſed: For the Values of x *in the propoſed are ſome Diviſors of the laſt Term, when* x *is ſuppoſed equal to Cypher or nothing; and the Values of* y, *in the tranſformed Equations, are ſome of the Diviſors of their laſt Terms reſpectively; and theſe Values muſt be in Arithmetical Progreſſion, whoſe common Difference is Unity, becauſe* $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, and $x+2$, *&c. are in Arithmetical Progreſſion: But the Subſtitution of* 2, 1, 0, -1, -2, *&c. for* x *in the Propoſed, is equivalent to theſe Tranſformations* (234.) *Whence the Rule of Art.* L. *abridges the ſimple Diviſors of the laſt Term, and that of Art.* LI. *abridges its Diviſors of two Dimenſions, to the Roots.*

If the propoſed involves two or more Letters, the Rules of Art. LII. *and* LIII. *are to be obſerved.*

The other general Method of reſolving higher Equations, whoſe Roots are rational, is to exterminate the ſecond Term of the propoſed (*Art.* CXXV.) *to find the Roots of the Tranſformed, and from theſe to find the Roots of the propoſed* (221). Now *the Roots of the Tranſformed* wanting its ſecond Term, *are found, either by Approximation; or accurately and without Approximation.*

By Approximation, thus: Let $x^3 . * . qx . r = 0$. be a Cubic, which wants the ſecond Term. If all its Roots are real, it will have its third Term qx (244) Negative; but if its third Term is Affirmative, it generally has two impoſſible Roots (244.) And in both Caſes, either one negative Root is equal to two Affirmatives, or two Negatives to one Affirmative (243).

If

whether or not it may be reduced by any Surd Diviſor; or, which

---

If all the Roots are real, and one Negative is equal to two Affirmatives, the laſt Term will be Affirmative (becauſe $- \times - \times + = +$*); and of this form* $x^3 - qx + r = 0$*; conſequently the negative Root, being ſingle and the greateſt, will be nearly (Art.* CXXXVI.*)* $\sqrt[3]{\frac{R-c}{2}}$*; more near* $\sqrt[5]{\frac{S-e}{2}}$*; nearer ſtill* $\sqrt[7]{\frac{T-g}{2}}$*: &c. And if one Affirmative (the Roots being all real) is equal to the Sum of two Negatives, the laſt Term will be Negative (becauſe* $+ \times + \times - = -$*); and the Equation of this Form* $x^3 - qx - r = 0$*; conſequently, the affirmative Root, being ſingle and the greateſt, will be nearly* $\sqrt[3]{\frac{R+c}{2}}$*; more near* $\sqrt[5]{\frac{S+e}{2}}$*; nearer ſtill* $\sqrt[7]{\frac{T+g}{2}}$*, &c. Now the greateſt Root being found to any Accuracy (Art.* CXXXVI.*) the other Roots are had by the Reduction of the Quadratic Quote. If two Roots of* $x^3 . * . qx . r = 0$*. be imaginary, the real Root will be equal to them both; and if the Equation be of the Form* $x^3 * + qx + r = 0$*, the Rational will be Negative and greateſt; and if the Equation be of the Form* $x^3 * + qx - r = 0$*, the Rational will be Affirmative and greateſt: And conſequently the rational Root is* $\sqrt[3]{\frac{R \pm c}{2}}$*, or* $\sqrt[5]{\frac{S \pm e}{2}}$*, or* $\sqrt[7]{\frac{T \pm g}{2}}$*; &c. as in Art.* CXXXVI.

Let a Biquadratic want (or be ſo Transformed as to want) the ſecond Term, as $x^4 . * . qx^2 . rx . s = 0$*. If all its Roots are real,* the third Term qx^2 and the laſt s, will be Negative (244.) Now becauſe it wants the ſecond Term, either firſt, one Affirmative is equal to three Negatives; or, ſecondly, two Affirmatives are equal to two Negatives; or, thirdly, three Affirmatives are equal to one Negative (243.) If the firſt, then the fourth and fifth Terms rx and s will be Negative, becauſe $- \times + \times + = -$ and

which is the same Thing, you must try whether the Equation can

---

$=-$ and $-\times+\times+\times+=-$, *and the Equation of this form* $x^4-qx^2-rx-s=0$. *the Affirmative is single, and greatest, and will therefore be* $\sqrt[3]{\frac{R+c}{2}}$, *or* $\sqrt[5]{\frac{S+e}{2}}$, *or* $\sqrt[7]{\frac{T+g}{2}}$, *&c.* If the second, then if the greatest Root is one of the two Affirmatives, the fourth Term rx will be Negative, and the last Term Affirmative, and the Equation of the Form $x^4-qx^2-rx+s=0$; and if the greatest Root is one of the two Negatives, the fourth Term will be Affirmative, the last Negative, and the Equation of the Form $x^4-qx^2+rx-s=0$; and if the Roots are all equal to each other, the fourth Term vanishes, and the Equation is of the Form $x^4-qx-s=0$: *Now in all Cases, the two Affirmatives may be approximated to, by Art.* CXXXVII. *and the two Negatives found by the Reduction of the Quadratic Quote, which will emerge by dividing the Proposed by the Product of the Affirmatives:* If the third Case, then the fourth Term will be Affirmative, the last Negative, and the Equation of the Form $x^4-qx^2+rx-s=0$; *and the Negative is single and greatest; and will be* $\sqrt[3]{\frac{R-c}{2}}$, *or* $\sqrt[5]{\frac{S-e}{2}}$, *or* $\sqrt[7]{\frac{T-g}{2}}$, *&c. and in this, and the first Case, the other Roots are found by Reduction of the cubic Quote, which will emerge by dividing the Proposed by the found Root.* Now tho' the proposed Biquadratic should contain two imaginary Roots, yet if the last Term is Negative, the third being Affirmative, *the rational Roots, if any, will be Approximated to, by Art.* CXXXVI, or CXXXVII.

The Roots of the Transformed, arising from taking away the second Term, are sought directly and without Approximation, thus.

272. *In the cubic* $x^3.*.qx.r=0$. *If* $\frac{1}{27}q^3$ *be greater than* $\frac{1}{4}r^2$, *that is, if* $\frac{1}{27}q^3-\frac{1}{4}r^2$ *be possible, and consequently*

can be ſo divided into two equal Parts, that you can extract the

---

quently $\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3$ *impoſſible; then the three Roots are real: Alſo the two, whoſe Sum is equal to the third, are unequal.*

273. *If* $\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}r^2$, *that is, if* $\frac{1}{27}q^3 - \frac{1}{4}r^2 = 0$, *and* $\frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{27}q^3 = 0$, *then the three Roots are real; and the two, whoſe Sum is equal to the third, are equal.*

274. *If* $\frac{1}{27}q^3 - \frac{1}{4}r^2$ *be impoſſible, and conſequently* $\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3$ *poſſible; then the two Roots, whoſe Sum is equal to the third, are impoſſible.* Let firſt the Roots of $x^3 - qx + r = 0$ be $x - f + g$, $x - f - g$, and $x + 2f$: Then by ſuppoſition, $x^3 - qx + r = x^3 - \overline{3f^2 - g^2} \times x + \overline{2f^3 - g^2 f}$ (CXIII.) whence $3f^2 + g^2 = q$ (182.) and $2f^3 - g^2 f = r$: Conſequently $f^2 + \frac{g^2}{3} = \frac{q}{3}$, and $f^3 - g^2 f = \frac{r}{2}$. Let ſecondly the Roots of $x^3 - qx - r = 0$ be $x + f + g$, $x + f - g$, and $x - 2f$: Then $x^3 - qx - r = x^3 - \overline{3f^2 - g^2} \times x - \overline{2f^3 + 2g^2 f}$; whence $3f^2 + g^2 = q$, and $f^2 + \frac{g^2}{3} = \frac{q}{3}$: Alſo $-2f^3 + 2g^2 f = -r$, and $-f^3 + g^2 f = -\frac{r}{2}$. Now the Cube of $f^2 + \frac{g^2}{3} = \frac{q}{3}$ is in both Caſes $f^6 + g^2 f^4 + g^4 f^2 + \frac{g^6}{27} = \frac{q^3}{27}$; and the Square, as well of $-f^3 + g^2 f = -\frac{r}{2}$, as of $f^3 + g^2 f = \frac{r}{2}$, is $f^6 - 2g^2 f^4 + g^4 f^2 = \frac{r^2}{4}$: Wherefore ſubducting the Square from the Cube, $3g^2 f^4 - \frac{2g^4 f^2}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}$. In this reſidue, if f be greater than g, then dividing $3g^2 f^4 - \frac{2g^4 f^2}{3}$ by $g^2 f^2$, the Quote $3f^2$ is greater than $\frac{2}{3}g^2$, conſequently the Member $3g^2 f^4 - \frac{2g^4 f^2}{3} + \frac{g^6}{27}$ is Affirma-

the Root out of both (*b.*) But that may be done by the following Method. CXLI.

---

tive, whence $\frac{q^3}{27}-\frac{r^2}{4}$ is poſſible, and $\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}$ is impoſſible: And if in that Reſidue $g=0$, then $3g^2f^4-\frac{2}{3}g^4f^2+\frac{g^6}{27}=0$: whence $\frac{q^3}{27}-\frac{r^2}{4}=0$, and $\frac{q^3}{27}=\frac{r^2}{4}$: And if in the ſame Reſidue f is leſs than g, then $3g^2f^4-\frac{2}{3}g^4f^2+\frac{g^6}{27}$ is Negative, and conſequently $\frac{q^3}{27}-\frac{r^2}{4}$ is impoſſible; and therefore $\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}$ is poſſible.

275. *When* $\frac{1}{27}q^3-\frac{1}{4}r^2$ *is poſſible, i. e. when* $\frac{1}{4}r^2-\frac{1}{27}q^3$ *is impoſſible* (272.) *the greateſt Root is found thus: Subduct the Coefficient of the third Term, from the ſquare Number next greater than itſelf; divide the laſt Term by this Reſidue; the Quote* (*which is the Root of the aſſumed Square*) *affected with the Sign contrary to that of the laſt Term will be the greateſt Root.* For $q=3f^2+g^2$, and $2f\&^2=4f^2$, and $\frac{4f^2-2f^2-g^2}{f^2-g^2}$ will divide $r=2f^3-2g^2f$, and $\frac{2f^3-2gf}{f^2-2g}=2f$. Alſo f^2-g^2 will divide $-r=-2f^3+2g^2f$, and $\frac{-2f^3+2gf}{f^2-2g}=-2f$; and as well $-2f\times-2f$, as $2f\times2f=4f^2$. The greateſt Root being thus found, the two leſs are found by reducing the quadratic Quote, whoſe Roots are to be affected with the Sign of the laſt Term of the cubic. The Roots of the transformed being found, thoſe of the propoſed will be found from their known Relation (221.)

276. *When* $\frac{1}{27}q^3=\frac{1}{4}r^2$, *either of the equal Roots is* $\frac{2}{3}g^4f^2$ *found, by extracting the ſquare Root of* $\frac{1}{3}$ *of the Coefficient of the third Term; or by extracting the cube Root of half the laſt Term: or, laſtly, by dividing triple the laſt Term by double the Coefficient*

CXLI. *Diſpoſe the Equation according to the Dimenſions of ſome certain Letter, ſo that all its Terms jointly under their proper*

---

cient of the third Term; and theſe Roots are to be affected with the Sign of the laſt Term. Then double of either of theſe Roots, affected with the Sign contrary to that of the laſt Term, will be the greateſt Root. For ſince $g=0$, then $3f^2+g^2=3f^2$; but $3f^2+g^2=q$, and $f^2-\frac{g^2}{3}=\frac{q}{3}$, whence $f^2=\frac{q}{3}$, and $f=\sqrt[2]{\frac{q}{3}}$. Likewiſe $2f^3-2g^2f=2f^3$ but $2f^3-2g^2f=r$, and $f^3-g^2=\frac{r}{2}$; whence $f^3=\frac{r}{2}$, and $f=\sqrt[3]{\frac{r}{2}}$: Alſo $f=\frac{f^3}{f^2}=\sqrt[2]{\frac{q}{3}}$, $=\sqrt[3]{\frac{r}{2}}=\frac{3r}{2q}$ (149): *So that either of the leſs Roots is had, by a ſimple quadratic Extraction, or by a ſimple Diviſion.*

277. *When* $\frac{1}{4}r^2-\frac{1}{27}q^3$ *is poſſible*, i. e. $\frac{1}{27}q^3-\frac{1}{4}r^2$ *impoſſible* (274) *the rational Root is found thus. If the Coefficient of the third Term is affirmative, add it to* (*if negative, ſubduct it from*) *the ſquare Number next greater than itſelf; then by the Sum, or by the Difference, divide the laſt Term: this Quote* (*which if the Equation has a rational Root, will be the Root of the aſſumed Square*) *affected with the Sign contrary to that of the laſt Term will be the rational Root.* For putting the Roots of $x^3\pm qx+r=0$ (viz. when the rational Root is negative) $x-f+\sqrt{-3g^2}$, $x-f-\sqrt{-3g^2}$, and $x-2f$; then $x^3\pm qx+r^3=x^3-3f^2+3g^2\times x+\overline{2f^3+6g^2f}$; whence $-3f^2+3g^2=\mp q$, and $f^2-g^2=\frac{q}{-3}$; alſo $2f^3+6g^2f=r$, and $f^3+g^2=\frac{r}{2}$. Again, putting the Roots of $x^3\mp qx-r$ (viz. when the rational Root is affirmative) to be $x+f+\sqrt{-3g^2}$, $x+\overline{f-\sqrt{-3g^2}}$

proper Signs, may be equal to nothing, and let the higheſt Term be adfected with an affirmative Sign. Then, if the Equation

---

$f-\sqrt{-3g^2}$, and $x-2f$; then $x^3 \mp qx-r=x^3-3f^2+3g^2\times x-2f^3-6g^2$; whence $-3f^2+3g^2=\mp q$, and $f^2-g^2=\frac{q}{-3}$; alſo $-2f^3-6g^2f=-r$, and $f^3+3g^2f=\frac{r}{2}$. Wherefore, ſince $\mp q=-3f^2+3g^2$, and $2f\times 2=4f^2$; therefore $\frac{4f^2-3f^2+3g^2}{f^2+3g^2}$ will divide $r=2f^3+6g^2f$; and the Quote will be equal to $2f$.

But the rational Root in this Caſe is more readily found by the Method of Diviſors, or by Cardan's Rule, Art. CLII. A Biquadratic, which wants the ſecond Term, may be ſolved by the Method of Des Cartes, Art. CLV. but more eaſily by the Method of Diviſors of the laſt Term: and, in general, Biquadratics, and all Equations of higher Dimenſions, if their Roots are all, or any of them, rational, admit thoſe Roots to be found moſt eaſily by the Method of Diviſors. Biquadratics may, however, be ſolved without taking away the ſecond Term, by a Method deduced by Mr. Thomas Simpſon, from Art. CXLIV. Numb. 298. which will be there explained, or by Theorems given by Meſſ. M'Laurin, Colſon, and others: but the moſt expeditious Method is generally that of Diviſors.

278. CXL. (*b*) *An Equation of even Dimenſions, the Coefficient of whoſe higheſt Term is Unity, and which is clear of Fractions and Surds, may be conceived to be the Difference of two compleat Squares; whence, by adding the leſs Square to it, it may be compleated into the greater; and the Root found by the Reſolution of an adfected Quadratic.*

Putting therefore $2r$ the Index of the higheſt Term of the Equation, the Index of the higheſt Term of the

tion be a Quadratic, (*for we may add this Caſe for the Analogy*

greater Square will be alſo $2r$, and that of the higheſt Term of its Root (the Root is always ſome Power of a Binome) will be r (83); and putting p for the Coefficient of the ſecond Term of the Equation, and $\frac{1}{2}p$ for that of the ſecond Term of the Root; that of the ſecond Term of the greateſt Square will be p (122.) Let the given Equation be $x^{2r}+px^{2r-1}+qx^{2r-2}+rx^{2r-3}+sx^{2r-4}+tx^{2r-5}+vx^{2r-6}+wx^{2r-7}$, &c. &c. $ax^{2r-2r}=0$; and let the Root of the greater Square be $x^r+\frac{1}{2}px^{r-1}+Qx^{r-2}+Rx^{r-3}+Sx^{r-4}+Tx^{r-5}$, &c, &c. Vx^{r-r}: Then the greater Square will be $x^{2r}+px^{2r-1}+\overline{2Q+\frac{1}{4}p^2}\times x^{2r-2}+\overline{2R+pQ}\times x^{2r-3}+\overline{2S+pR+Q^2}\times x^{2r-4}+\overline{2T+pS+2QR}\times x^{2r-5}+\overline{2V+pT+2QS+R^2}\times x^{2r-6}+\overline{2W+pV+2QT+2RS}\times x^{2r-7}$, &c. &c. (122).

279. Let the indeterminate Expreſſions in the Coefficients of the greater Square, viz. $2Q$, $2R$, $2S$, $2T$, $2V$, &c. be changed into the Greek Letters α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, $\varkappa$, λ, &c. reſpectively: Then the greater Square will be expreſſed thus $x^{2r}+px^{2r-1}+\overline{\alpha+\frac{1}{4}p^2}\times x^{2r-2}+\overline{\beta+\frac{1}{2}p\alpha}\times x^{2r-3}+\overline{\gamma+\frac{1}{2}p\beta+\frac{1}{4}\alpha\alpha}\times x^{2r-4}+\overline{\delta+\frac{1}{2}p\gamma+\frac{1}{2}\alpha\beta}\times x^{2r-5}+\overline{\varepsilon+\frac{1}{2}p\delta+\frac{1}{2}\alpha\gamma+\frac{1}{4}\beta\beta}\times x^{2r-6}+\overline{\zeta+\frac{1}{2}p\varepsilon+\frac{1}{2}\alpha\delta+\frac{1}{2}\beta\gamma}\times x^{2r-7}+\overline{\eta+\frac{1}{2}p\zeta+\frac{1}{2}\alpha\varepsilon+\frac{1}{2}\beta\delta+\frac{1}{4}\gamma\gamma}\times x^{2r-8}$, &c. &c. Wherefore *equating the correſpondent Terms of this Square with thoſe of the given Equation, we have the Values of the Greek Letters in known Quantities.*

I. *a*

logy of the Matter) take from both Sides the loweſt Term, and

---

I. $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$. II. $\beta = r - \frac{1}{2}p\alpha$. III. $\gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha$. IV. $\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta$. V. $\varepsilon = \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta$. VI. $\zeta = W - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma$. VII. $\eta = Z - \frac{1}{2}p\zeta - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma$. VIII. $\theta = a - \frac{1}{2}p\eta - \frac{1}{2}\alpha\zeta - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta$. IX. $\varkappa = b - \frac{1}{2}pa - \frac{1}{2}\alpha\eta - \frac{1}{2}\beta\zeta - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta\delta$. X. $\lambda = c - \frac{1}{2}pb - \frac{1}{2}\alpha a - \frac{1}{2}\beta\eta - \frac{1}{2}\gamma\zeta - \frac{1}{2}\delta\varepsilon$, and ſo on *in infinitum*.

280. Now *the Index of the higheſt Term of the Root of the greater Square being* r, *that of the higheſt Term of the Root of the leſs or complement Square cannot be greater than* $r-1$; and becauſe it is always ſuppoſed that the Terms of this Square have a common Diviſor n, if we put $\sqrt{n} \times \overline{kx^{r-1} + lx^{r-2} + mx^{r-3} + hx^{r-4}}$, &c. for the Root, the complement Square will be (122) $nk^2 \times x^{r-2} + 2nkl \times x^{2r-3} + \overline{2nkm + nl^2} \times x^{2r-4} + \overline{2nkb + 2nlm} \times x^{2r-5} + \overline{2nk\pi + 2nkl + nm^2} \times x^{2r-6}$, &c. Whence it appears, *that the higheſt Index, which the firſt Term of the complement Square can have, is* $2r-2$; *and conſequently that it can be added but to the third Term of the Equation, its ſecond to the fourth of the Equation, and ſo on* in order.

281. Now ſuppoſing the above indefinite Equation compleated by the Addition of the indefinite complement Square, then by equating the Terms with the correſpondent Terms of the greater Square, we ſhall have ſo many Equations for determining the Quantities ſought, as there are Terms in the greater Square after the two firſt; that is, $2r-1$; the whole Number being $2r+1$ (211). Now the Number of Quantities ſought

and add one fourth Part of the Square of the known Quantity of the middle Term.

As

ſought are $r-1$ Terms of the Root of the greater Square (the two firſt being Unity and $\frac{1}{2}p$ (122), and r Terms of the Root of the leſs Square, the Dimenſions being $r-1$ (280)) and n the common Diviſor; that is, $\overline{r-1}+r+1=2r$: *Whence there are* $2r-1$ *Equations to determine* $2r$ *Quantities; conſequently they can only be found by Trial,* (194).

282. *Theſe Equations,* tranſpoſing all the Terms into one Member, are I. $2Q+\frac{1}{4}p^2-q-nk^2=0$. II. $2R+pQ-r-2nkl=0$. III. $2S+pR+Q^2-s-2nkm-nl^2=0$. IV. $2T+pS+2QR-t-2nbk-2nlm=0$. V. $2V+pT+2QS+R^2-v-nk\pi-2nlb-nm^2=0$. VI. $2W+pV+2QT+2RS-w-2nk\rho-2nl\pi-2nmb=0$. VII. $2Z+pW+2QV+2RT+S^2-z-2nk\sigma-2nl\rho-2nm\pi-nb^2=0$, &c. in infinitum, *and from theſe there are found general Limitations for the particular Quantities* n, Q, R, S, k, l, *&c.* thus.

283. By (282, I.) $2Q=q-\frac{1}{4}p^2+nk^2$, but $q-\frac{1}{4}p^2=\alpha$ (279, I.); whence $2Q=\alpha+nk^2$, and $\alpha=2Q-nk^2$: Whence *that* n *may be a Diviſor of* α, *it muſt alſo be a Diviſor of* Q, *or elſe* Q *muſt vaniſh: alſo that* k *may be a Diviſor of* α, *it muſt alſo divide* Q, *or elſe* $Q=0$. *Alſo we have* $Q=\frac{nk^2+\alpha}{2}=\frac{q+nk^2-\frac{1}{4}p^2}{2}$.

284. By (282, II.) $2R=r-pQ+2nkl$, $=r-\frac{1}{2}p\alpha-\frac{1}{2}pnk^2+2nkl$, (283); but $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$ (279, II.) whence $2R=\beta-\frac{1}{2}pnk^2+2nkl$, and $\beta=2R-\frac{1}{2}pnk^2$

As if the Equation be $xx - ax - b = 0$, ſubſtract from

$-\frac{1}{2}pnk^2 + 2nkl$. Whence n *in order to divide* β, *muſt alſo divide* R; *or* $R = 0$. *Alſo* k *to divide* β, *muſt alſo divide* R; *or* $R = 0$. *Alſo we have* $R = -\frac{1}{4}pnk^2 + nkl + 2\beta = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl = \frac{-pnk^2 + 2\beta}{4} + nkl$.

285. By (282. III.) $2S = s - pR - Q^2 + 2nkm + nl^2$. But $pR = \frac{-p^2nk^2}{4} + \frac{1}{2}p\beta + pnkl$ (284); and $Q^2 = \frac{1}{4}n^2k^4 + \frac{1}{2}\alpha nk^2 + \frac{1}{4}\alpha\alpha$ (283); whence $2S = -\frac{1}{4}n^2k^4 + \frac{1}{4}p^2nk^2 + 2nm - pnl - \frac{1}{2}\alpha n \times k + s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha + nl^2$: but $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$ (279. III.); whence $2S = \gamma - \frac{1}{4}n^2k^4 + \frac{1}{4}p^2nk^2 + 2nm - npl - \frac{1}{2}\alpha n \times k + nl^2$. Whence *if* n *divides* γ, *it muſt alſo divide* S; *or* $S = 0$. *Alſo if* k *divides* γ, l *muſt vaniſh*; *and beſides that*, k *muſt alſo divide* S; *or* $S = 0$. *Alſo we have* $S = \frac{s - pR - Q^2 + nl^2}{2} + nkm = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{8}n^2k^4 + \frac{1}{8}p^2nk^2 - \frac{1}{4}\alpha nk - \frac{1}{2}pnlk + \frac{1}{2}nl^2 + nmk = \frac{-n^2k^4 + p^2nk^2 - 2\alpha nk - 4pnlk + 4nl^2 + 4\gamma}{8} + nmk$.

286. By the like Proceſs from 282. IV. and 279. IV. and 285. we have $T = \frac{t - pS}{2} - QR + nkh + nlm = \frac{3}{16}pn^2k^4 - \frac{1}{2}ln^2k^3 - \frac{1}{16}p^3n + \frac{1}{4}p\alpha n - \frac{1}{4}n\beta \times k^2 + \frac{1}{2}p^2nl - \frac{1}{2}pnm - \frac{1}{2}\alpha nl + nh \times k - \frac{1}{4}pnl^2 + \frac{1}{2}\delta + nlm = \frac{3pn^2k^4 - 8nl^2k^3 - p^3n + 4p\alpha n - 4n\beta \times k^2 + 4p^2nl - 8pnm - 8\alpha nl \times k - 4nl^4 + 8\delta}{16} + nhk + nlm$. Whence *n to be a Diviſor of* δ, *muſt alſo divide* T; *or*

from both Sides $-b$, and add $\frac{1}{4}aa$, and there will come out

---

or $T = 0$. *Alſo* k *to be a Diviſor of* δ, *both* n l m *and* $\frac{1}{4}pnl^2$ *muſt vaniſh; and beſide, either* T *muſt alſo be diviſible by* k; *or* $T = 0$.

287. In like Manner from Numbers 282. V. 279. V. and 286. we determine $V = \frac{v - pT - R^2}{2} - QS + nk\pi + nhl + nm^2 = \frac{1}{16}n^3k^6 + \frac{2}{16}\alpha n^2 - \frac{3}{16}p^2n^2 \times k^4 + \frac{3}{4}pn^2l - \frac{1}{2}n^2m \times k^3 + \frac{1}{32}p^4n - \frac{3}{16}p^2\alpha n + \frac{1}{4}p\beta n + \frac{1}{8}\alpha^2n - \frac{1}{4}\gamma n - \frac{1}{4}n^2l^2 \times k^2 - \frac{1}{8}p^3nl + \frac{1}{4}p^2nm + \frac{1}{2}p\alpha nl - \frac{1}{2}pnh - \frac{1}{2}\alpha nm - \frac{1}{2}\beta nl \times k + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}p^2nl^2 - \frac{1}{4}\alpha nl^2 - \frac{1}{2}pnlm + \frac{1}{2}nm^2 + nlh + nk\pi = \frac{2n^3k^6 + 6\alpha n^2 - 6p^2n^2 \times k^4}{32} + \frac{24pn^2l - 16n^2m \times k^3 + p^4n - 6p^2\alpha n + 8p\beta n + 4\alpha^2n - 8\gamma n - 24n^2l^2 \times k^2 - 4p^3nl + 8p^2nm + 16p\alpha nl}{32} - \frac{16pnh - 16\alpha nm - 16\beta nl \times k + 16\varepsilon - 4p^2nl^2 - 8\alpha nl^2 - 16pnlm + 16nm^2}{32} + nhl + nk\pi$. Whence, *that* n *ſhould divide* ε, *it muſt alſo divide* V; *or* $V = 0$. *Alſo that* k *ſhould divide* ε, $\frac{1}{2}nm^2 - \frac{1}{4}pnl^2 - \frac{1}{2}pnlm - \frac{1}{8}p^2nl^2 + nlh$ *muſt vaniſh; and beſides,* k *muſt diviſe* V, or $V = 0$.

288. By the like Proceſs from Numbers 282. VI. 279. VI. and 287. we determine $W = \frac{10n^3pk^6 - 24ln^3k^5 +}{64}$

$10p^2n^2$

out $xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$, *and extracting on both Sides*

$$\frac{\sqrt{10p^3n^4 - 8\alpha p^2n^2 - 30\alpha pn^2 + 12\beta n^2} \times k^4 - 48lp^2n^2}{64}$$

$$+ \frac{48mpn^2 - 4\alpha pn^2 + 32ln^4 - 32bn^2 \times k^3 - p^5n +}{64}$$

$$\frac{6\alpha p^3n - 12p^2n\beta + 2\alpha p^2n - 12\alpha^2p + 16pn\gamma + 72pn^2l^2}{64}$$

$$+ \frac{8\alpha n^2\beta + 16\alpha n^2l - 16n\delta - 96n^2lm \times (k^2) +}{64}$$

$$\frac{4lp^4n - 8mp^3n - 24\alpha nlp^2 + 16bp^2n + 48\varepsilon lpn +}{64}$$

$$\frac{16\alpha^2ln + 8\alpha\beta n + 32p\alpha mn - 32bn\alpha - 32l^3n^2 -}{64}$$

$$\frac{32\gamma ln - 32\beta mn - 32p\pi n \times k + 32\zeta + 4l^2p^3n + 16lmp^2n}{64}$$

$$+ \frac{16\alpha pl^2n - 16\beta l^2n - 32plhn - 32\alpha lmn}{64} + \rho kn +$$

$\pi ln + mhn$. Whence, *that* n *ſhould divide* ζ, *it muſt alſo divide* W; *or* $W = 0$. *Alſo that* k *ſhould divide* ζ, *it is neceſſary that* $\frac{1}{16}l^2p^3n + \frac{1}{4}lmp^2n + \frac{1}{4}\alpha pl^2n - \frac{1}{4}\beta l^2n - \frac{1}{2}phln - \frac{1}{2}\alpha lmn + \pi ln + mhn$ *ſhould vaniſh; and moreover that* k *ſhould divide* W; *or that* $W = 0$: *and ſo on* in infinitum.

289. From the foregoing Determinations it follows, that n will meaſure ſo many of the antecedent Greek Letters, as there are undetermined Terms in the Root of the greater Square, if it meaſures the ſubſequent Greek Letters. Now the Number of undetermined Terms in that Root is $r - 1$ (for $\overline{r+1} - 2 = r - 1$), and the whole Number of Greek Letters or Terms after the two firſt of the Equation is $2r - 1$ (for $\overline{2 - r + 1} - 2 = 2$

Sides the Root, you will have $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, or $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$ (c).

CXLII.

$-2 = 2r - 1$; wherefore ſubducting $r - 1$, the Number which n muſt divide if it divides the ſubſequent, from $2r - 1$, the Reſidue r *is the Number of the laſt Greek Letters whoſe common Diviſor* n *muſt be; and ſuch a Diviſor is always to be ſought.*

290. And *becauſe by Suppoſition we look for a ſurd Diviſor, all Diviſors are to be rejected which are Squares, or Multiples of Squares*; for if n is a Square, then $\sqrt{n} \times kx^{r-1} + lx^{r-2}$, &c. would be rational; and if n is a Multiple of a Square as $\sqrt{} \times m^2$, then $m \times kx^{r-1} + lx^{r-2}$ &c. would be rational, and n depreſſed to $\sqrt{}$ would be rational.

291. *If any of the Terms* Q, R S, *&c. of the Root of the greater Square is a Fraction, its Denominator muſt be* 2, *and the Coefficient in which its Square is, muſt be an odd Number*; *and* n *muſt be an odd Number*: for in the Square it is firſt multiplied into 2, (122); whence if the Denominator be 2, it will become an Integer, being a Multiple of 2; and the other Parts of the ſame Coefficient being double Products (122), when they are reduced to the ſame Denomination, will be Multiples of 4. Now the Denominator being 2, the Numerator muſt be odd (Euc. VII. 24.); and therefore its Square is odd (Euc. 29. IX.), whence the Coefficient and its Diviſor n is odd; but if the Denominator was any other Number, the Fraction multiplied into 2 could never become an Integer; and therefore the Coefficient would ſtill be a Fraction, or the higheſt Term would have a Coefficient different from Unity; both which are contrary to Hypotheſis.

292. *According as any of the Terms* Q, R, S, *&c. of the Root of the greater Square is an Integer, or a Fraction*;

CXLII. *But if the Equation be of* four Dimenſions, *ſuppoſe*

ſo muſt the correſpondent Term of the Root of the complement Square be an Integer, or a Fraction reſpectively, and have 2 *its Denominator.* For any Coefficient of the greater Square is equal to the Sum of the correſpondent Coefficients of the Equation, and of the complement Square into n; but n, and the Coefficients in the Equation, and greater Square, for the ſame Term being always Integers (291), the Coefficient of the complement Square muſt be an Integer; conſequently, according as the Term in one Root is integer or fracted, the correſpondent Term in the other muſt alſo be integer and fracted, and have the Denominator 2; that the Square of the Fraction into n may either deſtroy the other fractional Square, or with it make an Integer; which could not be done, if one being Integer, the other was a Fraction.

293. *If any Coefficient of the Equation, as* p, r, t, w, *&c. in a Place denominated from an even Number, be odd;* n *alſo muſt be odd:* for the Exponents of the Terms denominated from an even Number in each Square are odd, and theſe Coefficients conſiſt of double Rectangles, without any Square (123), wherefore they are even Numbers, if the Roots are Integers. Conſequently the Differences of thoſe even Coefficients, that is, the Coefficients of the Equation denominated from an even Number, are even, when the Roots are Integer: If therefore any Coefficient in an even Place is odd, the correſpondent Terms in the Roots of both Squares are Fractions, whoſe Denominators are 2; and therefore the Numerators are odd, and their Squares odd, and the Aggregate odd, and n the Diviſor of the Aggregate odd (Eucl. 29. IX.) *and converſely.*

294. n *being odd, muſt, when divided by* 4, *leave Unity.* For let N repreſent any Number in general, and 1 an odd Number; then becauſe that every odd Number is a Multiple

suppose $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, *where* $p, q, r,$ *and* s *denote*

Multiple of 4 more or less Unity, viz. $I = 4N \pm 1$; and that the Square of an odd Number is a Multiple of 4 more Unity, viz. $I^2 = 4N + 1$ (Eucl. 29. IX.) and that if from such a Square there be taken any Multiple of 4, the Remainder, if greater than Unity, will be a Multiple of 4 more Unity, viz. $4M + 1$: And because that the Product of n, into the odd Coefficient of the complement Square, is equal to the Difference of the odd Coefficients of the greater Square, and Equation: Also because the square Roots of those Coefficients are the Halves of odd Numbers. We have the 4th Part of the Product of n into an odd Square, equal to the 4th Part of the Difference of an odd Square, and of quadruple an odd Number. Wherefore n into an odd Square is equal to the Difference of an odd Square, and of quadruple an odd Number; that is, n into a Multiple of 4 more Unity is equal to a Multiple of 4 more Unity; and consequently, n is equal to a Multiple of 4 more Unity. For it is not a Multiple of 4 less Unity, but of 4 more Unity, which can give the Product a Multiple of 4 more Unity.

295. These general Limitations being premised, let those indefinite Expressions in N°. 279 and 282, &c. become finite: That is, if there is proposed an Equation of given Dimensions, it is manifest, that the Terms involving the Letters above the given Dimensions must vanish. Let the proposed be $x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vx^2 + wx + z = \alpha$. Then the following will be, as it is proposed by the Author in Art. CLI. *An Exemplar for all Reductions by surd Divisors.* Because $2r = 8$, therefore $r = 4$, and $r - 1 = 3$; and the Root of the greater Square is $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qx^2 + Rx + S$; and the Root of the complement Square is $\sqrt{nkx^3 + lx^2 + mx + b}$; and the seven Equations for the Greek Letters, are 1. $q - \frac{1}{4}p^2 = \alpha$; 2. $r - \frac{1}{2}\alpha p = \beta$; 3. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$; 4. $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$;

denote the known Quantities of the Terms of the Equation affected by their proper Signs, make

$$q - \tfrac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \tfrac{1}{2}\alpha p = \beta.$$
$$s - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta. \qquad \text{Then}$$

---

5. $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{2}\beta\beta = \iota$; 6. $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$; and 7. $z - \frac{1}{2}\gamma\gamma = n$. (279): And the seven Equations for the Coefficients, are 1. $2Q + \frac{1}{4}p^2 - q - nk^2 = 0$; 2. $2R + pQ - r - 2nkl = 0$; 3. $2S + pR + Q^2 - s - 2mnk - nl^2 = 0$; 4. $pS + 2QR - t - 2nkb - 2nlm = 0$; 5. $2QS + R^2 - v - 2nlb - nm^2 = 0$; 6. $2RS - w - 2nmb = 0$; 7. $S^2 - z - nb^2 = 0$, (282, 288). Now r being 4, n must be a common Diviſor of λ, ε, ζ, and n (289); and odd, if any of the alternate Coefficients be odd (293); and neither Square, nor Multiple of a Square (290); and divided by 4 to leave Unity (294). Then becauſe by the 7th Equation, $S^2 = z + nb^2$, if n be even, ſeek a ſquare Number b^2, to which, after it is drawn into n, the laſt Term of the Equation z being added by its proper Sign, $z \pm nb^2$, ſhall make a ſquare Number: But if n be odd, becauſe ſome Term of the Root, or reduced Equation, is a Fraction, whoſe Denominator being 2, the other Numbers in the ſame Coefficient with the Square of its Numerator, are Multiples of 4, and ſo $4S^2 = 4z + 4nb^2$ (291, 292, 293); connect the Product of n into a ſquare Number to quadruple the laſt Term of the Equation, viz. $4z \pm 4nb^2$, until a ſquare Number is found. Extract the ſquare Root, and call it S, when n is even; but 2 S, when n is odd; and make $\sqrt{\frac{S^2 - z}{n}} = b$. Then if S be a Fraction, ſo muſt b; both having the Denominator 2 (291) and let all Numbers S, and b, within this Limit, be collected in a Catalogue. Having thus found n, b, and S; k is next to be found, by a ſucceſſive Aſſumption of all Numbers, which do not make $nk \pm \frac{1}{4}p$ greater than quadruple the greateſt Term of the Equation: When k is had, Q is to be found by $Q = \frac{nk + \alpha}{2}$ (283). Q being found, all Numbers are

to

They put for n *some common integral Divisor of the Terms* β *and* 2ζ, *that is not a Square, and which ought to be odd, and*

to be tried for l, which do not make $nl \pm Q$ greater than quadruple the greateſt Term of the Equation; and l being found, we have $R = \frac{-np^2k^2+2\beta}{4} + nkl$. (284).

Laſtly, to find m, all Numbers are ſucceſſively to be tried, which do not make $nm \pm R$ greater than the greateſt Term of the Equation: Always making k a Fraction, when p is ſo; l a Fraction, when Q is one; and m a Fraction, when R is one (292). From the ſeveral Values of the Letters regiſtered in the Catalogue, thoſe only are to be aſſumed, which will anſwer all the Conditions of the Equations; for this Coincidence is a Proof that they have been rightly aſſumed. Thus $S = \sqrt{z} + nb^2$ by the 7th Equation; and alſo $= \frac{S - pR - QQ + nll}{2} + nkl$ by the third; and its Correſpondent $b = \frac{\sqrt{S^2 - z}}{n}$ by the 7th Equation; and $= \frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk}$ by the 4th; alſo $= \frac{2QS + R^2 - v - nm^2}{2nl}$ by the 5th; and $= \frac{2RS - w}{2nm}$ by the 6th Equation. If all theſe Conditions coincide, then for the propoſed $x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vx^2 + wx + z = 0$, write $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qx^2 + Rx + S = \sqrt{n \times kx^2 + lx + m}x + b$. But beſide this general Rule, there may be particular Rules for Equations in the particular Degrees of even Dimenſions, as in the following.

and divided by 4 *to leave Unity, if either of the Terms* p *and* r. *be odd. Put alſo for* k *ſome Diviſor of the Quantity* $\frac{\beta}{n}$ *if* p *be even; or half of the odd Diviſor, if* p *be odd; or nothing, if the Dividual* β *be nothing. Take the Quotient from* $\frac{1}{2}$pk, *and call the half of the Remainder* l. *Then for* Q *put* $\frac{\alpha + nkk}{2}$ *and try if* n *divides* QQ − s, *and the Root of the Quotient be rational and equal to* l; *which if it happen, add to each Part of the Equation* nkkxx + 2nklx + nll, *and extract the Root on both Sides, there coming out* xx + $\frac{1}{2}$px + Q = $\sqrt{}$ n *into* $\overline{kx+l}$. (*d*)

For

CXLI. (*c*). If the Equation be a Quadratic $x^2 + px + q = 0$; here $2r = 2$, whence $r = 1$, and $r - 1 = 0$. That is, the Equation is not defective, and n, k, &c. are $= 0$. Whence to reduce it, it is to be made defective, by tranſpoſing q, but $x^2 + px$ is (Eucl. II. 4.) compleated into a Square, by adding $\frac{1}{4}p^2$; wherefore adding $\frac{1}{4}p^2$ to $x^2 + px$, and to q, there is $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \pm q + \frac{1}{4}p^2$; and extracting the Root, $x \pm \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q}$, &c. (LXXIV).

CXLII. (*d*). Here $2r = 4$; whence $r = 2$, $r - 1 = 1$; whence the Root of the greater Square is $x^2 + \frac{1}{2}px + Q$, and that of the Complement $\sqrt{n} \times \overline{kx + l}$ (278); whence the three Equations for the Greek Letters are firſt, $q - \frac{1}{4}p^2 = \alpha$; ſecond, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$; third, $s - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$ (279); but here let us uſe ζ, for γ; following the Notation of the Author: Becauſe $r = 2$, thence n muſt be the common Diviſor of β and ζ, (289); it muſt alſo be odd, if p, or r, be odd, (293); and divided by 4, to leave Unity, (294); and neither a Square, or Multiple of a Square, (290). The three Equations for the Coefficients

For Example, let there be propoſed the Equation $x^4 + 12x - 17 = 0$, and becauſe p and q are both here wanting, and r is 12, and s is -17, having ſubſtituted theſe Numbers,

---

Coefficients will be 1ſt, $2Q + \frac{1}{4}p^2 - q - nk^2 = 0$; 2d, $pQ - r - 2nkl = 0$; 3d, $Q^2 - s - nl^2 = 0$, (282). By the firſt, $Q = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$, and by the third, $nl^2 = Q^2 - s$; whence $n = \frac{\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}nk^2)^2 - s}{l^2} = \frac{\frac{1}{4}n^2k^4 + \frac{1}{2}\alpha nk^2 + \frac{1}{4}\alpha\alpha - s}{l^2}$

$= \frac{\frac{1}{4}\alpha^2 - s}{-\frac{1}{4}nk^4 - \frac{1}{2}\alpha k^2 + l^2} = \frac{s - \frac{1}{4}\alpha^2}{\frac{1}{4}nk^4 + \frac{1}{2}\alpha k^2 - l^2}$

$= \frac{\zeta}{k^2 \times \frac{1}{4}nk^2 + \frac{1}{2}\alpha - l^2}$. But the Form will be more commodious, by writing $n = \frac{2\zeta}{k^2 \times \frac{1}{2}pk^2 + \alpha - 2l^2}$, that is, n is to divide 2ζ by $k^2 \times \frac{1}{2}nk^2 + \alpha - 2l^2$. Again, by the firſt Equation, $Q = \frac{1}{2}nk^2 + \frac{1}{2}\alpha$; and by the ſecond, $Q = \frac{2nkl + r}{p}$; whence $\frac{1}{2}pnk^2 + \frac{1}{2}p\alpha - r = 2nkl$, that is, $-2nkl = r - \frac{1}{2}p\alpha - \frac{1}{2}pnk^2 = \beta - \frac{1}{2}pnk^2$; whence $\frac{1}{2}pnk^2 - 2nkl = \beta$, and $n = \frac{\beta}{k \times \frac{1}{2}pk - 2l}$. Now ſince n divides β, by the Quote $k \times \frac{1}{2}pk - 2l$; k will divide $\frac{\beta}{n}$ by the Quote $\frac{1}{2}pk - 2l$; and ſubducting the Quote $\frac{1}{2}pk - 2l$, from $\frac{1}{2}pk$; the Reſidue is $2l$; and half the Remainder is l. And by the third Equation, $l = \sqrt{\frac{Q^2 - s}{n}}$: Now when p is odd, the Root $\frac{\sqrt{Q^2 - s}}{n}$ may be $2l$ (295) becauſe of a Fraction; wherefore half the odd Diviſor of $\frac{\beta}{n}$ is then to be taken for l.

Numbers, you will have $\alpha = 0$, $\beta = 12$, and $\zeta = -17$, and the only common Diviſor of β and 2ζ, or 12 and -34 *viz.* 2, will be n. Moreover, $\frac{\beta}{n}$ is 6, and its Diviſors 1, 2, 3, and 6, are ſucceſſively to be tried for k, and -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$, for l reſpectively. But $\frac{\alpha + nkk}{2}$, that is, kk is equal to Q. Moreover, $\sqrt{\frac{QQ-s}{n}}$, that is, $\sqrt{\frac{QQ+17}{2}}$ is $= l$.

Where the even Numbers 2 and 6 are writ for k, Q becomes 4 and 36, and $QQ - s$ will be an odd Number, and conſequently cannot be divided by n or 2. Wherefore thoſe Numbers 2 and 6 are to be rejected. But when 1 and 3 are writ for k, Q becomes 1 and 9, and $QQ - s$ is 18 and 98, which Numbers may be divided by n, and the Roots of the Quotients extracted. For they are ± 3 and ± 7; whereof however only -3 agrees with l. I put therefore $k = 1$, $l = -3$, and $Q = 1$, and I add the Quantity $nkkxx + 2nklx + nll$, that is, $2xx - 12x + 18$ to each Part of the Equation, and there comes out $x^4 + 2xx + 1 = 2xx$

---

296. *When* $k = 0$, *then neceſſarily* $\beta = 0$; *becauſe by the firſt Equation* $Q = \frac{r}{2}\alpha$, *and by the ſecond,* $pQ = r$; *whence* $\beta = (r - \frac{1}{2}\alpha p) = pQ - pQ = 0$. *In this Caſe,* n *being ſome Diviſor of* 2ζ, *if* $\frac{\frac{1}{4}a^2 - s}{n}$ *is a Square Number, its Root is* l.

297. β *may vaniſh altho'* k *be a real Quantity, if* $\frac{1}{2}pk = 2l$, *or* $\frac{1}{4}pk = l$; *for* $\beta = n \times k \times \frac{1}{2}pk - 2l$. *In this Caſe, of the compound Diviſors of* 2ζ, *take one which is a Multiple of a Square, but itſelf not a Square, as* nk^2; *then if the Quote* $\frac{2\zeta}{nk^2} = \alpha + \frac{1}{2}nk^2 - \frac{1}{2}p^2$; $\frac{1}{4}pk$ *ſhall be* l.

$-12x+18$, and extracting on both Sides the Root $xx+1=x\sqrt{2}-3\sqrt{2}$. But if you had rather avoid the Extraction of the Root, make $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n\times kx+l}$, and you will find, as before, $xx+1=\pm\sqrt{2}\times x-3$. And if again you extract the Root of this Equation, there will come out $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\pm\sqrt{\frac{-1}{2}\mp 3\sqrt{2}}$, that is, according to the Variations of the Signs, $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, and $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Alſo $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, and $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Which are four Roots of the Equation at firſt propoſed, $x^4+12x-17=0$. But the two laſt of them are impoſſible.

Let us now propoſe the Equation $x^4-6x^3-58xx-114x-11=0$, and by writing -6, -58, -114, and -11, for p, q, r, and s reſpectively, there will ariſe $-67=\alpha$, $-315=\beta$, and $-1133\frac{1}{4}=\zeta$. The only common Diviſor of the Numbers β and 2ζ, or of -315 and $-\frac{4533}{2}$ is 3, and conſequently will be here n, and the Diviſors of $\frac{\beta}{n}$ or -105, are 3, 5, 7, 15, 21, 35, and 105, which are therefore to be tried for k. Wherefore, I try firſt 3, and the Quotient -35, which comes out by dividing $\frac{\beta}{n}$ by k, or -105 by 3. I ſubtract from $\frac{1}{2}pk$, or -3×3, and there remains 26; the half whereof, 13 ought to be l. But $\frac{\alpha+nkk}{2}$, or $\frac{-67+27}{2}$, that is, -20, will be Q, and $QQ-s$ will be 421, which may be divided by n, or 3, but the Root of the Quotient 137 cannot be extracted. Wherefore

fore I reject 3, and try 5 for k. The Quotient that now comes out by dividing $\frac{\beta}{n}$ by k, or -105 by 5, is -21, and ſubtracting this from $\frac{1}{2}pk$, or -3×5, there remains 6, the half whereof 3 will be l. Alſo Q or $\frac{\alpha+nkk}{2}$, that is $\frac{-67+75}{2}$, is the Number 4. And $QQ-s$, or $16+11$ may be divided by n; and the Root of the Quotient, which is 9, being extracted, *i. e.* 3 agrees with l. Wherefore I conclude that l is $=3$, $k=5$, $Q=4$, and $n=3$; and if $nkkxx+2nklx+nll$, that is, $75xx+90x+27$ be added to each Part of the Equation, the Root may be extracted on both Sides, and there will come out $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n\times kx+l}$, or $xx-3x+4=\pm\sqrt{3\times 5x+3}$; and the Root being again extracted, $x=\frac{3\pm 5\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{17\pm\frac{21\times\sqrt{3}}{2}}$.

Thus, if there was propoſed this Equation $x^4-9x^3+15xx-27x+9=0$, by writing -9, $+15$, -27, and $+9$ for p, q, r, and s reſpectively, there will come out $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $-05\frac{5}{8}=\beta$, and $2\frac{7}{64}=\zeta$. The common Diviſors of β and 2ζ, or $-\frac{405}{8}$ and $\frac{135}{32}$ are 3, 5, 9, 15, 27, 45, and 135; but 9 is a ſquare Number, and 3, 15, 27, 135, divided by the Number 4, do not leave Unity, as, by reaſon of the odd Term p, they ought to do. Theſe therefore being rejected, there remain only 5 and 45 to be tried for n. Let us put therefore, firſt $n=5$, and the odd Diviſors of $\frac{\beta}{n}$ or $-\frac{81}{8}$ being halved, viz. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, are to be tried for k. If k be made $\frac{1}{2}$, the Quotient $-\frac{81}{4}$, which comes out by dividing $\frac{\beta}{n}$ by k, ſubtracted from $\frac{1}{2}pk$,

or

or $-\frac{9}{4}$, leaves 18 for $2l$, and $\frac{\alpha+nkk}{2}$ or -2 is Q, and $QQ-s$, or -5 may be divided indeed by n or 5, but the Root of the negative Quotient -1 is impossible, which yet ought to be 9. Wherefore I conclude k not to be $\frac{1}{4}$, and then I try if it be $\frac{3}{4}$. The Quotient which arises by dividing $\frac{\beta}{n}$ by k, or $-\frac{81}{8}$ by $\frac{3}{4}$, *viz.* the Quotient $-\frac{27}{4}$ I subtract from $\frac{1}{2}pk$ or $-\frac{27}{4}$, and there remains 0. Whence now l will be nothing. But $\frac{\alpha+nkk}{2}$ or 3 is equal to Q, and $QQ-s$ is nothing; whence again l, which is the Root of $QQ-s$, divided by n, is found to be nothing. Wherefore these things, thus agreeing, I conclude n to be $=5$, $k=\frac{3}{4}$, $l=0$, and $Q=3$, and therefore by adding to each Part of the Equation proposed the Terms $nkkxx+2nlkx+nll$, that is, $\frac{7}{4}xx$, and by extracting on both Sides the square Root, there comes out $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{nk}\times\overline{kx+l}$, that is, $xx-4\frac{1}{2}x+3=\sqrt{5}\times\frac{3}{4}x$.

CXLIII. *By the same Method literal Equations are also reduced.* As if there was $x^4-2ax^3+\frac{2aa}{-cc}xx-2a^3x+a^4=0$, by substituting $-2a$, $2aa-cc$, $-2a^3$, and $+a^4$ for p, q, r, and s respectively, you will obtain $aa-cc=\alpha$, $-acc-a^3=\beta$, and $\frac{3}{4}a^4+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{4}c^4=\zeta$. The common Divisor of the Quantities β and 2ζ is $aa+cc$, which therefore will be n; and $\frac{\beta}{n}$ or $-a$, has the Divisors 1 and a. But because n is of two Dimensions, and $k\sqrt{n}$ ought to be of no more than one, therefore k will be of none, and consequently cannot be a. Let therefore k be 1, and $\frac{\beta}{n}$ being divided by k, take the Quotient $-a$ from $\frac{1}{2}pk$

or

or $-a$ and there will remain nothing for l. Moreover, $\frac{a+nkk}{2}$ or aa is Q, and $QQ-s$ or a^4-a^4 is 0; and thence again there comes out nothing for l. Which shews the Quantities n, k, l, and Q to be rightly found; and adding to each Part of the Equation proposed, the Terms $nkkxx+2nklx+nll$, that is, $aaxx+ccxx$, the Root may be extracted on both Sides; and by that Extraction there will come out $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{nxx+2klx+ll}$, that is, $xx-ax+aa=\pm x\sqrt{aa+cc}$. And the Root being again extracted, you will have $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}\pm\sqrt{\frac{1}{2}qa-\frac{1}{2}q\sqrt{aa+cc}}$.

CXLIV. Hitherto I have applied *the Rule* to the Extraction of *surd Roots*; the same *may also be applied to the Extraction of rational Roots, if for the Quantity* n *you make use of Unity; and after that Manner we may examine, whether an Equation that wants fracted or surd Terms can admit of any Divisor, either rational or surd, of two Dimensions.* As if the Equation $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$ was proposed, by substituting -1, -5, $+12$, and -6 for p, q, r, and s respectively, you will find $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $9\frac{1}{4}=\beta$, and putting $n=1$. The Divisors of the Quantity $\frac{\beta}{n}$, or $\frac{37}{4}$, are 1, 3, 5, 15, 25, 75; the Halves whereof (if p be odd) are to be tried for k. And if for k we try $\frac{5}{2}$ you will have $\frac{5}{2}p-\frac{\beta}{nk}=-5$, and its half $-\frac{5}{2}=l$. Also $\frac{\alpha+nkk}{2}=\frac{1}{2}=Q$, and $\frac{QQ-s}{n}=6\frac{1}{16}$, the Root whereof agrees with l.

I therefore conclude, that the Quantities n, k, l, Q, are rightly found; and having added to each Part of the Equation the Terms $nkkxx+2nklx+nll$, that is, $6\frac{1}{4}xx-12\frac{1}{2}x+6\frac{1}{16}$, the Root may be extracted on

both Sides; and by that Extraction there will come out $xx + \frac{1}{2}px + Q = \pm\sqrt{n \times kx + l}$, that is, $xx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = \pm 1 \times 2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$, or $xx - 3x + 3 = 0$, and $xx + 2x - 2 = 0$, and so by these two quadratic Equations the biquadratic one proposed may be divided. (e) *But rational Divisors of this Sort may more expeditiously be found by another Method delivered above.*

CXLIV. (f). 298. *The Value of* Q *may be found in this Case, the Divisor* n *being* 1, *without Trials by the Solution of the cubic Equation* $Q^3 - \frac{1}{2}qQ^2 + \frac{1}{4}pr - s \times Q - \frac{r^2 - 4s}{8} \times \frac{p^2 - 4q}{8} = 0$, *and thence the Values of* k *and* l *will be found*; for by the first Equation in CXLII. $2Q + \frac{1}{4}p^2 - q = k^2$; by the second, $pQ - r = \alpha kl$; and by the third, $Q^2 - s = l^2$; whence the Product of the first and third is equal to $\frac{1}{4}$ the Square of the second; that is, $k^2l^2 = 2Q^3 + \frac{1}{4}p^2 - q \times Q^2 - 2sQ - s \times \frac{1}{4}p^2 - q = \frac{1}{4}p^2Q^2 - \frac{1}{2}prQ + \frac{1}{4}r^2$; wherefore transposing the Terms into one Member, and dividing by 2, we have $Q^3 - \frac{1}{2}qQ^2 + \frac{1}{4}pr - s \times Q - \frac{r^2 - 4s}{8} \times \frac{p^2 - 4q}{8} = 0$. and Q being found, we have $k = \sqrt{2Q + \frac{1}{4}p^2 - q}$, also $l = \frac{pQ - r}{2k}$. *Whence we shall have* x, *by extracting the square Root on both Sides, from* $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = \pm kx \pm l$; *which solved gives* $x = \pm\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p \mp \frac{1}{2}k^2 \pm l - Q} = \pm\frac{k}{2} - \frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{16}p^2 \mp \frac{1}{2}pk \pm l - Q}$ *exhibiting the four Roots of the given Biquadratic, according to the Variation of the Signs.*

CXLV.

CXLV. *If at any Time there are many Diviſors of the Quantity* $\frac{\beta}{n}$, *ſo that it may be too difficult to try all of them for* k, *their Number may be ſoon diminiſhed, by ſeeking all the Diviſors of the Quantity,* $\alpha s - \frac{1}{4} r r$. *For the Quantity* Q *ought to be equal to ſome of theſe, or to the half of ſome odd one.* Thus, in the laſt Example $\alpha s - \frac{1}{4} r r$ is $-\frac{9}{2}$, ſome one of whoſe Diviſors, 1, 3, 9, or of them halved $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, ought to be Q. Wherefore, by trying ſingly the halved Diviſors of the Quantity $\frac{\beta}{n}$ *viz.* $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, and $7\frac{1}{2}$ for *k*, I reject all that do not make $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4} n k k$, or $-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} k k$; that is, Q to be one of the Numbers 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. But by writing $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $1\frac{1}{2}$, &c. for *k*, there come out reſpectively $-\frac{5}{12}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{5}{12}$, &c. for Q; out of which only $-\frac{3}{2}$ and $\frac{1}{2}$ are found among the aforeſaid Numbers 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, and conſequently the reſt being rejected, either *k* will be $= \frac{3}{2}$ and $Q = -\frac{3}{2}$, or $k = \frac{5}{2}$ and $Q = \frac{1}{2}$. Which two Caſes let be examined. And ſo much of Equations of *four Dimenſions.* (*f*)

CXLVI. *If an Equation of ſix Dimenſions is to be reduced let it be* $x^6 + p x^5 + q x^4 + r x^3 + s x x + t x + v = 0$, *and make*

$$q - \tfrac{1}{4} p p = \alpha. \quad r - \tfrac{1}{2} p \alpha = \epsilon. \quad s - \tfrac{1}{2} p \beta = \gamma.$$
$$\gamma - \tfrac{1}{4} \alpha \alpha = \zeta. \quad t - \tfrac{1}{2} \alpha \beta = \eta. \quad v - \tfrac{1}{4} \beta \beta = \theta.$$
$$\zeta\theta - \tfrac{1}{4} \eta\eta = \lambda.$$

CXLV. (*f*). For by the third Equation, $s = Q^2 - n k^2$; whence $as = aQ^2 - an k^2$; and by the ſecond Equation, $\frac{1}{4} r^2 = \frac{1}{4} p^2 Q - p Q n k l + n^2 l^2 k^2$; whence $as - \frac{1}{4} r^2 = a Q^2 - \overline{a + n k^2} \times n l^2 - \frac{1}{4} p^2 Q^2 + p Q n k l$; but by the firſt Equation, $a + n k^2 = 2Q$; wherefore $as - \frac{1}{4} r^2 = aQ^2 - 2 Q n l^2 - \frac{1}{4} p^2 Q^2 + p Q n k l$; conſequently Q being in every Term is a Diviſor.

Then

Then for n *take of the Terms* 2ζ, η, 2θ, *some common integer Diviſor, that is not a Square, and that likewiſe is not diviſible by a ſquare Number, and which alſo divided by the Number* 4, *ſhall leave Unity; provided any one of the Terms* p, r, t, *be odd. For* k *take ſome integer Diviſor of the Quantity* $\frac{\lambda}{2nn}$ *if* p *be even, or the half of an odd Diviſor if* p *be odd, or* 0 *if* λ *be* 0. *For* Q *take the Quantity* $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$. *For* l *ſome Diviſor of the Quantity* $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ *if* Q *be an Integer; or the half of an odd Diviſor if* Q *be a Fraction that has for its Denominator the Number* 2; *or* 0, *if that Dividual* $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ *be nothing. And for* R *the Quantity* $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}Qp + nkl$. *Then try if* RR − y *can be divided by* n, *and the Root of the Quotient extracted; and beſides, if that Root be equal as well to the Quantity* $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ *as to the Quantity* $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$. *If all theſe happen, call that Root* m; *and in room of the Equation propoſed, write this,* $x^3 + \frac{1}{2}px x + Qx + R = \pm\sqrt{n} \times kxx + lx + m$. *For this Equation, by ſquaring its Parts, and taking from both Sides the Terms on the right Hand, will produce the Equation propoſed. Now if all theſe Things do not happen in the Caſe propoſed, the Reduction will be impoſſible, provided it appears beforehand that the Equation cannot be reduced by a rational Diviſor* (g).

For

CXLVI. (g). For $2r = 6$, whence $r = 3$, and $r - 1 = 2$, wherefore the Roots are $x^3 + \frac{1}{2}px^2 + Qx + R$, and $\sqrt{n} \times \overline{kx^2 + lx + m}$ (280); and the Equations for Greek Letters 1ſt. $q - \frac{1}{4}p^2 = \alpha$; 2d. $r - \frac{1}{2}\alpha p = \beta$; 3d. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$; 4th. $t - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$; 5th. $v - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$ (279).

but

For Example, let there be proposed the Equation $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 \begin{matrix} -2aabb \\ +2a^3b \\ -4ab^3 \end{matrix} xx \begin{matrix} +3aab^4 \\ -a^4bb \end{matrix}$ $= 0$, and by writing $-2a$, $+2bb$, $+2abb$, $-2aabb + 2a^3b - 4ab^3$, 0, and $3aab^4 - a^4bb$ for p, q, r, s, t, and v respectively, there will come out $2bb - aa$

---

but for γ, δ, ε, let us write ζ, η, θ, respectively, to conform to the Author's Notation. The Equations for the Coefficients are 1st, $2Q + \frac{1}{4}p^2 - q - nk^2 = 0$; 2d, $2R + pQ - r - 2nkl = 0$; 3d. $pR + Q^2 - s - 2nkm - nl^2 = 0$; 4th, $2QR - t - 2nlm = 0$; and 5th, $R^2 - v - nm^2 = 0$ (282). also $r = 3$, whence n must be the common Divisor of ζ, η, θ, (289): and have the other general Limitations of N°. 290, 293, 294.

Now by the first, second, and third Equations, as in Art. CXLII. by equating the Values of R, n is found to divide 2ζ, by $k \times \overline{\frac{1}{2}n^2k^3 - ak - \frac{1}{2}p^2k + 2pl - 4m} - 2l^2$; wherefore k cannot divide $\frac{2\zeta}{n}$, except $-2l^2$ be made to vanish. Also by first and fourth Equations, $R = \frac{t + 2nlm}{a + nk^2} =$ (by second Equation) $-\frac{1}{4}pnk^2 + nkl + \frac{1}{2}\beta$; whence by Multiplying by α, and transposing, we have $\eta = (t - \frac{1}{2}\alpha\beta) - \frac{1}{4}\alpha pn^2k^4 + \alpha n^2lk^3 - 2nlm$; wherefore $n = \frac{\eta}{k \times \overline{\alpha pnk^3 + \alpha nk^2} - 2lm}$; whence k cannot divide $\frac{\eta}{n}$, except $2lm$ be made to vanish; by the fifth Equation, $R^2 = v + nm^2 =$ (by second Equation) $\frac{1}{16}p^2n^2k^4 - \frac{1}{2}pln^2k^3 - \overline{\frac{1}{4}p\beta n + l^2n^2} \times k^2 + l\beta nk - nm^2$; whence by dividing and multiplying by 2, $n =$

2 8

$-aa=\alpha$. $4abb-a^3=\zeta$. $2a^2b+2aabb-4ab^3-a^4=\gamma$. $-b^4+2a^3b+3aabb-4ab^3-\frac{5}{4}a^4=\xi$. $-\frac{1}{2}a^3-3a^2bb-4ab^4=\eta$, and $-aab^4+a^4b^2-\frac{1}{4}a^5=\theta$. And the common Divisor of the Terms 2ξ, η, and 2θ, is $aa-2bb$, or $2bb-aa$, according as aa or $2bb$ is the greater. But let aa be greater than $2bb$,

---

$$\frac{2\theta}{k\times\frac{1}{8}p^2n^2k^3-pln^2k^2-\frac{1}{2}p\beta nk+2n^2l^2k+l\beta n-2m^2}$$

whence k cannot divide $\frac{2\theta}{n}$, unless $2m^2$ is made to vanish. Whence that n may divide $\frac{2\xi}{n}$, $\frac{\eta}{n}$, and $\frac{2\theta}{n}$; $-2l^2+2lm-2m^2$ must vanish: But this will be done, if ζ be multiplied into θ, and $\frac{1}{4}$ of nn subducted from the Product; for $\zeta\theta-\frac{1}{4}nn=\frac{1}{64}p^2n^4-\frac{1}{64}\alpha^2p^2n^4\times k^8+\frac{1}{8}\alpha^2pln^4-\frac{1}{8}pln^4\times k^7+\frac{1}{2}l^2n^4+\frac{1}{4}\alpha^2l^2n^4+\frac{1}{32}\alpha p^2n^3-\frac{1}{64}p^4n^3-p\beta n^3\times k^6+\frac{1}{4}l\beta n^3-\frac{1}{4}\alpha lpn^3+\frac{3}{16}lp^3n^3-\frac{1}{8}mp^2n^3\times k^5-\frac{1}{4}nm^2-\frac{1}{8}\alpha\beta pn^2+\frac{1}{2}\alpha l^2n^3+\frac{1}{16}\beta p^3n^2-\frac{1}{16}p^2n^2l^2+mpln^3-\frac{1}{4}\alpha plnm\times k^4+\frac{3}{2}\alpha l\beta n^2-\frac{1}{2}l\beta p^2n^2+\frac{3}{2}pl^3n^3+\frac{1}{2}p\beta mn^2-2ml^2n^3+\alpha ml^2n^3\times k^3-\frac{1}{2}\alpha m^2n^2+\frac{1}{4}p^2m^2n^2+\frac{5}{4}p\beta l^2n^2-2m\beta ln^2-l4n\times k^2-plm^2n^2+2m^2n^2-\beta l3n^2\times k$, the Term $l^2m^2n^2$ having vanished, the Residue is Divisible both by n^2 and k; both which are in every Term. Wherefore writing $\zeta\theta-\frac{1}{4}nn=\lambda$, we have $k=\frac{\lambda}{2nn}$. Having found n, and k, $Q=\frac{nk^2+\alpha}{2}$ (283), and $R=\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}p\alpha-\frac{1}{4}pnk^2+nkl$ (284) $=$ (by the fourth Equation) $\frac{t+2nlm}{\alpha+nk2}$; whence by Multiplication and Transposition, $\frac{1}{2}nk^2+\frac{1}{2}\alpha\times r-\frac{1}{4}n^2k^4-\frac{1}{2}ank^2-\frac{1}{4}aa\times p$

$2bb$, and $aa - 2bb$ will be n. For n must always be affirmative. Moreover, $\frac{\zeta}{n}$ is $-\frac{1}{4}aa + 2ab + \frac{1}{2}bb$, $\frac{\eta}{n}$ is $-\frac{1}{2}a^3 + 2abb$ and $\frac{\theta}{n}$ is $-\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb$, and consequently $\frac{\zeta}{2n} \times \frac{\theta}{n} - \frac{\eta\eta}{8nn}$ or $\frac{\varkappa}{2nn}$, is $\frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{4}a^5 b - \frac{1}{8}a^4 bb + \frac{1}{2}a^3 b3 - \frac{3}{8}aab^4$, the Diviſors whereof are 1, a, aa; but becauſe $\sqrt{n} \times k$ cannot be of more than one Dimenſion, and the $\sqrt{n}$ is of one, therefore k will be of none; and conſequently can only be a Number. Wherefore, rejecting a and aa, there remains only 1 for k. Beſides, $\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}nkk$ gives 0 for Q, and $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ is alſo nothing; and conſequently l, which ought to be its Diviſor, will be nothing. Laſtly, $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$ gives abb for R. And $RR - v$ is $-2aab^4 + a^4bb$, which may be divided by n or $aa - 2bb$, and the Root of the Quotient $aabb$ be extracted,

---

$\times p - t =$ (that is $rQ - pQ - t$) $l \times \overline{2nm - k^2n^2 - \alpha nk}$; wherefore $l = \frac{rQ - pQ - t}{n \times 2m - k^3 n - \alpha k}$: Whence k is a Diviſor of $\frac{rQ - pQ - t}{n}$, by $2m - k^3 - \alpha k$: l being found, $R = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$ (284). Laſtly, $m =$ (by the fifth Equation) $\sqrt{\frac{R^2 - v}{n}}$; $=$ (by the 4th Equation) $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$; $=$ (by the third Equation) $\frac{Q^2 + pR - nl^2 - s}{2nk}$. Wherefore if all coincide, for $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$, write $x^3 + \frac{1}{2}px^2 + Qx + R = \pm\sqrt{n} \times \overline{kx^2 + lx + m}$.

and

and that Root taken negatively, *viz.* $-ab$, is not unequal to the indefinite Quantity $\frac{QR-\frac{1}{2}pt}{nl}$ or $\frac{0}{0}$, but equal to the definite Quantity $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$ Wherefore that Root $-ab$ will be m, and in the Room of the Equation propoſed, there may be writ $x^3-\frac{1}{2}pxx+Qx+R=\sqrt{nxkxx+lx+m}$, that is, $x^3-axx+abb=\sqrt{aa-2bb}\times xx-ab$. *The Truth of which Concluſion you may prove by ſquaring the Parts of the Equation found, and taking away the Terms on the Right Hand from both Sides.* For from that Operation will be produced the Equation $x^6-2ax^5+2bbx^4+2abbx^3-2aabbxx+2a^3bxx-4abbxx+3aabb-a^4bb=0$, which was propoſed to be reduced.

CXLVII. *If the Equation is of eight Dimenſions, let it be* $x^8+px^7+qx^6+rx^5+sx^4+tx^3+vxx+wx+z=0$, *and make* $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$. $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$. $v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$. $w-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$, *and* $z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$. *And ſeek of the Terms* 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, *a common Diviſor that ſhall be an Integer, and neither a ſquare Number, nor diviſible by a ſquare Number, and which alſo divided by* 4 *ſhall leave Unity, provided any of the alternate Terms,* p, r, t, w *be odd. If there be no ſuch common Diviſor, it is certain, that the Equation cannot be reduced by the Extraction of a quadratick ſurd Root, and if it cannot be ſo reduced, there will ſcarce be found a common Diviſor of all thoſe four Quantities. The Operation therefore hitherto is a Sort of an Examination, whether the Equation be reducible or not; and conſequently, ſince that Sort of Reductions are ſeldom poſſible, it will moſt commonly end the Work.* (*b*).

CXLVIII. *And, by a like Reaſon, if the Equation be of ten, twelve, or more Dimenſions, the Impoſſibility of its Reduction may be known.*

CXLVII. (*b*) See N°. 295.

As if it be $x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, *you muſt make* $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta\delta = \varkappa$, *and ſeek ſuch a common Diviſor to the five Terms,* 2ε, 2ζ, 8η, 4θ, $8\varkappa$, *as is an Integer, and not a Square, and which ſhall alſo leave* 1 *when divided by* 4, *if any one of the Terms* p, r, t, a, c, *be odd* (*i*).

CXLIX. *So if there be an Equation of twelve Dimenſions, as* $x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ *make* $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{2}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta\delta = \varkappa$, $e - \frac{1}{2}\delta\varepsilon = \lambda$, $f - \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon = \mu$, *and you muſt ſeek a common integer Diviſor of the ſix Terms* 2ζ, 8η, 4θ, $8\varkappa$, 4λ, 8μ, *that is not a Square, but being divided by* 4 *ſhall leave Unity, provided any one of the Terms* p, r, t, a, c, e, *be odd.*

CL. *And thus you may go on* ad infinitum, *and the propoſed Equation when it has no common Diviſor, will be always irreduceable by the Extraction of the ſurd quadratick Root. But if at any Time ſuch a Diviſor* n *being found, there are Hopes of a future Reduction, it may be tried by following the Steps of the Operation we ſhewed in an Equation of eight Dimenſions* (*k*).

CLI. *Seek a ſquare Number, to which after it is multiplied by* n, *the laſt Term* z *of the Equation being added under its proper Sign, ſhall make a ſquare Number. But that may be expeditiouſly performed if you add to* z, *when* n *is an even Number, or to* 4z *when it is odd, theſe Quantities ſucceſſively* n, 3n, 5n, 7n, 9n, 11n, *and ſo on till the Sum becomes equal to ſome Number in the Table of ſquare Numbers, which I ſuppoſe to be ready at Hand* (*l*). *And if no ſuch ſquare*

CXLVIII. (*i*) See N°. 279.

CL. (*k*) See N°. 295.

CLI. (*l*) For the Sums of the odd Laterals are ſquare Numbers. (43).

Number occurs before the ſquare Root of that Sum, augmented by the ſquare Root of the Exceſs of that Sum above the laſt Term of the Equation, is four Times greater than the greateſt of the Terms of the propoſed Equation p, q, r, s, t, v, &c. *there will be no Occaſion to try any farther; for then the Equation cannot be reduced* (*m*). *But if ſuch a ſquare Number does accordingly occur, let its Root be* S, *if* n *is even, or* 2 S *if* n *be odd; and call* $\sqrt{\frac{SS-z}{n}} = h$. *But* S *and* h *ought to be Integers if* n *is even, but if* n *is odd, they may be Fractions that have* 2 *for their Denominator. And if one is a Fraction, the other ought to be ſo too. Which alſo is to be obſerved of the Numbers* R *and* m, Q *and* l, p *and* k *hereafter to be found. And all the Numbers* S *and* h, *that can be found within the preſcribed Limit, muſt be collected in a Catalogue.*

Afterwards, for k *all the Numbers are to be ſucceſſively tried, which do not make* $nkk + \frac{1}{2}p$ *four Times greater than the greateſt Term of the Equation, and you muſt in all Caſes put* $\frac{nkk+\alpha}{2} = Q$. *Then you are to try ſucceſſively for* l *all the Numbers that do not make* $nl \pm Q$ *four Times greater than the greateſt Term of the Equation, and in every Trial put* $\frac{-npkk+2\beta}{4} + nkl = R$. *Laſtly, for* m *you muſt try ſucceſſively all the Numbers which do not make* $nm \pm R$ *four Times greater than the greateſt of the Terms of the Equation, and you muſt ſee whether in any Caſe if you make* $s - QQ - pR + nll = 2H$, *and* $H + nkm = S$, *let* S *be ſome of the Numbers which were before brought into the Catalogue for* S; *and beſides, if the other Number anſwering to that* S, *which being ſet down for* h *in the ſame Catalogue, will be*

(*m*) For $4S^2 = 4z \pm 4nh^2$, if there is a fractional Term in the Root; now putting *y* the greateſt Term of the Equation, $4S^2 - 4nh^2$, *i.e.* $\overline{4z \pm 4nh^2} - 4nh^2 = 4z$; if then $\overline{4z \pm 4nh^2} - 4nh^2$ be greater than $4y$, it is greater than $4z$, and the Equation irreducible; whence *a fortiori*, if $\sqrt{4z \pm 4nh^2} + \sqrt{4z \pm 4nh^2} - 4nh^2$ be greater than $4y$, the Equation is irreducible.

equàl to theſe three, $\frac{2RS-w}{2nm}$, $\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}$, *and* $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}$. *If all theſe Things ſhall happen in any Caſe, inſtead of the Equation propoſed, you muſt write this* $x^4+px^3+Qxx+Rx+S=\sqrt{nkx^3+lxx+mx+n}$.

For Example, Let there be propoſed the Equation $x^8+4x^7-x^6-10x^5+5x^4-5x^3-10xx-10x-5=0$, and you will have $q=-\frac{1}{4}pp=-1=-4=-5=\alpha$, $r=-\frac{1}{2}p\alpha=-10+10=0=\beta$. $s=-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=5=\frac{25}{4}=-\frac{5}{4}=\gamma$. $t=-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=-5+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=\delta$. $v=-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=-10-\frac{25}{8}=-\frac{105}{8}$. $w=-\frac{1}{4}\beta\gamma=-10=\zeta$. $z=-\frac{1}{4}\gamma\gamma=-5=-\frac{25}{64}=-\frac{1625}{64}=\eta$. Therefore 2δ, 2ε, 2ζ, 8η reſpectively are -5, $-\frac{105}{4}$, -20, and $-\frac{1625}{8}$, and their common Diviſor 5, which divided by 4, leaves 1, as it ought, becauſe the Term s is odd. Since therefore the common Diviſor n, or 5, is found, which gives hope to a future Reduction, and becauſe it is odd, to $4z$, or -20, I ſucceſſively add n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, &c. or 5, 15, 25, 35, 45, &c. and there ariſes -15, 0, 25, 60, 105, 160, 225, 300, 385, 480, 585, 700, 825, 960, 1105, 1260, 1425, 1600. Of which only 0, 25, 225, and 1600 are Squares.

Wherefore the Halves of theſe Roots 0, $\frac{5}{2}$, $-\frac{15}{2}$, 20, are to be collected in a Table for the Values of S, and the Values of $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$, that is, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, 9, reſpectively for h. But becauſe $S+nh$, if 20 be taken for S and 9 for h, becomes 65, a Number greater than four Times the greateſt Term of the Equation; therefore I reject 20 and 9, and write only the reſt in the Table as follows:

h	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$
S	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{2}$

Then I try for k all the Numbers which do not make $\frac{1}{2}p\pm nk$, or $2\pm 5k$, greater than 40, (four Times the greateſt

greateſt Term of the Equation) that is, the Numbers — 8, — 7, — 6, — 5, — 4, — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, putting $\frac{nkk+\alpha}{2}$, or $\frac{5kk-5}{2}$, that is, the Numbers $\frac{315}{2}$, 120, $\frac{175}{1}$, 60, $\frac{75}{2}$, 20, $\frac{15}{1}$, 0, $-\frac{5}{2}$, 0, $\frac{15}{2}$, 20, $\frac{75}{1}$, 60, $\frac{175}{2}$, 120, reſpectively for Q. But even ſince $Q \pm n\,l$, and much more Q, ought not to be greater than 40, I perceive I am to reject $\frac{315}{2}$, 120, $\frac{175}{2}$, and 60, and their Correſpondents — 8, — 7, — 6, — 5, 5, 6, 7, and conſequently that only — 4, — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4, muſt reſpectively be tried for k, and $\frac{75}{2}$, 20, $\frac{15}{2}$, 0, $-\frac{5}{2}$, 0, $\frac{15}{2}$, 20, $\frac{75}{2}$, reſpectively for Q. Let us therefore try — 1 for k, and 0 for Q, and in this Caſe for l there will be ſucceſſively to be tried all the Numbers which do not make $Q \pm n\,l$ greater than 40, that is, all the Numbers between 10 and — 10; and for R you are reſpectively to try the Numbers $\frac{2\beta - npkk}{4} + nkl$, or $-5-5l$, that is, — 55, — 50, — 45, — 40, — 35, — 30, — 25, — 20, — 15, — 10, — 5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 35, 40, 45, the three former of which and the laſt, becauſe they are greater than 40, may be neglected. Let us try therefore — 2 for l, and 5 for R, and in this Caſe for m there will be beſides to be tried all the Numbers which do not make $R \pm nm$, or $5 \pm 5m$, greater than 40, that is, all the Numbers between 7 and — 9, and ſee whether or not by putting $s - QQ - p\,R + nll$, that is $5 - 20 + 20$ or $5 = 2H$, it may be $H + nkm$ or $\frac{5}{2} - 5m = S$; that is, if any of theſe Numbers $\frac{-65}{2}$, $\frac{-55}{2}$, $\frac{-45}{2}$, $\frac{-35}{2}$, $\frac{-25}{2}$, $\frac{-15}{2}$, $\frac{-5}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, $\frac{35}{2}$, $\frac{45}{2}$, $\frac{55}{2}$, $\frac{65}{2}$, $\frac{75}{2}$, $\frac{85}{2}$, is equal to any of the Numbers 0, $\pm\frac{5}{2}$, $\pm\frac{15}{2}$, which were brought into the Catalogue for S. And we meet with four of theſe $-\frac{15}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, to which anſwer $\pm\frac{7}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{7}{2}$, written for b in the ſame Table, as alſo 2, 1, 0, — 1 ſubſtituted for m. But let us try

$-\frac{1}{2}$ for S, 1 for m, and $\pm\frac{1}{2}$ for b, and you will have

$\frac{2RS-w}{2nm}=\frac{-25+10}{10}=-\frac{3}{2}$, and

$\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}=\frac{21+10-5}{20}=-\frac{1}{2}$, and

$\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}=\frac{-10+5+20}{-10}=-\frac{1}{2}$

Wherefore, since there comes out in all Cases $-\frac{1}{2}$, or b, I conclude all the Numbers to be rightly found, and consequently that in room of the Equation proposed, you must write $x^4+\frac{1}{2}px^3+Qxx+Rx+S=\sqrt{n\times kx^3+lxx+mx+b}$, that is, $x^4+2x^3+5x-2\frac{1}{2}=\sqrt{5\times -x^3-2xx+x-1\frac{1}{2}}$. For by squaring the Parts of this, there will be produced that Equation of eight Dimensions, which was at first proposed.

But if by trying all the Cases of the Numbers, all the aforesaid Values of b had not in any Case consented, it would be an Argument that the Equation could not be reduced by the Extraction of the surd quadratick Root.

But something might be here remarked for the Abbreviating of the Work, which however I pass over for the Sake of Brevity, seeing the Use of so great Reductions is very little, and I was willing to shew rather the Possibility of the Thing, than a Practice that was commodious. These therefore are the Reductions of Equations by the Extraction of the *surd quadratick Root*.

I might now join the Reductions of Equations by the *Extraction of the surd cubick Root*, but these as being seldom of Use, for Brevity I pass by.

CLII. Yet there are some Reductions of *cubick Equations* commonly known, which, if I should wholly pass over, the Reader might perhaps think us deficient. *Let there be proposed the cubick Equation* $x^3+qx+r=0$, *the second Term whereof is wanting. For that every cubick Equation may be reduced to this Form, is evident from what we have said above. Let* x *be supposed* $=a+b$. *Then will be* $a^3+3aab+3abb+b^3$ (*that is* x^3) $+qx+r=0$.

Let

Let $3aab+3abb$ (*that is*, $3abx$) $+qxbe=0$, *and then will* $a^3+b^3+rbe=0$. *By the former Equation* b *is* $=-\frac{q}{3a}$, *and cubically* $b^3=-\frac{q^3}{27a^3}$. *Therefore, by the latter,* $a^3-\frac{q^3}{27a^3}+r$ *is* $=0$, *or* $a^6+ra^3=\frac{q^3}{27}$, *and by the Extraction of the adfected quadratick Root,* $a^3=-\frac{1}{2}r \pm\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}$. *Extract the cubic Root and you will have* a. *And above, you had* $-\frac{q}{3a}=b$, and $a+b=x$. *Therefore* $a-\frac{}{3a}$ *is the Root of the Equation propoſed* (*n*).

For

CLII. (*n*). Or thus, ſuppoſe $a^3+b^3+r=0$, and $3ab+q=0$; then $a+b=x$. For $\overline{3ab+q}\ (=0) \times \overline{a+b}=3a^2b+3ab^2+qa+bq\ (=0)$, and this added to $a^3+b^3+r=0$, the Sum is $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+qa+qb+r=0$; which is the transformed which would have reſulted from the Subſtitution of $a+b$ for x in the Equation $x^3+qx+r=0$. Hence it follows, that if two Quantities can be found, which being ſubſtituted for a and b, will fulfil the Conditions, that $a^3+b^3+r=0$; and that $3ab+q=0$; then their Sum ſubſtituted for x will make alſo $x^3+qx+r=0$.

Becauſe $a^3+b^3+r=0$, therefore $b^3=-a^3-r$; and becauſe $3ab+q=0$, therefore $b=-\frac{q}{3a}$ and $b^3=-\frac{q^3}{27a^3}$; wherefore $a^3+r=\frac{q^3}{27a^3}$; and multiplying by a^3, $a^6+a^3r=\frac{q^3}{27}$; and by extracting the

For Example, let there be propoſed the Equation $y^3 - 6yy + 6y + 12 = 0$. To take away the ſecond Term of this Equation, make $x + 2 = y$, and there will ariſe $x^3 * - 6x + 8 = 0$. Where q is $= -6$, $r = 8$, $\frac{1}{4}rr = 16$, $\frac{q^3}{27} = -8$, $a^3 = -4 \pm \sqrt{8}$, $a - \frac{q}{3a} = x$, and $x + 2 = y$, that is, $2 + \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}} = y$.

CLIII. *And after this Way the Roots of all cubical Equations may be extracted wherein* q *is Affirmative; or alſo wherein* q *is Negative, and* $\frac{q^2}{27}$ *not greater than* $\frac{1}{4}rr$, *that is, when two of the Roots of the Equation are impoſſible. But where* q *is Negative, and* $\frac{q^3}{27}$ *at the ſame Time greater than* $\frac{1}{4}rr$, $\sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{q^3}{27}}$ *becomes an impoſſible Quantity; and ſo the Root of the Equation* x *or* y *will, in this Caſe, be impoſſible, viz. in this Caſe there are three poſſible Roots, which all of them are alike with reſpect to the Terms of the Equation* q *and* r, *and are indifferently denoted by the Letters* x *or* y, *and conſequently all of them ought to be extracted by the ſame Method, and expreſſed the ſame Way as any one is extracted or*

---

the affected quadratic Root, $a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$; and by extracting the cubic Root, $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$; and $b = \frac{q}{3a}$. Therefore $b = \frac{q}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}}$; and therefore $x = a + b = a - \frac{q}{3a} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}} - \frac{q}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}}$.

This is the firſt Form of Cardan's Rule.

expreſſed;

expreſſed; but it is impoſſible to expreſs all three by the Law aforeſaid. The Quantity $a - \frac{q}{3a^2}$ *whereby* x *is denoted, cannot be manifold, and for that Reaſon the Suppoſition that* x, *in this Caſe wherein it is threefold, may be equal to the Binomial* $a - \frac{q}{3a}$, *or* $a + b$, *the Cubes of whoſe Terms* $a^3 + b^3$ *may together be* $= r$, *and the triple Rectangle* $3ab$ *be* $= q$, *is plainly impoſſible; and it is no Wonder that from an impoſſible Hypotheſis, an impoſſible Concluſion ſhould follow* (o).

CLIII. (o). 299. *The cube Root of any Quantity is threefold.* For let the Equation be $y^3 - 1 = 0$; becauſe $y - 1 =$ divides it, giving the Quote $y^2 + y + 1 = 0$, therefore 1 is a Root; and reſolving the quadratic Quote $y^2 + y + 1 = 0$; $y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$: Wherefore the cube Roots of 1, are 1, $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, and $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$. Now becauſe the cube Root of any Quantity Z^3 may be $1 \times Z$, or $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times Z$, or $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times Z$; therefore ſuppoſing the cube Root of the Binome $-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$ to be $m\sqrt{n}$, its three Roots will be $1 \times \sqrt{m + \sqrt{n}}$, and $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt{m + \sqrt{n}}$, and $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt{m + \sqrt{n}}$.

If the Equation $x^3 + qx + r = 0$ can have two impoſſible Roots, $\sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$ will be poſſible (274) conſequently either $\frac{q^3}{27}$ will be affirmative, or $\frac{1}{4}r^2$ will be greater than $\frac{q^3}{27}$ under a negative Sign. Whence in the cube Root of the Binome $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$, when there

CLIV. *There is, moreover, another Way of expreſſing theſe Roots, viz. from* $a^3 + b^3 + r$, *that is, from nothing take* $a^3 + r$, *or* $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$, *and there will remain* $b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. *Therefore* a *is* $= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, *and* $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$; *or* $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, and $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, *and conſequently the Sum of theſe* $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}} +$

---

there are two impoſſible Roots, there can be no Expreſſion of Impoſſibility. On the contrary, if all the Roots of the Equation $x^3 + qx + r = 0$ are real, $\sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$ will be impoſſible (272); conſequently $\frac{q^3}{27}$ will be negative, and $\frac{1}{4}r^2$ will be leſs than $\frac{q^3}{27}$ under the negative Sign: whence in the cube Root of $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$, when there are no impoſſible Roots, there will yet be an Expreſſion of Impoſſibility. Whence it appears, that *tho' both Parts of the Binome are real, when the Roots are real; yet it is impoſſible, by this Method, to expreſs the irrational Part as a real Quantity; and in this Senſe it is that I would underſtand the Words,* Adeoque omnes eâdem lege deberent

erui

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$ *will be* $=x\,(p)$.

CLV. *Moreover the Roots of biquadratick Equations may be extracted and expreſſed by means of cubick ones.*

But firſt you muſt take away the ſecond Term of the Equation. Let the Equation that then reſults be $x^4+qxx+rx+s=0$. *Suppoſe this to be generated by the Multiplication of theſe two* $xx+ex+f=0$, *and* $xx-ex+g=0$, *that is to be the ſame with this* $x^4 * \begin{matrix}+f\\+g\\-ee\end{matrix} xx \begin{matrix}+eg\\-ef\end{matrix} x+$

---

erui et exprimi, quâ una aliqua eruitur et exprimitur: ſed omnes tres lege præfatâ exprimere impoſſibile eſt. *He ſays not*, eruere impoſſibile eſt; *but*, exprimere impoſſibile eſt.

CLIV. (p). Or thus, becauſe $a^3=-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}$, therefore $a^3+r=+\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}$, and conſequently, $b^3=-a^3-r-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}$; and thence $b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}}$; conſequently $x=a+b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}}$. And this is the ſecond Form of Cardan's Rule; by which it appears, that tho' there is an impoſſible Expreſſion in each Part, yet, becauſe it is affected with a contrary Sign, it will vaniſh in the Addition. This Rule, as it expreſſes rational Roots in the Form of irrationals, and commenſurate as incommenſurate, and as thoſe Roots can be obtained by a ſhorter and eaſier Method (275, &c.) is of no Advantage, except in the Caſe of two impoſſible or two equal Roots.

$fg=0$,

$fg=0$, *and comparing the Terms you will have* $f+g=ee=q$, $eg-ef=r$, *and* $fg=s$. *Wherefore* $q+ee=f+g$, $\frac{r}{e}=g-f$, $\frac{q+ee+-\frac{r}{e}}{2}=g$, $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$, $\frac{qq+2eeq+e^4-\frac{rr}{ee}}{4}(=fg)=s$, *and by Reduction* $e^6+2qe^4+\frac{qq}{-4s}ee-rr=0$. *For* ee *write* y; *and you will have* $y^3+2qyy+\frac{qq}{-4s}y-rr=0$, *a cubick Equation, whose second Term may be taken away, and then the Root extracted either by precedent Rule or otherwise* (*q*). *Then that Root being had, you must go back again, by putting* $\sqrt{y}=e$, $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$, $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$, *and the two Equations* $xx+ex+f=0$, *and* $xx-ex+g=0$, *their Roots being extracted, will give the four Roots of the biquadratick Equation* $x^4+qxx+rx+s=0$, *viz.* $x=-\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-f}$, *and* $x=\frac{1}{2}e+\sqrt{\frac{1}{4}ee-g}$.

CLV. (*q*). For the Roots of the biquadratic being four, let the Sum of any two with the Sign changed be called e, the Binaries (35) of four Quantities, whereof two are equal to two with their Signs changed, are six; whence e is sixfold: Therefore the Equation whereby e may be found will have six Roots and Dimensions, and because (for the second Term of the Biquadratic is wanting) three of those six Roots are respectively equal to three with their Signs changed, the Terms of odd Dimensions will be wanting; and therefore the Equation can be transformed into a Cubic, by which the Squares of the Roots may be found.

CLVI. *Where*

CLVI. *Where note, that if the four Roots of the biquadratick Equation are possible, the three Roots of the cubick Equation* $y^3 + 2qyy \pm \frac{qq}{4s} y - rr = 0$ *will be possible also, and consequently cannot be extracted by the precedent Rule* (*r*).

CLVII. *And thus, if the affected Roots of an Equation of five or more Dimensions are converted into Roots that are not affected, the middle Terms of the Equation being some way or other taken away, that Expression of the Roots will be always impossible, where more than one Root in an Equation of odd Dimensions are possible, or more than two in an Equation of even Dimensions, which cannot be reduced by the Extraction of the surd quadratic Root, by the Method laid down above.*

Monsieur *Des Cartes* taught how to reduce a biquadratic Equation by the Rules last delivered. *E.g.* Let there be proposed the Equation reduced above, $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$. Take away the second Term, by writing $v + \frac{1}{4}$ for x, and there will arise $v^4 - \frac{43}{8} vv + \frac{75}{8} v - \frac{851}{256} = 0$. To take away the Fractions, write $\frac{1}{4} z$ for v, and there will arise $z^4 - 86zz + 600z - 851 = 0$. Here is $-86 = q$, $600 = r$, and $-851 = s$, and consequently $y^3 + 2qyy + \frac{qq}{-4s} y - rr = 0$, substituting what is equivalent, will become $y^3 - 172yy + 10800y - 360000 = 0$. Where trying all the Divisors of the last Term 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, and so onwards to 100, you will find at length $y = 100$. Which yet may be

---

CLVI. (*r*). If the Roots of the Biquadratic are all possible, or all impossible, the three Roots of the Cubic will be possible; and will be therefore more conveniently extracted by any other Method than the preceding Rule: But if the Biquadratic has two of its Roots impossible, two Roots of the Cubic will also be impossible, and will therefore be found conveniently by the preceding Rule.

found

found far more expeditiously by our Method above delivered. Then having got y, its Root 10 will be e, and $\frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2}$, that is, $\frac{-86 + 100 - 60}{2}$ or -23 will be f, and $\frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2}$ or 37 will be g, and consequently the Equations $xx + ex + f = 0$, and $xx - ex + g = 0$, writing z for x, and substituting equivalent Quantities, will become $zz + 10z - 23 = 0$, and $zz - 10z + 37 = 0$. Restore v in the room of $\frac{1}{4}z$, and there will arise $vv + 2\frac{1}{2}v - \frac{23}{16} = 0$, and $vv - 2\frac{1}{2}v + \frac{37}{16} = 0$. Restore, moreover, $x - \frac{1}{4}$ for v, and there will come out $xx + 2x - 2 = 0$, and $xx - 3x + 3 = 0$, two Equations, the four Roots whereof $x = -1 \pm \sqrt{3}$, and $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$, are the same with the four Roots of the biquadratick Equation proposed at the Beginning, $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$. *But these might have been more easily found by the Method of finding Divisors, explained before.* (s)

CLVII. (s). In the above Method of Des Cartes, the Biquadratic is supposed to be the Product of two Quadratics: In the Method of our Author, Art. CLIV. the Biquadratic is conceived to be the Difference of two complete Squares. Now though our Author refers in this Place to the Method of Divisors, yet it is plain, that if the Method of N°. 298 were used, it has the Advantage of the Method of Des Cartes: Because in that Method there is not the Trouble of exterminating the second Term; also the Equation, whereby Q is found, is more simple than that whereby $e^2 = y$ is found, and lastly, which is the most considerable Advantage, Q is always commensurate and rational (and therefore the more easily to be found) not only when all the Roots of the Biquadratic are commensurate, but also when they are irrational and even impossible.

APPENDIX.

THE LINEAR CONSTRUCTION OF EQUATIONS.

HITHERTO I have ſhewn the Properties, Tranſmutations, Limits, and Reductions of all Sorts of Equations. I have not always joined the Demonſtrations, becauſe they ſeemed too eaſy to need it, and ſometimes cannot be laid down without too much Tediouſneſs. It remains now only to ſhew, how, after Equations are reduced to their moſt commodious Form, their Roots may be extracted in Numbers. And here the chief Difficulty lies in obtaining the two or three firſt Figures; which may be moſt commodiouſly done by either the geometrical or mechanical Conſtruction of an Equation. Wherefore I ſhall ſubjoin ſome of theſe Conſtructions.

The Antients, as we learn from *Pappus*, at firſt in vain endeavoured at the Triſection of an Angle, and the finding out of two mean Proportionals by a right Line and a Circle. Afterwards they began to conſider ſeveral other Lines, as the Conchoid, the Ciſſoid, and the Conick Sections, and by ſome of theſe to ſolve thoſe Problems. At length, having more throughly examined the Matter, and the Conick Sections being received into Geometry, they diſtinguiſhed Problems into three Kinds; viz. Into

Plane ones, which deriving their Original from Lines on a Plane, may be ſolved by a right Line and a Circle, into *Solid ones*, which were ſolved by Lines deriving their Original from the Conſideration of a Solid, that is, of a Cone: And *Linear ones*, to the Solution of which were required Lines more compounded. And according to this Diſtinction, we are not to ſolve ſolid Problems by other Lines than the Conick Sections; eſpecially if no other Lines but right ones, a Circle, and the Conick Sections, muſt be received into Geometry. But the Moderns advancing yet much farther, have received into Geometry all Lines that can be expreſſed by Equations, and have diſtinguiſhed, according to the Dimenſions of the Equations, thoſe Lines into Kinds; and have made it a Law, that you are not to conſtruct a Problem by a Line of a ſuperior Kind, that may be conſtructed by one of an inferior one. In the Contemplation of Lines, and finding out their Properties, I approve of their Diſtinction of them into Kinds, according to the Dimenſions of the Equations by which they are defined. But it is not the Equation, but the Deſcription that makes the Curve to be a Geometrical one. The Circle is a Geometrical Line, not becauſe it may be expreſſed by an Equation, but becauſe its Deſcription is a Poſtulate. It is not the Simplicity of the Equation, but the Eaſineſs of the Deſcription, which is to determine the Choice of our Lines for the Conſtruction of Problems. For the Equation that expreſſes a Parabola, is more ſimple than that that expreſſes a Circle, and yet the Circle, by reaſon of its more ſimple Conſtruction, is admitted before it. The Circle and the Conick Sections, if you regard the Dimenſion of the Equations, are of the ſame Order, and yet the Circle is not numbered with them in the Conſtruction of Problems, but, by reaſon of its ſimple Deſcription, is depreſſed to a lower Order, viz. that of a right Line; ſo that it is not improper to conſtruct that by a Circle that may be conſtructed by a right Line. But it is a Fault to conſtruct that by the Conick Sections which may be conſtructed by a Circle. Either therefore you muſt fix the Law to be obſerved in a Circle from the Dimenſions of Equations, and ſo take away as vitious the Diſtinction between Plane and Solid Problems; or

elſe you muſt grant, that that Law is not ſo ſtrictly to be obſerved in Lines of ſuperior Kinds, but that ſome by reaſon of their more ſimple Deſcription, may be preferred to others of the ſame Order, and may be numbered with Lines of inferior Orders in the Conſtruction of Problems. In Conſtructions that are equally Geometrical, the moſt ſimple are always to be preferred. This Law is beyond all Exception. But Algebraick Expreſſions add nothing to the Simplicity of the Conſtruction. The bare Deſcriptions of the Lines only are here to be conſidered. Theſe alone were conſidered by thoſe Geometricians who joined a Circle with a right Line. And as theſe are eaſy or hard, the Conſtruction becomes eaſy or hard. And therefore it is foreign to the Nature of the Thing, from any thing elſe to eſtabliſh Laws about Conſtructions. Either therefore let us, with the Antients, exclude all Lines beſides a right Line, the Circle, and perhaps the Conick Sections, out of Geometry, or admit all, according to the Simplicity of the Deſcription. If the Trochoid were admitted into Geometry, we might, by its Means, divide an Angle in any given Ratio. Would you therefore blame thoſe who ſhould make uſe of this Line to divide an Angle in the Ratio of one Number to another, and contend that this Line was not defined by an Equation, but that you muſt make uſe of ſuch Lines as are defined by Equations? If therefore, when an Angle was to be divided, for Inſtance, into 10001 Parts, we ſhould be obliged to bring a Curve defined by an Equation of above an hundred Dimenſions to do the Buſineſs; which no Mortal could deſcribe, much leſs underſtand; and ſhould prefer this to the Trochoid, which is a Line well known, and deſcribed eaſily by the Motion of a Wheel or a Circle, who would not ſee the Abſurdity? Either therefore the Trochoid is not to be admitted at all into Geometry, or elſe, in the Conſtruction of Problems, it is to be preferred to all Lines of a more difficult Deſcription. And there is the ſame Reaſon for other Curves. For which Reaſon we approve of the Triſections of an Angle by a Conchoid, which *Archimedes* in his Lemma's, and *Pappus* in his Collections, have preferred to the Inventions of all others in this

Caſe; becauſe we ought either to exclude all Lines, beſides the Circle and right Line, out of Geometry, or admit them according to the Simplicity of their Deſcriptions, in which Caſe the Conchoid yields to none, except the Circle. Equations are Expreſſions of Arithmetical Computation, and properly have no place in Geometry, except as far as Quantities truly Geometrical (that is, Lines, Surfaces, Solids, and Proportions) may be ſaid to be ſome equal to others. Multiplications, Diviſions, and ſuch ſort of Computations, are newly received into Geometry, and that unwarily, and contrary to the firſt Deſign of this Science. For whoſoever conſiders the Conſtruction of Problems by a right Line and a Circle, found out by the firſt Geometricians, will eaſily perceive that Geometry was invented that we might expeditiouſly avoid, by drawing Lines, the Tediouſneſs of Computation. Therefore theſe two Sciences ought not to be confounded. The Antients did ſo induſtriouſly diſtinguiſh them from one another, that they never introduced Arithmetical Terms into Geometry. And the Moderns, by confounding both, have loſt the Simplicity in which all the Elegancy of Geometry conſiſts. Wherefore that is *Arithmetically* more ſimple which is determined by the more ſimple Equations, but that is *Geometrically* more ſimple which is determined by the more ſimple drawing of Lines; and in Geometry, that ought to be reckoned beſt which is Geometrically moſt ſimple. Wherefore, I ought not to be blamed, if, with that Prince of Mathematicians, *Archimedes*, and other Antients, I make uſe of the Conchoid for the Conſtruction of ſolid Problems. But if any one thinks otherwiſe, let him know, that I am here ſollicitous not for a Geometrical Conſtruction, but any one whatever, by which I may the neareſt Way find the Roots of the Equations in Numbers. For the ſake whereof I here premiſe this Lemmatical Problem.

To place the right Line B C *of a given Length, ſo between two other given Lines* A B, A C, *that being produced, it ſhall paſs through the given Point* P. [See Fig. 90.]

If the Line B C turn about the Pole P, and at the ſame time moves on its End C upon the right Line A C, its other End B ſhall deſcribe the Conchoid of the Antients. Let this cut the Line A B in the Point B. Join P B, and its Part B C will be the right Line which was to be drawn. And, by the ſame Law, the Line B C may be drawn, where, inſtead of A C, ſome Curve Line is made uſe of.

If any do not like this Conſtruction by a Conchoid, another, done by a Conick Section, may be ſubſtituted in its room. From the Point P to the right Lines A D, A E, draw P D, P E, making the Parallelogram E A D P, and from the Points C and D to the right Line A B let fall the Perpendiculars C F, D G, as alſo from the Point E to the right Line A C, produced towards A, let fall the Perpendicular E H, and making $AD = a$, $PD = b$, $BC = c$, $AG = d$, $AB = x$, and $AC = y$, you will have A D : A G : : A C : A F, and conſequently $AF = \frac{dy}{a}$. Moreover, you will have A B : A C : : P D : C D, or $x : y :: b : a - y$. Therefore $by = ax - yx$, which is an Equation expreſſive of an Hyperbola. And again, by the 13th of the 2d *Elem*, B C q will be $= AC q + AB q - 2FAB$, that is, $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$. Both Sides of the former Equation being multiplied by $\frac{2d}{a}$, take them from both Sides of this, and there will remain $cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx - 2dx$, an Equation expreſſing a Circle, where x and y are at right Angles. Wherefore, if you make theſe two Lines an Hyperbola and a Circle, by the Help of theſe Equations, by their Interſection you will have x and y, or A B and

A C, which determine the Poſition of the right Line B C. But thoſe right Lines will be compounded after this Way. [See Fig. 91.]

Draw any two right Lines, K L equal to A D, and K M equal to P D, containing the right Angle M K L. Compleat the Parallelogram K L M N, and with the Aſymptotes L N, M N, deſcribe through the Point K the Hyperbola I K X.

On K M produced towards K, take K P equal to A G, and K Q equal to B C. And on K L produced towards K, take K R equal to A H, and R S equal to R Q. Compleat the Parallelogram P K R T, and from the Center T, at the Interval T S, deſcribe a Circle. Let that cut the Hyperbola in the Point X. Let fall to K P the Perpendicular X Y, and X Y will be equal to A C, and K Y equal to A B. Which two Lines, A C and A B, or one of them, with the Point P, determine the Poſition ſought of the right Line B C. To demonſtrate which Conſtruction, and its Caſes, according to the different Caſes of the Problem, I ſhall not here inſiſt.

I ſay, by this Conſtruction, if you think fit, you may ſolve the Problem. But this Solution is too compounded to ſerve for any particular Uſes. It is a bare Speculation, and Geometrical Speculations have juſt as much Elegancy as Simplicity, and deſerve juſt ſo much Praiſe as they can promiſe Uſe. For which Reaſon, I prefer a Conſtruction by the Conchoid, as much the ſimpler, and not leſs Geometrical; and which is of eſpecial Uſe in the Reſolution of Equations as by us propoſed. Premiſing therefore the preceding Lemma, we Geometrically conſtruct Cubick and Biquadratick Problems [*as which may be reduced to Cubick ones*] as follows. [See Fig. 92 and 93.]

Let there be propoſed the Cubic Equation $x^3 * + qx + r = 0$, *whoſe ſecond Term is wanting*, but the third is *denoted under its Sign* $+ q$, *and the fourth by* $+ r$.

Draw

Draw any right Line, K A, which call n. On K A, produced on both Sides, take K B $= \frac{q}{n}$ to the ſame Side as K A, if it be $+ q$, otherwiſe to the contrary Part. Biſect B A in C, and on K, as a Center with the Radius K C, deſcribe the Circle C X, and in it accommodate the right Line C X equal to $\frac{r}{n\,n}$, producing it each Way. Join A X, which produce alſo both Ways. Laſtly, between theſe Lines C X and A X inſcribe E Y of the ſame Length as C A, and which being produced, may paſs through the Point K; then ſhall X Y be the Root of the Equation. [See Fig. 94.] And of theſe Roots, thoſe will be Affirmative which fall from X towards C, and thoſe Negative which fall on the contrary Side, if it be $+ r$, but contrarily if it be $- r$.

Demonſtration.

To demonſtrate which, I premiſe theſe Lemma's.

LEMMA I.

Y X *is to* A K *as* C X *to* K E. For draw K F parallel to C X; then becauſe of the ſimilar Triangles A C X, A K F, and E Y X, E K F, it will be A C to A K as C X to K F, and Y X to Y E or A C as K F to K E, and therefore by perturbated Equality Y X to A K as C X to K E. Q. E. D.

LEMMA II.

Y X *is to* A K *as* C Y *to* A K + K E. For by Compoſition of Proportion Y X is to A K as Y X + C X (*i. e.* C Y) to A K + K E. Q. E. D.

LEMMA III.

KE—BK *is to* YX *as* YX *to* AK.

For (by 12 *Elem.* 2.) $YK^q - CK^q$ is $= CY^q - CY \times CX = CY \times YX$. That is, if the Theorem be reſolved into Proportionals, CY to YK—CK as YK+CK to YX. But YK—CK is $=$ YK—YE+CA—CK $=$ KE—BK. And YK+CK $=$ YK—YE+CA+CK $=$ KE+AK. Wherefore CY is to KE—BK as KE+AK to YX. But by *Lemma* 2, it was CY to KE+AK as YX to AK. Wherefore by Equality it is YX to KE—BK as AK to YX. Or KE—BK to YX as YX to AK. Q. E. D.

Theſe things being premiſed, the Theorem will be thus demonſtrated.

In the *firſt Lemma* it was YX to AK as CX to KE, or $KE \times YX = AK \times CX$. In the *third Lemma* it was proved, that KE—BK was to YX as YX to AK. Wherefore, if the Terms of the firſt Ratio be multiplied by YX, it will be $KE \times YX - BK \times YX$ to XY^q as YX: AK that is, $AK \times CX - BK \times YX$ to YX^q as YX to AK, and by multiplying the Extremes and Means into themſelves, it will be $AK^q \times XC - AK \times BK \times YX = YX^{cube}$. Laſtly, for YX, AK, BK, and CX, re-ſubſtituting x, n, $\frac{q}{n}$, and $\frac{r}{n\,n}$, this Equation will ariſe, viz. $r - q\,x = x^3$. Q. E. D. I need not ſtay to ſhew you the Variations of the Signs, for they will be determined according to the different Caſes of the Problem.

Let now an Equation be propoſed wanting the third Term, as $x^3 + p\,x\,x + r = 0$; and in order to conſtruct it, n being aſſumed, take in any right Line two Lengths $KA = \frac{r}{n\,n}$, and $KB = p$, and let them be taken the ſame Way if r and p have like Signs; but otherwiſe, take them towards contrary Sides. Biſect BA in C, and on

K,

K, as a Center, with the Radius K C, deſcribe a Circle, into which accommodate C X = n, producing it both Ways. Join alſo A X, and produce it both Ways. Laſtly, between theſe Lines C X and A X inſcribe E Y = C A, ſo that if produced it may paſs through the Point K, and K E will be the Root of the Equation. And the Roots will be Affirmative, when the Point Y falls on that Side of X which lies towards C; and Negative, when it falls on the contrary Side of X, provided it be $+r$; but if it be $-r$, it will be the Reverſe of this.

To demonſtrate this Propoſition, look back to the Figures and Lemma's of the former; and then you will find it thus.

By *Lemma* 1. it was Y X to A K as C X to K E, or Y X × K E = A K × C X, and by *Lemma* 3, K E — K B to Y X as Y X to A K, or (taking K B towards contrary Parts) K E + K B to Y X as Y X to A K, and therefore K E + K B multiplied by K E will be to Y X × K E or (A K × C X) as Y X to A K, or as C X to K E. Wherefore multiplying the Extreams and Means into themſelves, K E *cube* + K B × K E q is = A K × C X q; and then for K E, K B, A K, and C K, reſtoring their Values aſſigned above, $x^3 + pxx = r$.

Let now an Equation having three Dimenſions, and wanting no Term, be propoſed in this Form, $x^3 + pxx + qx + r = 0$, *ſome of whoſe Roots ſhall be Affirmative, and ſome Negative.* [See Fig. 95.]

And firſt ſuppoſe q *Negative*, then in any right Line, as K B, let two Lengths be taken, as K A = $\frac{r}{q}$, and K B = p, and take them the ſame Way, if p and $\frac{r}{q}$ have contrary Signs; but if their Signs are alike, then take the Lengths contrary Ways from the Point K. Biſect A B in C, and there erect the Perpendicular C X equal to the Square Root of the Term q; then between

Draw the right Line KA at pleaſure, which call n. In KA produced both ways, take $KB = \frac{q}{n}$ on the ſame Side of the Point K as the Point A is if q be Negative, if not, on the contrary. Biſect BA in C, and from the Center A, with the Diſtance AC, deſcribe a circle CX. To this inſcribe the right Line $CX = \frac{r}{nn}$, and through the Points K, C, and X deſcribe the Circle KCXG. Join AX, and produce it till it again cuts the Circle KCXG laſt deſcribed in the Point G. Laſtly, between this Circle KCXG, and the right Line KC produced both ways, inſcribe the right Line $EY = AC$, ſo that EY produced paſs through the Point G. And EG will be one of the Roots of the Equation. But thoſe Roots are Affirmative which fall in the greater Segment of the Circle KGC, and Negative which fall in the leſſer KFC, if r is Negative, and the contrary will be when r is Affirmative.

In order to demonſtrate this Conſtruction, Let us premiſe the following *Lemmas*.

LEMMA I.

All things being ſuppoſed as in the Conſtruction, CE *is to* KA *as* CE + CX *is to* AY, *and as* CX *to* KA.

For the right Line KG being drawn, AC is to AK as CX is to KG, becauſe the Triangles ACX and AKG are ſimilar. The Triangles YEC, YKG are alſo ſimilar; for the Angle at Y is common to both Triangles, and the Angles G and C are in the ſame Segment EGCK of the Circle KGC, and therefore equal. Whence CE will be to EY as KG to KY, that is, CE to AC as KG to KY, becauſe EY and AC were ſuppoſed equal. And by comparing this with the Proportionality above, it will follow by perturbated Equality that CE is to KA as CX to KY, and alternately CE is to CX as KA to KY. Whence, by Compoſition, CE + CX will be to CX as KA + KY to KY, that is, AY to

KY, and alternately CE + CX is to AY as CX is to KY, that is, as CE to KA. Q. E. D.

LEMMA II.

Let fall the Perpendicular CH *upon the right Line* GY, *and the Rectangle* 2HEY *will be equal to the Rectangle* CE × CX.

For the Perpendicular GL being let fall upon the Line AY, the Triangles KGL, ECH have right Angles at L and H, and the Angles at K and E are in the same Segment CKEG of the Circle CGK, and are therefore equal; consequently the Triangles are similar. And therefore KG is to KL as EC to EH. Moreover, AM being let fall from the Point A perpendicular to the Line KG, because AK is equal to AG, KG will be bisected in M; and the Triangles KAM and KGL are Similar, because the Angle at K is common, and the Angles at M and L are right ones; and therefore AK is to KM as KG is to KL. But as AK is to KM so is 2AK to 2KM, or KG; (and because the Triangles AKG and ACX are similar) so is 2AC to CX; also (because AC = EY) so is 2EY to CX. Therefore 2EY is to CX as KG to KL. But KG was to KL as EC to EH, therefore 2EY is to CX as EC to EH, and so the Rectangle 2HEY (by multiplying the Extreams and Means by themselves) is equal to EC × CX. Q. E. D.

Here we took the Lines AK and AG to be equal. For the Rectangles CAK and XAG are equal (by *Cor.* to 36 *Prop.* of the 3d Book of Eucl.) and therefore as CA is to XA so is AG to AK. But XA and CA are equal by Hypothesis; therefore AG = AK.

LEMMA III.

All things being as above, the three Lines BY, CE, KA, *are continual Proportionals.*

For (by *Prop.* 12. *Book* 2. *Elem.*) CY q is = EY q + CE q + 2EY × EH. And by taking EY q from both Sides

Sides, $CY^q - EY^q$ is $= CE^q + 2EY \times EH$. But $2EY \times EH$ is $= CE \times CX$ (by *Lem.* 2.) and by adding GE^q to both Sides, $CE^q + 2EY \times EH$ becomes $= CE^q + CE \times CX$. Therefore $CY^q - EY^q$ is $= CE^q + CE \times CX$, that is, $\overline{CY + EY} \times \overline{CY - EY} = CE^q + CE \times CX$. And by resolving the equal Rectangles into proportional Sides, it will be as $CE + CX$ is to $CY + EY$, so is $CY - EY$ to CE. But the three Lines EY, CA, CB, are equal, and thence $CY + EY = CY + CA = AY$, and $CY - EY = CY - CB = BY$. Write AY for $CY + EY$, and BY for $CY - EY$, and it will be as $CE + CX$ is to YA so is BY to CE. But (*by Lem.* 1.) CE is to KA as $CE + CX$ is to AY, therefore CE is to KA as BY is to CE, that is, the three Lines BY, CE, and KA are continual Proportionals. Q. E. D.

Now, by the Help of these three Lemmas, we may *demonstrate* the Construction of the preceding Problem, thus:

By Lem. 1. CE is to KA as CX is to KY, so $KA \times CX$ is $= CE \times KY$, and by dividing both Sides by CE, $\frac{KA \times CX}{CE}$ becomes $= KY$. To these equal Sides add BK, and $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ will be $= BY$. Whence (by *Lem.* 3.) $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ is to CE as CE is to KA, and thence, by multiplying the Extreams and Means by themselves, CE^q is $= BK \times KA + \frac{KA^q \times CX}{CE}$, and both Sides being multiplied by CE, CE *cube* becomes $= KB \times KA \times CE + KA^q \times CX$. CE was called x, the Root of the Equation, KA was $= n$, $KB = \frac{q}{n}$, and $CX = \frac{r}{n^n}$. These being substituted instead of CE, KA, KB, and CX, there will arise $x^2 = qx + r$, or $x^2 - qx - r = 0$, the Equation to be constructed;

ſtructed; when q and r are Negative, KA and KB having been taken on the ſame Side of the Point K, and the affirmative Root being in the greater Segment CGK. This is *one Caſe* of the Conſtruction to be demonſtrated. Draw KB on the contrary Side, that is, let its Sign be changed, or the Sign of $\frac{q}{n}$, or, which is the ſame Thing, the Sign of the Term q, and there will be had the Conſtruction of the Equation $x^3 + qx - r = 0$. *Which is the other Caſe.* In theſe Caſes CX, and the affirmative Root CE, fall towards the ſame Parts of the Line AK. Let CX and the negative Root fall towards the ſame Parts when the Sign of CX, or of $\frac{r}{nn}$, or (which is the ſame Thing) the Sign of r is changed; and this will be the *third Caſe* $x^3 + qx + r = 0$, where all the Roots are Negative. And again, when the Sign of KB, or of $\frac{q}{n}$, or only of q, is changed, it will be the *fourth Caſe* $x^3 - qx + r = 0$. The Conſtructions of all theſe Caſes may be run through, and particularly demonſtrated after the ſame Manner as the firſt was. We having demonſtrated one Caſe, thought it ſufficient to touch ſlightly the reſt. Theſe are demonſtrated with the ſame Words, by changing only the Situation of the Lines.

Now Let the Cubic Equation $x^3 + pxx * + r = 0$, *whoſe third Term is wanting, be to be conſtructed.*

In the ſame Figure n being taken of any Length, take in any infinite right Line AY, $KA = \frac{r}{nn}$ and $KB = p$ and take them on the ſame Side of the Point K, if the Signs of the Terms p and r are the ſame, otherwiſe on contrary Sides. Biſect BA in C, and from the Center K with the Diſtance KC deſcribe the Circle CXG. And to it inſcribe the right Line CX equal to n the aſſumed Length. Join AX and produce it to G, ſo that AG may be equal to AK, and through the Points K, C, X, G, deſcribe a Circle. And, laſtly, between this Circle and the right Line KC, produced both Ways, inſcribe

ſcribe the right Line EY = AC, ſo that being produced it may paſs through the Point G; then the right Line KY being drawn, will be one of the Roots of the Equation. And thoſe Roots are Affirmative which fall on that Side of the Point K, on which the Point A is on, if r is Affirmative; but if r is Negative, then the affirmative Roots fall on the contrary Side. And if the affirmative Roots fall on one Side, the negative fall on the other.

This Conſtruction is demonſtrated by the Help of the three laſt *Lemmas* after this Manner.

By the third Lemma, BY, CE, KA are continual Proportionals; and by *Lemma* 1, as CE is to KA ſo is CX to KY. Therefore BY is to CE as CX to KY. BY is = KY — KB. Therefore KY — KB is to CE as CX is to KY. But as KY — KB is to CE ſo is $\overline{KY-KB} \times KY$ to CE × KY, by *Prop.* 1. *Book* 6. *Euc.* and becauſe of the Proportionals CE to KA as CX to KY it is CE × KY = KA × CX. Therefore $\overline{KY-KB} \times KY$ is to KA × CX (as KY — KB to CE, that is) as CX to KY. And by multiplying the Extreams and Means by themſelves $\overline{KY-KB} \times KY\ q$ becomes = KA × CX q; that is, KY *cube* — KB × KY q = KA × CX q. But in the Conſtruction KY was x the Root of the Equation, KB was put = p, KA = $\frac{r}{nn}$, and CX = n. Write therefore x, p, $\frac{r}{nn}$, and n for KY, KB, KA, and CX reſpectively, and $x^3 - p\,x\,x$ will become = r, or $x^3 - p\,x\,x - r = 0$.

This Conſtruction may be reſolved into theſe four Caſes of Equations, $x^3 - p\,x\,x - r = 0$, $x^3 - p\,x\,x + r = 0$, $x^3 + p\,x\,x - r = 0$, and $x^3 + p\,x\,x + r = 0$.

The firſt Caſe I have already demonſtrated; the reſt are demonſtrated with the ſame Words, only changing the Situation of the Lines. To wit, as in taking KA and KB on the ſame Side of the Point K, and the affirmative Root KY on the contrary Side, has already produced KY *cube* — KB × KY q = KA × CX q, and thence

thence $x^3 - px x - r = 0$; ſo by taking KB on the other Side the Point K there will be produced, by the like Reaſoning, KY *cube* $+ KB \times KY\, q = KA \times CX\, q$, and thence $x^3 + px x - r = 0$. And in theſe two Caſes, if the Situation of the affirmative Root KY be changed, by taking it on the other Side of the Point K, by a like Series of Argumentation you will fall upon the other two Caſes, KY *cube* $+ KB \times KY\, q = -KA \times CX\, q$, or $x^3 + px x + r = 0$, and KY *cube* $- KB \times KY\, q = -KA \times CX\, q$, or $x^3 - px x + r = 0$. Which were all the Caſes to be demonſtrated.

Now let this cubic Equation $x^3 + px x + qx + r = 0$ *be propoſed, wanting no Term (unleſs perhaps the third).* Which is conſtructed after this Manner: [See Fig. 97 and 98.]

Take the length n at Pleaſure. Draw any right Line $GC = \frac{n}{2}$, and at the Point G erect a Perpendicular GD $= \sqrt{\frac{r}{p}}$, and if the Terms p and r have contrary Signs, from the Center C, with the Interval CD deſcribe a Circle PBE. If they have the ſame Signs from the Center D, with the Space GC, deſcribe an occult Circle, cutting the right Line GA in H; then from the Center C, with the diſtance GH, deſcribe the Circle PBE. Then make $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{nn}$ on the ſame Side the Point G that C is on, provided the Quantity $-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$ (the Signs of the Terms p, q, r, in the Equation to be conſtructed being well obſerved) ſhould come out Affirmative; otherwiſe, draw GA on the other Side of the Point G, and at the Point A erect the Perpendicular AY, between which and the Circle PBE already deſcribed, inſcribe the right Line EY equal to the Term p, ſo that being produced, it may paſs through the Point G; which being done, the Line EG will be one of the Roots of the Equation to be conſtructed. Thoſe Roots are

Affirmative when the Point E falls between the Points G and Y, and Negative, when the Point E falls without, if p is Affirmative; and the contrary, if Negative.

In order to demonstrate this Construction, let us premise the following *Lemmas*.

LEMMA I.

Let EF *be let fall perpendicular to* AG, *and the right Line* EC *be drawn*; $EG^q + GC^q$ is $= EC^q + 2CGF$

For (by *Prop.* 12. *Book* 2. *Elem.*) EG^q is $= EC^q + GC^q + 2GCF$. Let GC^q be added on both Sides, and $EG^q + GC^q$ will become $= EC^q + 2GC^q + 2GCF$. But $2GC^q + 2GCF$ is $= 2GC \times \overline{GC + CF} = 2CGF$. Therefore $EG^q + GC^q = EC^q + 2CGF$. Q. E. D.

LEMMA II.

In the first Case of the Construction, where the Circle PBE *passes through the Point* D, $EG^q - GD^q$ *is* $= 2CGF$.

For by the *first Lemma* $EG^q + GC^q$ is $= EC^q + 2CGF$, and by taking CG^q from both Sides, EG^q is $= EC^q - GC^q + 2CGF$. But $EC^q - GC^q$ is $= CD^q - GC^q = GD^q$. Therefore $EG^q = GD^q + 2CGF$, and by taking GD^q from both Sides, $EG^q - GD^q$ is $= 2CGF$. Q. E. D.

LEMMA III.

In the second Case of the Construction, where the Circle PBE *does not pass through the Point* D, $EG^q + GD^q$ is $= 2CGF$.

For in the *first Lemma*, $EG^q + GC^q$ was $= EC^q + 2CGF$. Take EC^q from both Sides, and it becomes $EG^q + GC^q - EC^q = 2CGF$. But $GC = DH$, and $EC = CP = GH$. Therefore $GC^q - EC^q = DH^q - GH^q = GD^q$, and so $EG^q + GD^q = 2CGF$. Q. E. D.

LEMMA

Lemma IV.

GY × 2CGF *is* = 2CG × AGE.

For by reaſon of the ſimilar Triangles GEF and GYA, as GF is to GE ſo is AG to GY, that is, (by *Prop.* 1. *Book* 6. *Elem.*) as 2CG × AG is to 2CG × GY. Let the Extreams and Means be multiplied by themſelves, and 2CG × GY × GF becomes = 2CG × AG × GE. Q. E. D.

Now, by the Help of theſe Lemmas, the Conſtruction of the Problem may be thus demonſtrated.

In the *firſt* Caſe, EGq − GDq is = 2CGF (by Lemma 2.) and by multiplying all by GY, EGq × GY − GDq × GY becomes = 2CGF × GY = (by Lemma 4.) 2CG × AGE. Inſtead of GY write EG + EY, and EG *cub.* + EY × EGq − GDq × EG − GDq × EY becomes = 2CGA × EG, or EG *cub.* + EY × EGq − $\overline{\text{GD}q - 2\text{CGA}}$ × EG − GDq × GDq × EY = 0.

In the *ſecond* Caſe, EGq + GDq is = 2CGF (by Lemma 3.) and by multiplying all by GY, EGq × GY + GDq × GY becomes = 2CGF × GY = 2CG × AGE, by Lemma 4. Inſtead of GY write EG + EY, and EG *cub.* + EY × EGq + GDq × EG + GDq × EY will become = 2CGA × EG, or EG *cub.* + EY × EGq + $\overline{\text{GD}q - 2\text{CGA}}$ × EG + GDq × EY = 0.

But the Root of the Equation EG was called x, GD = $\sqrt{\frac{r}{p}}$, EY = p, 2CG = n, and GA = $-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, that is, in the firſt Caſe, where the Signs of the Terms p and r are different; but in the ſecond Caſe, where the Sign of one of the two, p or r, is changed, there is $-\frac{q}{n} + \frac{r}{np}$ = GA. Let therefore EG be put = x,

$GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$, and $GA = -\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$, and in the *firſt* Caſe it will be $x^3 + px^2 + \overline{q + \frac{r}{p} - \frac{r}{p}} \times x - r = 0$; that is, $x^3 + px^2 + qx - r = 0$; but in the *ſecond* Caſe, $x^3 + pxx + \overline{q + \frac{r}{p} - \frac{r}{p}} \times x + r = 0$, that is, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Therefore in both Caſes EG is the true Value of the Root x. Q. E. D.

But either Caſe may be diſtinguiſhed into its ſeveral Particulars; as the former into theſe, $x^3 + px^2 + qx - r = 0$, $x^3 + px^2 - qx - r = 0$, $x^3 - px^2 + qx + r = 0$, $x^3 - px^2 - qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - r = 0$, and $x^3 - px^2 + r = 0$; the latter into theſe, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - qx + r = 0$, $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, $x^3 - px^2 - qx - r = 0$, $x^3 + px^2 + r = 0$, and $x^3 - px^2 - r = 0$. The Demonſtration of all which Caſes may be carried on in the ſame Words with the two already demonſtrated, by only changing the Situation of the Lines.

Theſe are the chief Conſtructions of Problems, by inſcribing a right Line given in Length ſo between a Circle and a right Line given in Poſition, that the inſcribed right Line produced may paſs through a given Point. And ſuch a right Line may be inſcribed by deſcribing the *Conchoid* of the Antients, of which let that Point, through which the right Line given ought to paſs, be the Pole, the other right Line given in Poſition be the Ruler or Aſymptote, and the Interval be the Length of the inſcribed Line. For this Conchoid will cut the Circle in the Point E, through which the right Line to be inſcribed muſt be drawn. But it will be ſufficient in Practice to draw the right Line between a Circle and a right Line given in Poſition by any mechanic Method.

But in these Constructions observe, that the Quantity n is undetermined, and left to be taken at Pleasure, that the Construction may be more conveniently fitted to particular Problems. We shall give Examples of this in finding two mean Proportionals, and in trisecting an Angle.

Let x *and* y *be two mean Proportionals to be found between* a *and* b. Because a, x, y, b are continual Proportionals, a^2 will be to x^2 as x to b, therefore $x^3 = a\,a\,b$, or $x^3 - a\,a\,b = 0$. Here the Terms p and q of the Equation are wanting, and $-a\,a\,b$ is in the room of the Term r; therefore in the first Form of the Constructions, where the right Line E Y tending to the given Point K, is drawn between other two right Lines E X and Y C given in Position, and the right Line C X supposed $= \frac{r}{n\,n}$ that is $= \frac{-a\,a\,b}{n\,n}$, let n be taken equal to a, and then C X will become $= -b$. From whence the following Construction comes out. [See Fig. 99.]

I draw any Line, K A $= a$, and bisect it in C, and from the Center K, with the Distance K C, describe the Circle C X, to which I inscribe the right Line C X $= b$, and between A K and C X, infinitely produced, I so inscribe E Y $=$ C A, that E Y being produced, may pass through the Point K. So K A, X Y, K E, C X will be continual Proportionals, that is, X Y and K E two mean Proportionals between a and b. This Construction is known. [See Fig. 100.]

But in the other Form of the Constructions, where the right Line E Y converging to the given Point G is inscribed between the Circle G E C X and the right Line A K, and C X is $= \frac{r}{n\,n}$, that is, (in this Problem) $= \frac{-a\,a\,b}{n\,n}$, I put, as before, $n = a$, and then C X will be $= b$, and the rest are done as follows. [See Figure 101.]

I draw any right Line K A $= a$, and biſect it in C, and from the Center A, with the Diſtance A K, I deſcribe the Circle K G, to which I inſcribe the right Line K G $= 2b$, conſtituting the *Iſoſceles* Triangle A K G. Then, through the Points C, K, G, I deſcribe the Circle, between the Circumference of which and the right Line A K produced, I inſcribe the right Line E Y $=$ C K tending to the Point G. Which being done, A K, E C, K Y, $\frac{1}{2}$ K G are continual Proportionals, that is, E C and K Y are two mean Proportionals between the given Quantities a and b.

Let there be an Angle to be divided into three equal Parts; [See *Figure* 102.] *and let that Angle be* A C B, *and the Parts thereof to be found be* A C D, E C D, *and* E C B.

From the Center C, with the Diſtance C A, let the Circle A D E B be deſcribed, cutting the right Lines C A, C D, C E, C B in A, D, E, B. Let A D, D E, E B be joined, and A B cutting the right Lines C D, C E at F and H, and let D G, meeting A B in G, be drawn parrallel to C E. Becauſe the Triangles C A D, A D F, and D F G are ſimilar, C A, A D, D F, and F G are continual Proportionals. Therefore if A C be $= a$, and A D $= x$, D F will be equal to $\frac{xx}{a}$, and F G $= \frac{x^3}{aa}$. But A B is $=$ B H $+$ H G $+$ F A $-$ G F $= 3$ A D $-$ G F $= 3x - \frac{x^3}{aa}$. Let A B be $= b$, then b becomes $= 3x - \frac{x^3}{aa}$, or $x^3 - 3aax + aab = 0$. Here p, the ſecond Term of the Equation, is wanting, and inſtead of q and r we have $-3aa$ and aab. Therefore in the firſt Form of the Conſtructions, where p was $= 0$, K A $= n$, K B $= \frac{q}{n}$, and C X $= \frac{r}{nn}$, that is, in this Problem, K B $= -\frac{3aa}{n}$, and C X $= \frac{aab}{nn}$, that theſe Quantities

Quantities may come out as ſimple as poſſible, I put $n = a$, and ſo K B becomes $= -3a$, and C H $= b$. Whence this *Conſtruction* of the Problem comes out.

Draw any Line, K A $= a$, and on the contrary Side make K B $= 3a$. [*See* Figure 103.] Biſect B A in C, and from the Center K, with the Diſtance K C, deſcribe a Circle, to which inſcribe the right Line C X $= b$, and the Line A X being drawn, between that infinitely produced and the right Line C X, inſcribe the right Line E Y $=$ A C, and ſo that it being produced, will paſs through the Point K. So X Y will be $= x$. But (ſee the laſt Figure) becauſe the Circle A D E B $=$ C X A, and the Subtenſe A B $=$ Subtenſe C X, and the Parts of the Subtenſes B H and X Y are equal; the Angles A C B, and C K X will be equal, as alſo the Angles B C H, X K Y; and ſo the Angle X K Y will be one third Part of the Angle C K X. Therefore the third Part X K Y of any given Angle C K X is found by inſcribing the right Line E Y $=$ A C the Diameter of the Circle, between the Chords C X and A X infinitely produced, and converging towards K the Center of the Circle.

Hence, if from K, the Center of the Circle, you let fall the Perpendicular K H upon the Chord C X, the Angle H K Y will be one third Part of the Angle H K X; ſo that if any Angle H K X were given, the third Part thereof H K Y may be found by letting fall from any Point X of any Side K X, the Line H X perpendicular to the other Side H K, and by drawing X E parallel to H K, and by inſcribing the right Line Y E $=$ 2 X K between X H and X E, ſo that it being produced may paſs through the Point K. *Or thus.* [See *Figure* 104.]

Let any Angle A X K be given. To one of its Sides A X raiſe a Perpendicular X H, and from any Point K of the other Side X K let there be drawn the Line K E, the Part of which E Y (lying between the Side A X produced, and the Perpendicular X H) is double the Side

K K, and the Angle K E A will be one third of the given Angle A X K. Again, the Perpendicular E Z being raiſed, and K F being drawn, whoſe Part Z F, between E F and E Z, let be double to K E, and the Angle K F A will be one third of the Angle K E A; and ſo you may go on by a continual Triſection of an Angle *ad infinitum*. This Method is in the 32d *Prop.* of the 4th Book of *Pappus*.

But if you would triſect an Angle by the other Form of Conſtructions, where the right Line is to be inſcribed between another right Line and a Circle: Here alſo will K B be $= \frac{q}{n}$, and C X $= \frac{r}{nn}$, that is, in the Problem we are now about, K B $= \frac{-3aa}{n}$, and C X $= \frac{aab}{nn}$; and ſo by putting $n = a$, K B will be $= -3q$, and C X $= b$. Whence this *Conſtruction* comes out.

From any Point K let there be drawn two right Lines towards the ſame Way, K A $= a$, and K B $= 3a$. [*See* Figure 105.] Biſect A B in C, and from the Center A with the Diſtance A C deſcribe a Circle. To which inſcribe the right Line C X $= b$. Join A X, and produce it till it cuts the Circle again in G. Then between this Circle and the right Line K C, infinitely produced, inſcribe the Line E Y $=$ A C, and paſſing through the Point G; and the right Line E C being drawn, will be equal to x the Quantity ſought, by which the third Part of the given Angle will be ſubtended.

This Conſtruction ariſes from the Form above; which, however, comes out better thus: Becauſe the Circles A D E B and K X G are equal, and alſo the Subtenſes C X and A B, the Angles C A X, or K A G, and A C B are equal, therefore C E is the Subtenſe of one third Part of the Angle K A G. Whence in any given Angle K A G, that its third Part C A E may be found, inſcribe the right Line E Y equal to the Semi-Diameter A G of the Circle K C G, between the Circle and the Side K A,

of

of the Angle, infinitely produced, and tending to the Point G. Thus *Archimedes*, in *Lemma* 8, taught to triſect an Angle. The ſame Conſtructions may be more eaſily explained than I have done here; but in theſe I would ſhew how, from the general Conſtructions of Problems I have already explained, we may derive the moſt ſimple Conſtructions of particular Problems.

Beſides the Conſtructions here ſet down, we might add many more, [*See* Figure 106.] *As if there were two mean Proportionals to be found between* a *and* b. Draw any right Line A K = *b*, and perpendicular to it A B = *a*. Biſect A K in I, and in A K put A H equal to the Subtenſe B I; and alſo in the Line A B produced, A C = Subtenſe B H. Then in the Line A K on the other Side of the Point A, take A D of any Length and D E equal to it, and from the Centers D and E, with the Diſtances D B and E C, deſcribe two Circles, B F and C G, and between them draw the right Line F G equal to the right Line A I, and converging at the Point A, and A F will be the firſt of the two mean Proportionals that were to be found.

The Antients taught how to find two mean Proportionals by the *Ciſſoid*; but no Body that I know of hath given a good manual Deſcription of this Curve. [*See* Figure 107.] Let A G be the Diameter, and F the Center of a Circle to which the *Ciſſoid* belongs. At the Point F let the Perpendicular F D be erected, and produced *in infinitum*. And let F G be produced to P, that F P may be equal to the Diameter of the Circle. Let the rectangular Ruler P E D be moved, ſo that the Leg E P may always paſs through the Point P, and the other Leg E D muſt be equal to the Diameter A G, or F P, with its End D, always moving in the Line F D; and the middle Point C of this Leg will deſcribe the *Ciſſoid* G C K which was deſired, as has been already ſhewn. Wherefore, if between any two Quantities, *a* and *b*, there be two mean Proportionals to be found: Take A M = *a*, raiſe the Perpendicular M N = *b*. Join A N; and move the Rule P E D, as was juſt now ſhewn, until its Point

Point C fall upon the right Line A N. Then let fall C B perpendicular to A P, take t to B H, and v to B G, as M N is to B C, and becauſe A B, B H, B G, B C, are continual Proportionals, a, t, v, b will alſo be continual Proportionals.

By the Application of ſuch a Ruler other ſolid Problems may be conſtructed.

Let there be propoſed the cubick Equation $x^3 \pm px \pm qx - r = 0$; where let q be always Affirmative, r Negative, and p of any Sign. Make $AG = \frac{r}{q}$, and biſect it in F, and take F R and $GL = \frac{p}{2}$, and that towards A if it be $+p$, if not towards P. Moreover, erect the Perpendicular F D, and in it take $FQ = \sqrt{q}$; to this erect alſo the Perpendicular Q C. And in the Leg E D of the Ruler, take E D and E C reſpectively equal to A G and A R, and let the Leg of the Ruler be applied to the Scheme, ſo that the Point D may touch the right Line F D, and the Point C the right Line Q C, then if the Parallelogram B Q be compleated, L B will be the ſought Root x of the Equation.

Thus far, I think, I have expounded the Conſtruction of ſolid Problems by Operations whoſe manual Practice is moſt ſimple and expeditious. So the Antients, after they had obtained a Method of ſolving theſe Problems by a Compoſition of ſolid Places, thinking the Conſtructions by the conic Sections uſeleſs, by reaſon of the Difficulty of deſcribing them, ſought eaſier Conſtructions by the Conchoid, Ciſſoid, the Extenſion of Threads, and by any Mechanic Application of Figures, preferring uſeful Things, though mechanical, to uſeleſs Speculations in Geometry, as we learn from Pappus. So the great Archimedes himſelf neglected the Triſection of an Angle by the conic Sections, which had been handled by other Geometricians before him, and taught how to triſect an Angle in his Lemmas after the Me-

thod we have already explained. If the Antients had rather construct Problems by Figures not received in Geometry in that Time, how much more ought these Figures now to be preferred which are received by many into Geometry as well as the conic Sections?

However, I do not agree to this new sort of Geometricians, who receive all Figures into Geometry. Their Rule of admitting all Lines to the Construction of Problems in that Order in which the Equations, whereby the Lines are defined, ascend to the Number of Dimensions, is arbitrary, and has no Foundation in Geometry. Nay, it is false; for according to this Rule, the Circle should be joined with the conic Sections, but all Geometers join it with the right Line; and this being an inconstant Rule, takes away the Foundation of admitting into Geometry all analytic Lines in a certain Order. In my Judgment, no Lines ought to be admitted into plain Geometry besides the right Line and the Circle, unless some Distinction of Lines might be first invented, by which a circular Line might be joined with a right Line, and separated from all the rest. But truly plain Geometry is not then to be augmented by the Number of Lines: for all Figures are plain that are admitted into plain Geometry, that is, those which the Geometers postulate to be described *in plano*; and every plain Problem is that which may be constructed by plain Figures. So therefore admitting the conick Sections and other Figures more compounded into plain Geometry, all the solid and more than solid Problems that can be constructed by these Figures will become plane. But all plane Problems are of the same Order. A right Line is analytically more simple than a Circle; nevertheless, Problems which are constructed by right Lines alone, and those that are constructed by Circles, are of the same Order. These Things being postulated, a Circle is reduced to the same Order with a right Line. And much more the Ellipse, which differs much less from a Circle than a Circle from a right Line, by postulating in like manner the Description thereof *in plano*, will be reduced to the same Order with the Circle. If any, in consi-

sidering

dering the Ellipſe, ſhould fall upon ſome ſolid Problem, and ſhould conſtruct it by the Help of the ſame Ellipſe, and a Circle; this would be counted a plane Problem, becauſe the Ellipſe was ſuppoſed to be deſcribed *in plano*, and all the Conſtruction beſides will be ſolved by the Deſcription of the Circle only. Wherefore for the ſame Reaſon, every plane Problem whatever may be conſtructed by a given Ellipſe. For Example, [*See* Figure 108.] if the Center O of the given Ellipſe A D F G be required, I would draw the two Parallels A B, C D meeting the Ellipſe in A, B, C, D; and alſo two other Parallels E F, G H meeting the Ellipſe in E, F, G, H, and I would biſect them in I, K, L, M, and produce I K, L M, till they meet in O. This is a real Conſtruction of a plane Problem by an Ellipſe. It imports nothing that an Ellipſe is analytically defined by an Equation of two Dimenſions: nor that it be generated geometrically by the Section of a ſolid Figure. The Hypotheſis, only conſidering it as already deſcribed *in plano*, reduces all ſolid Problems conſtructed by it to the Order of plane ones, and concludes, that all plane ones may be rightly conſtructed by it: and this is the State of a *Poſtulate*. Whatever may be ſuppoſed done, it is permitted to aſſume it, as already done and given. Therefore let this be a Poſtulate to deſcribe an Ellipſe *in plano*, and then all thoſe Problems that can be conſtructed by an Ellipſe, may be reduced to the Order of plane ones, and all plane Problems may be conſtructed by the Ellipſe.

It is neceſſary therefore that either plane and ſolid Problems be confounded among one another, or that all Lines be flung out of plane Geometry, beſides the right Line and the Circle, unleſs it happens that ſometime ſome other is given in the State of conſtructing ſome Problem. But certainly none will permit the Orders of Problems to be confuſed. Therefore the conick Sections and all other Figures muſt be caſt out of plane Geometry, except the right Line and the Circle, and thoſe which happen to be given in the State of the Problems. Therefore all theſe Deſcriptions of the Conicks *in plano*, which

the

the Moderns are ſo fond of, are foreign to Geometry. Nevertheleſs, the conick Sections ought not to be flung out of Geometry. They indeed are not deſcribed geometrically *in plano*, but are generated in the plane Superficies of a geometrical Solid. A Cone is conſtituted geometrically, and cut by a geometrical Plane. Such a Segment of a Cone is a geometrical Figure, and has the ſame Place in ſolid Geometry, as the Segment of a Circle has in Plane, and for this Reaſon its Baſe, which they call a conick Section, is a geometrical Figure. Therefore a conick Section hath a Place in Geometry ſo far as it is the Superficies of a geometrical Solid; but is geometrical for no other Reaſon than that it is generated by the Section of a Solid, and therefore was not in former Times admitted but only into ſolid Geometry. But ſuch a Generation of the conick Sections is difficult, and generally uſeleſs in Practice, to which Geometry ought to be moſt ſerviceable: therefore the Antients betook themſelves to various mechanical Deſcriptions of Figures *in plano*; and we, after their Example, have framed the preceding Conſtructions. Let theſe Conſtructions be mechanical; and ſo the Conſtructions by conick Sections deſcribed *in plano* (as is wont now to be done) are mechanical. Let the Conſtructions by conick Sections given be geometrical; and ſo the Conſtructions by any other given Figures are geometrical, and of the ſame Order with the Conſtructions of plane Problems. There is no Reaſon that the conick Sections ſhould be preferred in Geometry before any other Figures, unleſs ſo far as they are derived from the Section of a Cone; they being altogether unſerviceable in Practice in the Solution of Problems. But leaſt I ſhould wholly neglect Conſtructions by the conick Sections, it will be proper to ſay ſomething concerning them, in which alſo we will conſider ſome commodious manual Deſcription.

The Ellipſe is the moſt ſimple of the conick Sections, moſt known, and neareſt of Kin to a Circle, and eaſieſt deſcribed by the Hand *in plano*. Many prefer the Parabola before it, for the Simplicity of the Equation by which it is expreſſed. But by this Reaſon the Parobola

ought

ought to be preferred before the Circle itſelf, which it never is: therefore the reaſoning from the Simplicity of the Equation will not hold. The modern Geometers are too fond of the Speculation of Equations. The Simplicity of theſe is of an analytic Conſideration. We treat of Compoſition, and Laws are not given to Compoſition from Analyſis. Analyſis does lead to Compoſition: But it is not true Compoſition before its freed from Analyſis. If there be never ſo little Analyſis in Compoſition, that Compoſition is not yet real. Compoſition in itſelf is perfect, and far from a Mixture of analytick Speculations. The Simplicity of Figures depend upon the Simplicity of their Geneſis and Ideas, and it is not an Equation but a Deſcription (either geometrical or mechanical) by which a Figure is generated and rendered more eaſy to the Conception. Therefore we give the Ellipſe the firſt Place, and ſhall now ſhew how to conſtruct Equations by it.

Let there be any cubick Equation propoſed, $x^3 = px^2 + qx + r$, *where* p, q, *and* r *ſignify given Co-efficients of the Terms of the Equation, with their Signs* + *and* —, *and either of the Terms* p *and* q, *or both of them, may be wanting.* For ſo we ſhall exhibit the Conſtructions of all cubick Equations in one Operation, which follows:

From the Point B in any given right Line, take any two right Lines, B C and B E, on the ſame Side the Point B, and alſo B D, ſo that it may be a mean Proportional between them. [*See* Figure 109.] And call B C, n, in the ſame right Line alſo take $BA = \frac{q}{n}$, and that towards the Point C, if $-q$, if not, the contrary Way. At the Point A erect a Perpendicular A I, and in it take $AF = p$, $FG = AF$, $FI = \frac{r}{nn}$, and F H to F I as B C is to B E. But F H and F I are to be taken on the ſame Side of the Point F towards G, if the Terms p and r have the ſame Signs; and if they have not the ſame Signs, towards the Point A. Let the Parallelograms I A C K and and H A E L be compleated, and from the Center K, with the Diſtance K G, let a Circle be deſcribed. Then in the

the Line HL let there be taken HR on either Side the Point H, which let be to HL as BD to BE; let GR be drawn, cutting EL in S, and let the Line GRS be moved with its Point R falling on the Line HL, and the Point S upon the Line EL, until its third Point G in describing the Ellipse, meet the Circle, as is to be seen in the Position of $\gamma\rho\sigma$. For half the Perpendicular γX let fall from γ the Point of meeting to AE will be the Root of the Equation. But G or γ the End of the Rule GRS, or $\gamma\rho\sigma$, can meet the Circle in as many Points as there are possible Roots. And those Roots are affirmative which fall towards the same Parts of the Line EA, as the Line FI drawn from the Point F does, and those are negative which fall towards the contrary Parts of the Line AE if r is affirmative; and contrarily if r is negative.

But this Construction is *demonstrated* by the Help of the following *Lemmas*.

Lemma I.

All being supposed as in the Construction, $2CAX - AXq$ is $= \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

For from the Nature of the Circle, $K\gamma q - CXq$ is $= \overline{\gamma X - AI}^2$. But $K\gamma q$ is $= GIq + ACq$, and $CXq = \overline{AX - AC}^2$. that is, $= AXq - 2CAX + ACq$, and so their Difference $GIq + 2CAX - AXq$ is $= \overline{\gamma X - AI}^2 = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq$. Subtract GIq from both, and there will remain $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq - GIq$. But (by *Prop.* 4. *Book* 2. *Elem.*) AIq is $= AGq + 2AGI + GIq$, and so $AIq - GIq$ is $= AGq + 2AGI$, that is, $= 2AG \times \overline{\frac{1}{4}AG + GI}$, or $= 2AG \times FI$, and thence $2CAX - AXq$ is $= \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$. Q.ED.

Lemma

LEMMA II.

All Things being conſtructed as above $2EAX - AXq$ *is* $= \frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI.$

For it is known, that the Point γ, by the Motion of the Ruler $\gamma\rho\sigma$ aſſigned above, deſcribes an Ellipſe, the Center whereof is L, and the two Axes coincide with the two right Lines LE and LH, of which that which is in LE is $= 2\gamma\rho$, or $= 2GR$, and the other which is in LH is $= 2\gamma\sigma$, or $= 2GS$. And the Ratio of theſe to one another is the ſame as that of the Line HR to the Line HL, or of the Line BD to the Line BE. Whence the *Latus Tranſverſum* is to the principal *Latus Rectum*, as BE is to BC, or as FI is to FH. Wherefore ſince γT is ordinately applied to HL, it will be from the Nature of the Ellipſe $GSq - LTq = \frac{FI}{FH} T\gamma$ ſquared. But LT is $= AE - AX$, and $T\gamma = X\gamma - AH$. Let the Squares of which be put inſtead of LTq and $T\gamma q$, and then $GSq - AEq + 2EAX - AXq$ will become $= \frac{FI}{FH} \times X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. But $GSq - AEq = \overline{GH + LS}|^2$, becauſe GS is the Hypothenuſe of a rectangled Triangle the Sides whereof are equal to AE and $GH + LS$. And (by reaſon of the ſimilar Triangles RGH and RSL) LS is to GH as LR is to HR, and by Compoſition $GH + LS$ is to GH as HL is to HR, and by ſquaring the Proportions $\overline{GH + LS}|^2$ is to GHq as HLq is to HRq, that is, (by Conſtruction) as BEq is to BDq, that is, as BE is to BC, or as FI is to FH, and ſo $\overline{GH + LS}|^2$ is $= \frac{FI}{FH} GHq$. Therefore $GSq - AEq$ is $= \frac{FI}{FH} GHq$, and ſo $\frac{FI}{FH} GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH} \times X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$.

Subtract

Subtract $\frac{FI}{FH}GHq$ from both Sides, and there will remain $2EAX-AXq=\frac{FI}{FH}\times X\gamma q-2AH\times X\gamma+AHq-GHq$. But AH is $=AG+GH$, and so $AHq=AGq+2AGH+GHq$, and by subtracting GHq from both, there will remain $AHq-GHq=AGq+2AGH$, that is, $=2AG\times\overline{\frac{1}{2}AG+GH}=2AG\times FH$, and therefore $2EAX-AXq$ is $=\frac{FI}{FH}\times X\gamma q-2AH\times X\gamma+2AG\times FH$, that is, $=\frac{FI}{FH}X\gamma q-\frac{2FI}{FH}AH\times X\gamma+2AG\times FI$. Q. E. D.

LEMMA III.

All Things ſtanding as before, AX will be to $X\gamma-AG$ as $X\gamma$ is to 2BC.

For if from the Equals in the *ſecond Lemma* there be ſubtracted the Equals in the *firſt Lemma*, there will remain $2CE\times AX=\frac{HI}{FH}X\gamma q-\frac{2FI}{FH}AH\times X\gamma+2AI\times X\gamma$. Let both Sides be multiplied by FH, and $2FH\times CE\times AX$ will become $=HI\times X\gamma q-2FI\times AH\times X\gamma+2AI\times FH\times X\gamma$. But AI is $=HI+AH$, and ſo $2FI\times AH-2FH\times AI=2FI\times AH-2FHA-2FHI$. But $2FI\times HA-2FHA=2AHI$, and $2AHI-2FHI=2HI\times AF$. Therefore $2FI\times AH-2FH\times AI=2HI\times AF$, and ſo $2FH\times CE\times AX=HI\times X\gamma q-2HI\times AF\times X\gamma$. And thence as HI is to FH, ſo is $2CE\times AX$ to $X\gamma q-2AF\times X\gamma$. But by Conſtruction HI is to FH as CE is to BC, and conſequently as $2CE\times AX$ is to $2BC\times AX$, and therefore $2BC\times AX$ will be $=X\gamma q-AF\times X\gamma$, (by *Prop.* 9, *Book* 5, *Elem.*) But becauſe the Rectangles are equal, the Sides are proportional, AX to $X\gamma-2AF$, (that is, $X\gamma-AG$) as $X\gamma$ is to 2BC. Q. E. D.

LEMMA IV.

The same Things being still supposed, 2FI *is to* AX—2AB *as* Xγ *is to* 2BC.

For if from the Equals in the *third Lemma*, to wit, $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, the Equals in the *first Lemma* be subtracted, there will remain $-2AB \times AX + AXq = 2FI \times X\gamma - 2AG \times FI$, that is, $AX \times \overline{AX - 2AB} = 2FI \times \overline{X\gamma - AG}$. But because the Rectangles are equal, the Sides are proportional, 2FI is to AX—2AB as AX is to Xγ — AG, that is, (by the *third Lemma*) as Xγ is to 2BC. Q. E. D.

At length, by the Help of these Lemmas, the Construction of the Problem is thus demonstrated.

By the *fourth Lemma*, Xγ is to 2BC as 2FI is to $\overline{AX - 2AB}$, that is, (by *Prop.* 1. *Book* 6. *Elem.*) as $2BC \times 2FI$ is to $2BC \times \overline{AX - 2AB}$, or to $2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. But by the *third Lemma*, AX is to Xγ — 2AF as Xγ is to 2BC, or $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, and consequently X$\gamma$ is to 2BC as $2BC \times 2FI$ is to $X\gamma q - 2AF \times X\gamma - 2BC \times 2AB$. And by multiplying the Means and Extreams into themselves, Xγ *cub.* $- 2AF \times X\gamma q - 4BC \times AB \times X\gamma = 8BCq \times FI$. And by adding $2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma$ to both Sides Xγ *cub.* is $= 2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X + 8BCq \times FI$. But $\frac{1}{2}$Xγ in the Construction to be demonstrated was equal to the Root of the Equation $= x$, and $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{q}{n}$, and $FI = \frac{r}{nn}$, and therefore $BC \times AB = q$. And $BCq \times FI = r$. Which being substituted, will make $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. D.

Corol. Hence if AF and AB be supposed equal to nothing, by the third and fourth *Lemma*, 2FI will be to AX as AX is to Xγ, and Xγ to 2BC. From whence arises the

the Invention of two mean Proportionals between any two given Quantities, F I and B C.

Scholium. Hitherto I have only expounded the Conſtruction of a cubick Equation by the Ellipſe; but the Rule is of a more univerſal Nature, extending itſelf indifferently to all the conick Sections. For, if inſtead of the Ellipſe you would uſe the Hyperbola, take the Lines B C and B E on the contrary Side of the Point B, then let the Points A, F, G, I, H, K, L, and R be determined as before, except only that F H ought to be taken on the Side of F not towards I, and that H R ought to be taken in the Line A I not in H L, on each Side the Point H, and inſtead of the right Line G R S, two other right Lines are to be drawn from the Point L to the two Points R and R for Aſymptotes to the Hyperbola. With theſe Aſymptotes L R, L R deſcribe an Hyperbola through the Point G, and a Circle from the Center K with the Diſtance G K: And the halves of the Perpendiculars let fall from their Interſections to the right Line A E will be the Roots of the Equation propoſed. All which, the Signs + and — being rightly changed, are demonſtrated as above.

But if you would uſe the Parabola, the Point E will be removed to an infinite Diſtance, and ſo not to be taken any where, and the Point H will coincide with the Point F, and the Parabola will be to be deſcribed about the Axis H L with the principal *Latus Rectum* B C through the Points G and A, the Vertex being placed on the ſame Side of the Point F, on which the Point B is in reſpect of the Point C.

Thus the Conſtructions by the Parabola, if you regard analytick Simplicity, are the moſt ſimple of all. Thoſe by the Hyperbola next, and thoſe which are ſolved by the Ellipſe, have the third Place. But if in deſcribing of Figures the Simplicity of the manual Operation be reſpected, the Order muſt be changed.

But it is to be obſerved in theſe Conſtructions, that by the Proportion of the principal *Latus Rectum* to the *Latus Tranſverſum*, the Species of the Ellipſe and Hyperbola

may be determined, and that Proportion is the ſame as that of the Lines B C and B E, and therefore may be aſſumed: But there is but one Species of the Parabola, which is obtained by putting B E infinitely long. So therefore we may conſtruct any cubick Equation by a conick Section of any given Species. To change Figures given in Specie into Figures given in Magnitude, is done by encreaſing or diminiſhing in a given Ratio, all the Lines by which the Figures were given in Specie, and ſo we may conſtruct all cubick Equations by any given conick Section whatever. Which is more fully explained thus.

Let there be propoſed any cubick Equation $x^3 = p \times x. q x. r$, *to conſtruct it by the Help of any given conick Section.* [See *Figures* 110 and 111.]

From any Point B in any infinite right Line B C E, take any two Lengths B C, and B E towards the ſame Way, if the conick Section is an Ellipſe, but towards contrary Ways if it be an Hyperbola. But let B C be to B E as the principal *Latus Rectum* of the given Section, is to the *Latus Tranſverſum*, and call B C, n, take $B A = \frac{q}{n}$, and that towards C, if q be negative, and contrarily if affirmative. At the Point A erect a Perpendicular A I, and in it take $A F = p$, and $F G = A F$; and $F I = \frac{r}{n n}$. But let F I be taken towards G if the Terms p and r have the ſame Signs, if not, towards A. Then make as F H is to F I ſo is B C to B E, and take this F H from the Point F towards I, if the Section is an Ellipſe, but towards the contrary Way if it is an Hyperbola. But let the Parallelograms I A C K and H A E L be compleated, and all theſe Lines already deſcribed transferred to the given conick Section; or, which is the ſame Thing, let the Curve be deſcribed about them, ſo that its Axis or principal tranſverſe Diameter might agree with the right Line L H, and the Center with the Point L. Theſe Things being done, let the Line K L be drawn as alſo G L cutting the conick Section in g. In L K take L k, which

which let be to L K as L *g* to L G, and from the Center *k*, with the Diſtance *kg*, deſcribe a Circle. From the Points where it cuts the given Curve, let fall Perpendiculars to the Line L H, whereof let T γ be one. Laſtly, towards γ take T Y, which let be to T γ as L G to L *g*, and this T Y produced will cut A B in X, and $\frac{1}{2}$ X Y will be one of the Roots of the Equation. But thoſe Roots are affirmative which lie towards ſuch Parts of A B as F I lies from F, and thoſe are negative which lie on the contrary Side, if *r* is +, and the contrary if *r* is —.

After this Manner are cubick Equations conſtructed by given Ellipſes and Hyperbolas: But if a Parabola ſhould be given, the Line B C is to be taken equal to the *Latus Rectum* itſelf. Then the Points A, F, G, I, and K, being found as above, a Circle muſt be deſcribed from the Center K with the Diſtance K G, and the Parabola muſt be ſo applied to the Scheme already deſcribed, (or the Scheme to the Parabola) that it may paſs through the Points A and G, and its Axis through the Point F parallel to A C, the Vertex falling on the ſame Side of the Point F as the Point B falls of the Point C; theſe being done, if Perpendiculars were let fall from the Points where the Parabola interſects the Circle to the Line B C, their Halves will be equal to the Roots of the Equation to be conſtructed.

And take Notice, that where the ſecond Term of the Equation is wanting, and ſo the *Latus Rectum* of the Parabola is the Number 2, the Conſtruction comes out the ſame as that which *Des Cartes* produced in his Geometry, with this Difference only, that theſe Lines are the double of them.

This is a general Rule of Conſtructions. But where particular Problems are propoſed, we ought to conſult the moſt ſimple Forms of Conſtructions. For the Quantity *p* remains free, by the taking of which the Equation may, for the moſt part, be rendered more ſimple. One Example of which I will give.

Let there be given an Ellipſe, and let there be two mean Proportionals to be found between the given Lines a and b. Let the firſt of them be x, and $a \cdot x \cdot \frac{xx}{a} \cdot b$ will be continual Proportionals, and ſo $ab = \frac{x^3}{a}$, or $x^3 = aab$, is the Equation which you muſt conſtruct. Here the Terms p and q are wanting, and the Term $r = aab$, and therefore B A and A F are $= o$, and F I is $= \frac{aab}{nn}$. That the laſt Term may be more ſimple, let n be aſſumed $= a$, and let F I be $= b$. And then the Conſtruction will be thus:

From any Point A in any infinite right Line A E [*See* Figure 112.] take A C $= a$, and on the ſame Side of the Point A take A C to A E as the principal *Latus Rectum* of the Ellipſe is to the *Latus Tranſverſum*. Then in the Perpendicular A I take A I $= b$, and A H to A I as A C to A E. Let the Parallelograms I A C K, H A E L be compleated. Join L A and L K. Upon this Scheme lay the given Ellipſe, and it will cut the right Line A L in the Point g. Make L k to L K as L g to L A. From the Center k, with the Diſtance kg, deſcribe a Circle cutting the Ellipſe in γ. Upon A E let fall the Perpendicular γ X, cutting H L in T, and let that be produced to Y, that T Y may be to T γ as L A to L g. And ſo $\frac{1}{2}$ X Y will be equal to x the firſt of the two mean Proportionals. Q. E. I.

Of

Of the Methods by which you may approximate to the Roots of numeral Equations by their Limits; and to the Roots of literal Equations by the Method of Series.

By COLIN MACLAURIN.

300. *WHEN any Equation is propoſed to be reſolved, firſt find the Limits of the Roots* (*by* N°. 264) as for Example, if the Roots of the Equation $x^2 - 16x + 55 = 0$ are required, you find the Limits are 0, 8, and 17, by N°. 267; that is, the leaſt Root is between 0 and 8, and the greateſt between 8 and 17.

In order to find the firſt of the Roots, I conſider that if I ſubſtitute 0 for x in $x^2 - 16x + 55$, the Reſult is poſitive, viz. $+55$, and conſequently any Number betwixt 0 and 8 that gives a poſitive Reſult, muſt be leſs than the leaſt Root, and any Number that gives a negative Reſult, muſt be greater. Since 0 and 8 are the Limits, I try 4, that is, the Mean betwixt them, and ſuppoſing $x = 4$, $x^2 - 16x + 55 = 16 - 64 + 55 = 7$, from which I conclude that the Root is greater than 4. So that now we have the Root limited between 4 and 8. Therefore I next try 6, and ſubſtituting it for x we find $x^2 - 16x + 55 = 36 - 96 + 55 = -5$; which Reſult being negative, I conclude that 6 is greater than the Root required, which therefore is limited now between 4 and 6. And ſubſtituting 5, the Mean between them in place of x, I find $x^2 - 16x + 55 = 25 - 80 + 55 = 0$; and conſequently 5 is the leaſt Root of the Equation. After the ſame Manner you will diſcover 11 to be the greateſt Root of that Equation.

Thus *by diminiſhing the greater, or increaſing the leſſer Limit, you may diſcover the true Root when it is a commenſurable Quantity. But by proceeding after this Manner, when you have two Limits, the one greater than the Root, the other*

leſſer, that differ from one another but by unit, then you may conclude the Root is incommenſurable.

We may however, by continuing the Operation in Fractions, approximate to it. As if the Equation propoſed is $x^2-6x+7=0$, if we ſuppoſe $x=2$, the Reſult is $4-12+7=-1$, which being negative, and the Suppoſition of $x=0$ giving a poſitive Reſult, it follows that the Root is betwixt 0 and 2. Next we ſuppoſe $x=1$; whence $x^2-6x+7=1-6+7=+2$, which being poſitive, we infer the Root is betwixt 1 and 2, and conſequently incommenſurable. In order to approximate to it, we ſuppoſe $x=1\frac{1}{2}$, and find $x^2\,6x+7=2\frac{1}{4}-9+7=\frac{1}{4}$; and this Reſult being poſitive, we infer the Root muſt be betwixt 2 and $1\frac{1}{2}$. And therefore we try $1\frac{3}{4}$, and find $x^2-6x+7=\frac{49}{16}-\frac{42}{4}+7=3\frac{1}{16}-10\frac{8}{16}+7=-\frac{7}{16}$, which is negative; ſo that we conclude the Root to be betwixt $1\frac{3}{4}$ and $1\frac{1}{2}$. And therefore we try next $1\frac{5}{8}$, which giving alſo a negative Reſult, we conclude the Root is betwixt $1\frac{1}{2}$ (or $1\frac{4}{8}$) and $1\frac{5}{8}$. We try therefore $1\frac{9}{16}$, and the Reſult being poſitive, we conclude that the Root muſt be betwixt $1\frac{9}{16}$ and $1\frac{10}{16}$, and therefore is nearly $1\frac{19}{32}$.

301. *Or you may approximate more eaſily by transforming the Equation propoſed into another whoſe Roots ſhall be equal to* 10, 100, *or* 1000 *Times the Roots of the former* (*by* 246) *and taking the Limits greater in the ſame Proportion. This Tranſformation is eaſy; for you are only to multiply the ſecond Term by* 10, 100, *or* 1000, *the third Term by their Squares, the fourth by their Cubes,* &c. The Equation of the laſt Example is thus transformed into $x^2-600x+70000=0$, whoſe Roots are 100 Times the Roots of the propoſed Equation, and whoſe Limits are 100 and 200. Proceeding as before, we try 150, and find $x^2\;600x+70000=22500-90000+70000=2500$, ſo that 150 is leſs than the Root. You next try 175, which giving a negative Reſult muſt be greater than the Root: and thus proceeding you find the Root to be betwixt 158 and 159: from which

you

you infer that the leaſt Root of the propoſed Equation $x^3 - 6x + 7 = 0$ is betwixt 1.58 and 1.59, being the hundredth Part of the Root of $x^3 - 600x + 70000 = 0$.

If the cubic Equation $x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0$ is propoſed to be reſolved, the Equation of the Limits will be (by 267) $3x^2 - 30x + 63 = 0$, or $x^2 - 10x + 21 = 0$, whoſe Roots are 3, 7; and by ſubſtituting 0 for x the Value of $x^3 - 15x^2 + 63x - 50$ is negative, and by ſubſtituting 3 for x, that Quantity becomes poſitive, $x = 1$ gives it negative, and $x = 2$ gives it poſitive, ſo that the Root is between 1 and 2, and therefore incommenſurable. You may proceed as in the foregoing Examples to approximate to the Root. But *there are other Methods by which you may do that more eaſily and readily*; which we proceed to explain.

302. *When you have diſcovered the Value of the Root to leſs than an Unit (as in this Example, you know it is a little above 1) ſuppoſe the Difference betwixt its real Value and the Number that you have found nearly equal to it, to be repreſented by f; as in this Example. Let* $x = 1 + f$. *Subſtitute this Value for* x *in this Equation, thus,*

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 1 + 3f + 3f^2 + f^3 \\ -15x^2 = & -15 - 30f - 15f^2 \\ +63x = & 63 + 63f \\ -53 = & -50 \\ \hline x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = & -1 + 36f - 12f^2 + f^3 = 0. \end{array}$$

Now becauſe f *is ſuppoſed leſs than Unit, its Powers* f^2, f^3, *may be neglected in this Approximation; ſo that aſſuming only the two firſt Terms, we have* $-1 + 36f = 0$, *or* $f = \frac{1}{36} = .027$; *ſo that* x *will be nearly* 1.027.

You may have a nearer Value of x *by conſidering, that ſeeing* $-1 + 36f - 12f^2 + f^3 = 0$, *it follows that*

$$f = \frac{1}{36 - 12f + f^2} \text{ (by ſubſtituting } \frac{1}{36} \text{ for f) nearly} = \frac{1}{36 - 12 \times \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{1}{36}} = \frac{1}{16} = \frac{1296}{46225} = .02803.$$

But

But the Value of f *may be corrected and determined more accurately by ſuppoſing* g *to be the Difference betwixt its real Value, and that which we laſt found nearly equal to it.* So that $f = .02803 + g$. Then by ſubſtituting this Value for f in the Equation $f^3 - 12f^2 + 36f - 1 = 0$, it will ſtand as follows,

$$\left.\begin{array}{rl} f^3 = & 0.000021\,0226 + 0.002357g + 0.084\,09g^2 + g^3 \\ -12f^2 = & -.009\,42816 - 0.672\,72g - 12g^2 \\ +36f = & 1.009\,08 + 36g \\ -1 = & -1. \end{array}\right\} = 0$$

$$= -0.000\,3261\,374 + 35.329\,637g - 11.919\,5g^2 + g^3 = 0.$$

Of which the firſt two Terms, neglecting the reſt, give $35.329637 \times g = 0.0003261374$, and $g = \frac{.0003261374}{35.329637} = 0.00000923127$. So that $f = 0.02803923127$; and $x = 1 + f = 1.02803923127$; which is very near the true Root of Equation that was propoſed.

If ſtill a greater Degree of Exactneſs is required, ſuppoſe h *equal to the Difference betwixt the true Value of* g, *and that we have already found, and proceeding as above you may correct the Value of* g.

For another Example; let the Equation to be reſolved be $x^3 - 2x - 5 = 0$, and by ſome of the preceding Methods you diſcover one of the Roots to be between 2 and 3. Therefore you ſuppoſe $x = 2 + f$, and ſubſtituting this Value for it, you find

$$\left.\begin{array}{rl} x^3 = & 8 + 12f + 6f^2 + f^3 \\ -2x = & -4 - 2f \\ -5 = & -5 \end{array}\right\} = 0$$

$$= -1 + 10f + 6f^2 + f^3;$$

from which we find that $10f = 1$ nearly, or $f = 0.1$. Then to correct this Value, we ſuppoſe $f = 0.1 + g$, and find

$f^3 =$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} f^3 = & 0.001 & + 0.03g & + 0.3g^2 & + g^3 \\ 6f^2 = & 0.06 & + 1.2g & + 6.g^2 & \\ 10f = & 1. & + 10.g & & \\ -1 = & -1. & & & \end{array}\right\} = 0$$

$$= 0.061 + 11.23g + 6.3g^2 + g^3,$$

so that $g = \frac{-0.061}{11.23} = -0.0054$.

Then by supposing $g = -.0054 + b$, you may correct its Value, and you will find that the Root required is nearly 2.09455147.

It is not only one Root of an Equation that can be obtained by this Method, but, by making use of the other Limits, you may discover the other Roots in the same Manner. The Equation of 301, $x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0$, has for its Limits 0, 3, 7, 50. We have already found the least Root to be nearly 1,028039. If it is required to find the middle Root, you proceed in the same Manner to determine its nearest Limits to be 6 and 7; for 6 substituted for x gives a positive, and 7 a negative Result. Therefore you may suppose $x = 6 + f$, and by substituting this Value for x in that Equation, you find $f^3 + 3f^2 - 9f + 4 = 0$, so that $f = \frac{4}{9}$ nearly. Or since $f = \frac{4}{9 - 3f - f^2}$, it is (by substituting $\frac{4}{9}$ for f) $f = \frac{4}{9 - \frac{4}{3} - \frac{16}{81}} = \frac{324}{605}$, whence $x = 6 + \frac{324}{605}$ nearly. Which Value may still be corrected as in the preceding Articles. After the same Manner you may approximate to the Value of the highest Root of the Equation.

303. *In all these Operations, you will approximate sooner to the Value of the Root, if you take the three last Terms of the Equation, and extract the Root of the quadratic Equation consisting of these three Terms.*

Thus, in N°. 302, instead of the two last Terms of the Equation $f^3 - 12f^2 + 36f^2 - 1 = 0$, if you take the

three laſt and extract the Root of the quadratic $12f^2 - 36f + 1 = 0$, you will find $f = .028031$, which is much nearer the true Value than what you diſcover by ſuppoſing $36f - 1 = 0$.

It is obvious that this Method extends to all Equations.

304. *By aſſuming Equations affected with general Coefficients, you may, by this Method, deduce general Rules or Theorems for approximating to the Roots of propoſed Equations of whatever Degree.*

Let $f^3 - pf^2 + qf - r = 0$ repreſent the Equation by which the Fraction f is to be determined, which is to be added to the Limit, or ſubtracted from it, in order to have the near Value of x. Then $qf - r = 0$ will give $f = \frac{r}{q}$. But ſince $f = \frac{r}{f^2 - pf + q}$, by ſubſtituting $\frac{r}{q}$ for f, we have this Theorem for finding f nearly, viz.

$$f = \frac{r}{\frac{q^2}{q^2} - \frac{pr}{q} + q} = \frac{q^2 \times r}{q^3 - pqr + r^2}.$$

After the ſame Manner, if it is a biquadratic, by which f is to be determined, as $f^4 - pf^3 + qf^2 - rf + s = 0$, then f being very little, we ſhall have $f = \frac{s}{r}$; which Value is corrected by conſidering that $f = \frac{s}{r - qf + pf^2 - f^3}$ (by ſubſtituting $\frac{s}{r}$ for f) $= \frac{s}{r - \frac{qs}{r} + \frac{ps^2}{r^2} - \frac{s^3}{r^3}}$, whence we have this Theorem for all biquadratic Equations,

$$f = \frac{r^3 \times s}{-s^3 + ps^2 r - qsr^2 + r^4}.$$

Other

Other Theorems may be deduced by aſſuming the three Terms of the Equation, and extracting the Root of the Quadratic which they form.

Thus, to find the Value of f in the Equation $f^3 - pf^2 + qf - r = 0$ where f is ſuppoſed to be very little, we neglect the firſt Term f^3, and extract the Root of the quadratic $pf^2 - qf + r = 0$, or of $f^2 - \frac{q}{p}f + \frac{r}{p} = 0$; and we find $f = \frac{q}{2p} \sqrt{-\frac{r}{p} + \frac{q^2}{4p^2}} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}$ nearly.

But this Value of f may be corrected by ſuppoſing it equal to m, and ſubſtituting m^3 for f^3 in the Equation $f^3 - pf^2 + qf - r = 0$, which will give $m^3 - pf^2 + qf - r = 0$, and $pf^2 - qf + r - m^3 = 0$; the Reſolution of which quadratic Equation gives $f = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4pr + 4pm^3}}{2p}$, very near the true Value of f.

After the ſame Manner you may find like Theorems for the Roots of biquadratic Equations, or of Equations of any Dimenſion whatever.

305. *In general, let* $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} +$, &c. $+ A = 0$ *repreſent an Equation of any Dimenſions* n, *where* A *is ſuppoſed to repreſent the abſolute known Term of the Equation. Let* k *repreſent the Limit next leſs than any of the Roots, and ſuppoſing* $x = k + f$, *ſubſtitute the Powers of* $k + f$ *inſtead of the Powers of* x, *and there will ariſe* $\overline{k+f}^n + p \times \overline{k+f}^{n-1} + q \times \overline{k+f}^{n-2} + r \times \overline{k+f}^{n-3}$, &c. $+ A = 0$, *or by Involution, diſpoſing the Terms according to the Dimenſions of* f . . . . . .

$$\left.\begin{array}{l} k^n + nk^{n-1}\times f + n\times\frac{n-1}{2}k^{n-2}f^2 +, \&c. \\ pk^{n-1}+p\times n-1k^{n-2}\times f + p\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{2}k^{n-3}f^2 +, \&c. \\ qk^{n-2}+q\times n-2k^{n-3}\times f+q\times\frac{n-3}{2}k^{n-4}f^2 +, \&c. \\ rk^{n-3}+r\times n-3k^{n-4}\times f + r\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-4}{2}k^{n-5}f^3 +, \&c. \\ \&c. \end{array}\right\} +A=0,$$

where neglecting all the Powers of f *after the first two Terms, you find*

$$f=$$

$$f = \frac{-A k^n - p k^{n-1} - q k^{n-2} - r k^{n-3}, \&c.}{nk^{n-1} + p \times n-1 k^{n-2} + q \times n-2 k^{n-3} + r \times n-3 k^{n-4}, \&c.}$$ and

$$* (= k+f) = \frac{-A + n-1 k^n + p \times n-2 k^{n-1} + q \times n-3 k^{n-2} + r \times n-4 k^{n-3}, \&c.}{nk^{n-1} + p \times n-1 k^{n-2} + q \times n-2 k^{n-3} + r \times n-3 k^{n-4}, \&c.}$$

whence particular Theorems for extracting the Roots of Equations may be deduced.

306. "*By this Method you may discover Theorems for approximating to the Roots of pure Powers*;" as to find the n Root of any Number A; ſuppoſe k to be the neareſt leſs Root

Root in Integers, and that $k+f$ is the true Root, then ſhall $k^n + n\,k^{n-1}f + n\times\frac{n-1}{2}k^{n-2}f^2$, &c. $= A$; and, aſſuming only the two firſt Terms, $f = \frac{A-k^n}{nk^{n-1}}$: or, more nearly, taking the three firſt Terms,

$f = \frac{A-k^n}{nk^{n-1}+n\times\frac{n-1}{2}k^{n-2}f}$, and (taking $\frac{A-k^n}{nk^{n-1}}=f$)

$$f = \frac{A-k^n}{nk^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}k^{n-2}\times\frac{A-k^n}{nk^{n-1}}} = \frac{A-k^n}{nk^{n-1}+\frac{n-n}{2k}\times\overline{A-k^n}}$$

(putting $m = A-k^n$) $= \frac{km}{nk^n+\frac{n-1}{2}\times m}$; *which is a rational Theorem for approximating to* f.

You may find an irrational Theorem for it, by aſſuming the three firſt Terms of the Power of $k+f$, viz. $k^n + nk^{n-1}f + n\times\frac{n-1}{2}k^{n-2}f^2 = A$. For $nk^{n-1}f + n\times\frac{n-1}{2}k^{n-2}f^2 = A-k^n = m$; and reſolving this quadratic Equation, you find

$$f = -\frac{k}{n-1} \pm \sqrt{\frac{2m}{n\times\overline{n-1}\times k^{n-2}+\frac{k^2}{\overline{n-1}^2}}} = -\frac{k}{n-1}\pm\sqrt{\frac{2mn-2m+nk^n}{n\times\overline{n-1}^2k^{n-2}}}.$$

In the Application of theſe Theorems, when a near Value of f *is obtained, then adding it to* k, *ſubſtitute the Aggregate in Place of* k *in the Formula, and you will, by a new Operation, obtain a more correct Value of the Root required; and, by thus proceeding, you may arrive at any Degree of Exactneſs.*

Thus

Thus, to obtain the cube Root of 2, ſuppoſe $k = 1$, and $f\left(= \frac{km}{nk^n + \frac{n-1}{2}m}\right) = \frac{1}{4} = 0.25$. In the ſecond Place, ſuppoſe $k = 1.25$, and f will be found by a new Operation, equal to 0.009921, and conſequently, $\sqrt[3]{2} = 1.259921$ nearly. By the irrational Theorem, the ſame Value is diſcovered for $\sqrt[3]{2}$.

Of the Method of *Series* by which you may approximate to the Roots of literal Equations.

307. *If there be only two Letters,* x *and* a, *in the propoſed Equation, ſuppoſe* a *equal to Unit, and find the Root of the numeral Equation that ariſes from the Subſtitution, by the Rules already given. Multiply theſe Roots by* a, *and the Products will give the Roots of the propoſed Equation.*

Thus the Roots of the Equation $x^2 - 16x + 55 = 0$ are found, in N°. 300, to be 5 and 11. And therefore the Roots of the Equation $x^2 - 16ax + 55a^2 = 0$, will be $5a$ and $11a$. The Roots of the Equation $x^3 + a^2x - 2a^3 = 0$ are found by enquiring what are the Roots of the numeral Equation $x^3 + x - 2 = 0$, and ſince one of theſe is 1, it follows that one of the Roots of the propoſed Equation is a; the other two are *imaginary*.

308. *If the Equation to be reſolved involves more than two Letters, as* $x^3 + a^2x - 2a^3 + ayx - y^3 = 0$, *then the Value of* x *may be exhibited in a Series having its Terms compoſed of the Powers of* a *and* y *with their reſpective Coefficients; which will* "*converge the ſooner the leſs* y *is in reſpect of* a, *if the Terms are continually multiplied by the Powers of* y, *and divided by thoſe of* a." *Or,* "*will converge the ſooner the greater* y *is in reſpect of* a, *if the Terms be continually multiplied by the Powers of* a, *and divided by thoſe of* y." Since when y is very little in reſpect of a, the Terms y, $\frac{y^2}{a}$, $\frac{y^3}{a^2}$, $\frac{y^4}{a^3}$, $\frac{y^5}{a^4}$, &c. decreaſe very quickly. If y vaniſh in reſpect of a, the ſecond Term will vaniſh in reſpect of the firſt, ſince $\frac{y^2}{a} : y :: y : a$. And after the ſame Manner $\frac{y^3}{a^2}$ vaniſhes in reſpect of the Term immmediately preceding it

But

But when y is vaſtly great in reſpect of a, then a is vaſtly great in reſpect $\frac{a^2}{y}$, and $\frac{a^2}{y}$ in reſpect of $\frac{a^3}{y^2}$; ſo that the Terms a, $\frac{a^2}{y}$, $\frac{a^3}{y^2}$, $\frac{a^4}{y^3}$, $\frac{a^5}{y^4}$, &c. in this Caſe *decreaſe* very ſwiftly. In either Caſe, the Series converge ſwiftly that conſiſt of ſuch Terms; and a few of the firſt Terms will give a near Value of the Root required.

309. *If a Series for* x *is required from the propoſed Equation that ſhall converge the ſooner, the leſs* y *is in reſpect of* a; *to find the firſt Term of this Series, we ſhall ſuppoſe* y *to vaniſh; and extracting the Root of the Equation* $x^3 + a^2x - 2a^3 = 0$, *conſiſting of the remaining Parts of the Equation that do not vaniſh with* y, *we find, by* 307, *that* $x = a$; *which is the true Value of* x *when* y *vaniſhes, but is only near its Value when* y *does not vaniſh, but only is very little. To get a Value ſtill nearer the true Value of* x, *ſuppoſe the Difference of* a *from the true Value to be* p, *or that* $x = a + p$. *And ſubſtituting* $a + p$ *in the given Equation for* x, *you will find,*

$$\left.\begin{array}{rl} x^3 = & a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3 \\ + a^2x = & a^3 + a^2p \\ - 2a^3 = & -2a^3 \\ + ayx = & a^2y + apy \\ - y^3 = & -y^3 \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{rl} = & 4a^2p + 3ap^2 + p^3 \\ & a^2y + apy - y^3 \end{array}\right\} = 0.$$

But ſince, by Suppoſition, y and p are very little in reſpect of a, it follows that the Terms $4a^2p$, a^2y, where y and p are ſeparately of the *leaſt* Dimenſions, are vaſtly great in reſpect of the reſt; ſo that, in determining a near Value of p, the reſt may be neglected: and from $4a^2p + a^2y = 0$, we find $p = -\frac{1}{4}y$. So that $x = a + p = a - \frac{1}{4}y$, nearly.

Then to find a nearer Value of p, *and conſequently of* x, *ſuppoſe* $p = -\frac{1}{4}y + q$, *and ſubſtituting this Value for it in the laſt Equation, you will find,*

$$\left.\begin{array}{rl} p^3 = & -\frac{1}{64}y^3 + \frac{3}{160}y^2q - \frac{3}{4}yq^2 + q^3 \\ 3ap^2 = & \frac{3}{160}ay^2 - \frac{3}{4}ayq + 3aq^2 \\ 4a^2p = & -a^2y + 4a^2q \\ ayp = & -\frac{1}{4}ay^2 + ayq \\ a^2y = & a^2y \\ -y^3 = & -y^3 \end{array}\right\} =$$

$$\left.\begin{array}{rl} = & -\frac{65}{64}y^3 + \frac{3}{160}y^2q - \frac{3}{4}yq^2 + q^3 \\ & -\frac{1}{160}ay^2 - \frac{1}{4}ayq + 3aq^2 \\ & +4a^2q \end{array}\right\} = 0.$$

And since, by the Supposition, q is very little in respect of p, which is nearly $= -\frac{1}{4}y$, therefore q will be very little in respect of y; and consequently all the Terms of the last Equation will be very little in respect of these two *viz.* $-\frac{1}{160}ay^2$, $+4a^2q$, where y and q are of least Dimensions separately: particularly the Term $-\frac{1}{4}ayq$ is little in respect of $4a^2q$, because y is very little in respect of a; and it is little in respect of $-\frac{1}{160}ay^2$, because q is little in respect of y.

Neglect therefore the other Terms, and supposing $-\frac{1}{160}ay^2 + 4a^2q = 0$, you will have $q = \frac{1}{64} \times \frac{y^2}{a}$; so that $x = a - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64} \times \frac{y^2}{a}$. *And by proceeding in the same Manner you will find* $x = a - \frac{y}{4} + \frac{y^2}{64a} - \frac{131y^3}{512a^2} + \frac{5095y^4}{16384a^3}$ —, &c.

310. *When it is required to find a Series for* x *that shall converge sooner, the greater* y *is in respect of any Quantity* a, *you need only suppose* a *to be very little in respect of* y, *and proceed by the same Reasoning as in the last Example on the Supposition of* y *being very little.*

Thus, to find a Value for x in the Equation $x^3 - a^2x + ayx - y^3 = 0$ that shall converge the sooner the greater y is in respect of a, suppose a to vanish, and the remaining Terms will give $x^3 - y^3 = 0$, or $x = y$. So that when y is vastly great, it appears that $x = y$ nearly.

But

But to have the Value of x more accurately, put $x = y + p$, then

$$\left.\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 3y^2p + 3yp^2 + p^3 \\ -a^2x = & -a^2y - a^2p \\ +ayx = & ay^2 + ayp \\ -y^3 = & -y^3 \end{array}\right\} = 0$$

$$= +3y^2p + 3yp^2 + p^3 - a^2y - a^2p + ay^2 + ayp :$$

where the Terms $3y^2p + ay^2$ become vaſtly greater than the reſt, y being vaſtly greater than a or p; and conſequently $p = -\frac{1}{3}a$ nearly.

Again, by ſuppoſing $p = -\frac{1}{3}a + q$, you will tranſform the laſt Equation into

$$\left.\begin{array}{rl} & -\frac{2}{27}a^3 + 3y^2q + 3yq^2 + q^3 \\ - & a^2y - ayq - aq^2 \\ & -\frac{2}{3}a^2q \end{array}\right\} = 0;$$

where the two Terms $3qy^2 - a^2y$ muſt be vaſtly greater than any of the reſt, a being vaſtly leſs than y, and q vaſtly leſs than a by the Suppoſition; ſo that $3qy^2 - a^2y = 0$, and $q = \frac{a^2}{3y}$ nearly. By proceeding in this Manner, you may correct the Value of y, and find that

$$x = y - \tfrac{1}{3}a + \frac{a^2}{3y} + \frac{a^3}{81y^2} - \frac{8a^4}{243y^3}, \text{ &c.}$$

which Series converges the ſooner the greater y is ſuppoſed to be taken in reſpect of a.

311. In the Solution of the firſt *Example* thoſe Terms were always compared in order to determine p, q, r, &c. in which y and thoſe Quantities p, q, r, &c. were *ſeparately* of feweſt Dimenſions. But in the ſecond *Example*, thoſe Terms were compared in which a and the Quantities p, q, r, &c. were of leaſt Dimenſions ſeparately. And theſe always are the proper Terms to be compared together, becauſe they become vaſtly greater than the reſt, in the reſpective Hypotheſes.

In general; to determine the first, or any Term in the Series, such Terms of the Equation are to be assumed together only, as will be found to become vastly greater than the other Terms; that is, which give a Value of x, *which substituted for it in all the Terms of Equation shall raise the Dimensions of the other Terms all above, or all below, the Dimensions of the assumed Terms, according as* y *is supposed to be vastly little, or vastly great in respect of* a.

Thus to determine the first Term of a converging Series expressing the Value of x in the last Equation $x^3 - a^2x + ayx - y^3 = 0$, the Terms ayx and $-y^3$ are not to be compared together, for they would give $x = \frac{y^2}{a}$, which substituted for x, the Equation becomes

$$\frac{y^6}{a^3} - ay^2 + y^3 - y^3 = 0,$$

where the first Term is more Dimensions than the assumed Terms ayx, $-y^3$; and the second of fewer: so that the two first Terms cannot be neglected in respect of the two last, neither when y is very great nor very little, compared with a. Nor are the Terms x^3, ayx, fit to be compared together in order to obtain the first Term of a Series for x, for the like Reason.

But x^3 may be compared with $-a^2x$, as also $-a^2x$ with $-y^3$ for that End. These two give the first Term of a Series that converges the sooner the less y is; as $x^3 = y^3$ gives the first Term of a Series that converges the sooner the greater y is. The last Series was given in the preceding Article. The comparing x^3 with $-a^2x$ gives these two Series,

$$x = a - \tfrac{1}{2}y - \frac{y^2}{8a} + \frac{7y^3}{16a^2} - \frac{59y^4}{128a^3}, \text{ \&c.}$$

$$x = -a + \tfrac{1}{2}y + \frac{y^2}{8a} + \frac{9y^3}{16a^2} + \frac{69y^4}{128a^3}, \text{ \&c.}$$

The comparing $-a^2x$ with $-y^3$ gives

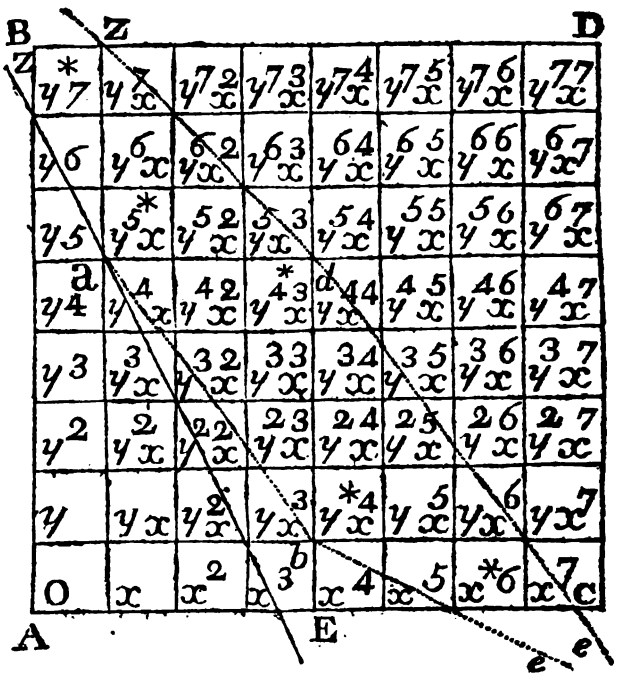
$$x = \frac{y^3}{a^2} + \frac{y^4}{a^3} + \frac{y^5}{a^4} + \frac{y^6}{a^5}, \text{ \&c.}$$

And

And these Series give three Values of x when y is very little; the last of which is itself also very little in that Case, as it appears indeed from the Equation, that when y vanishes, the three Values of x become $+a$, $-a$, and 0, because when y vanishes, the Equation becomes $x^2 - a^2x = 0$; whose Roots are a, $-a$, 0.

312. It appears sufficiently from what we have said, that when an Equation is proposed involving x and y, and the Value of x is required in a converging Series, the Difficulty of finding the first Term of the Series is reduced to this; "*To find what Terms assumed in order to determine a Value of* x *expressed in some Dimensions of* y *and* a *will give such a Value of it, as substituted for it in the other Terms will make them all of more Dimensions of* y, *or all of less Dimensions of* y, *than those assumed Terms.*"

To determine this, draw B A and A C at right Angles to each other, compleat the Parallelogram A B C D and divide it into equal Squares, as in the Figure. In these Squares place the Powers of x from A towards C, and the Powers of y from A towards B, and in any other Square place that Power of x that is directly below it in the line A C, and that Power of y that is in a parallel with it in the Line A B; so that in the Index of x in any Square may express its Distance from the Line A B, and the Index of y in any Square may express its Distance from the Line A C. Of this Square we are to observe,



1. *That the Terms are not only in geometrical Progreſſion in the vertical Column* A B, *or the horizontal* A C, *and their parallels; but alſo in the Terms taken in any oblique ſtrait Line whatever; for in any ſuch Terms it is manifeſt that the Indices of* y *and* x *will be in arithmetical Progreſſion. The Indices of* y, *becauſe thoſe Terms will remove equally from the Line* A C, *or approach equally to it, and the Indices of* y *in any ſuch Terms are as their Diſtances from that Line* A C. *The Indices of* x *will alſo be in arithmetical Progreſſion, becauſe theſe Terms equally remove from, or approach to the Line* A B. Thus for Example, in the Terms y^7, y^5x, y^3x^2, yx^3, the Indices of y decreaſing by the common Difference 2, while the Indices of x increaſe in the Progreſſion of the natural Numbers, the common Ratio of the Terms is $\frac{x}{y^2}$. It follows,

2. *From*

2. *From the laſt Obſervation, that* "*if any two Terms be ſuppoſed equal, then all the Terms in the ſame ſtraight Line with theſe Terms, will be equal*;" *becauſe by ſuppoſing theſe two Terms equal, the common Ratio is ſuppoſed to be a Ratio of Equality*; *and from this it follows, that* "*if you ſubſtitute every where for* x *the Value that ariſes for it by ſuppoſing any two Terms equal, expreſſed in the Powers of* y, *the Dimenſions of* y *in all the Terms that are found in the ſame ſtraight Line will be equal*;" *but* "*the Dimenſions of* y *in the Terms above that Line will be greater than in thoſe in that Line*;" *and* "*the Dimenſions of* y *in the Terms below the ſaid Line will be leſs than its Dimenſions in that Line.*" Thus, by ſuppoſing $y^7 = yx^3$, we find $x^3 = y^6$, or $x = y^2$; and ſubſtituting this Value for x in all the Squares, the Dimenſions of y in the Terms y^7, y^5x, y^3x^2, yx^3, which are all found in the ſame ſtraight Line, will be 7, but the Dimenſions in all the Terms above that Line will be more than 7, and in all the Terms below that Line will be leſs than 7.

313. *From theſe two Obſervations we may eaſily find a Method for diſcovering what Terms ought to be aſſumed from an Equation in order to give a Value for* x *which ſhall make the other Terms all of higher, or all of lower Dimenſions of* y *than the aſſumed Terms*: viz. "*after all the Terms of the Equation are ranged in their proper Squares* (*by the laſt Article*) *ſuch Terms are to be aſſumed as lie in a ſtraight Line, ſo that the other Terms either lie all above the ſtraight Line, or fall all below it.*"

For Example, ſuppoſe the Equation propoſed is $y^7 - ay^5x + y^4x^3 + a^2yx^4 - ax^6 = 0$, then marking with an Aſteriſk the Squares in the laſt Article which contain the ſame Dimenſions of x and y as the Terms in the Equation, imagine a Ruler ZE to revolve about the firſt Square marked at y^7, and as it moves from A towards C, it will firſt meet the Term ay^5x, and while the Ruler joins theſe two Terms, all the other Terms lie above it: from which you infer, that by ſuppoſing theſe Terms equal, you ſhall obtain a Value of x, which ſubſtituted for it, will give all the other Terms of higher Dimenſions of y, than thoſe Terms;

Terms: and hence we conclude that the Value of x deduced from ſuppoſing theſe Terms equal, *viz.* $\frac{y^2}{a}$, is the firſt Term of a Series that will converge the ſooner the leſs y is in reſpect of a.

If the Ruler be made to revolve about the ſame Square the contrary Way from D towards C, it will firſt meet the Term y^4x^3, and by ſuppoſing $y^7 + y^4x^3 = 0$, we find $y = x$, which gives the firſt Term of a Series for x, that converges the ſooner the greater that y is. *And this is the celebrated Rule invented by* Sir Iſaac Newton *for this Purpoſe.*

314. *This Rule may be extended to Equations having Terms that involve Powers of* x *and* y *with fractional or ſurd Indices;* "*by taking Diſtances from* A *in the Lines* AC *and* AB *proportional to theſe Fractions and Surds,*" *and thence determining the Situation of the Terms of the propoſed Equation in the Parallelogram* ABCD.

It is to be obſerved alſo, that when the Line joining any two Terms has all the other Terms on one Side of it, by them you may find the firſt Term of a converging Series for x, *and thus* "*various ſuch Series can be deduced from the ſame Equation.*" As, in the laſt Example, the Line joining y^5x and yx^4 has all the Terms above it; and therefore ſuppoſing $-ay^5x + a^2yx^4 = 0$, we find $x^3 = \frac{y^4}{a}$, and $x = \frac{y^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$, which is the firſt Term of another converging Series for x. Again, the ſtraight Line joining yx^4 and x^6 has all the other Terms above it, and therefore, ſuppoſing $a^2yx^4 - ax^6 = 0$, we find $ay = x^2$, and $x = a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, the firſt Term of another Series for x, converging alſo the ſooner the leſs y is. There are two Series converging the ſooner the greater y is, to be deduced from ſuppoſing $y^7 = -y^4x^3$, or $y^4x^3 = ax^6$. And, *to find all theſe Series,* "*deſcribe a polygon* Zabed, *having a Term of the Equation in each of its*

Angles, and including all the other Terms within it, then a Series may be found for x, *by ſuppoſing any two Terms equal that are placed in any two adjacent Angles of the Polygon.*"

315. *If the Ruler* Z E *be made to move parallel to itſelf, all the Terms which it will touch at once will be of the ſame Dimenſions of* y: for they will bear the ſame Proportion to one another as the Terms in the Line Z E themſelves. The Terms which the Ruler will touch firſt will have fewer Dimenſions of *y*, than thoſe it touches afterwards in the Progreſs of its Motion, if it moves towards D; but more Dimenſions than they, if it moves towards A. *The Terms in the ſtraight Line* Z E, *ſerve to determine the firſt Term of the converging Series required. Theſe with the Terms it touches afterwards ſerve to determine the ſucceeding Terms of the converging Series; all the reſt vaniſhing compared with theſe, when* y *is very little and the Ruler moves from* A *towards* D, *or when* y *is vaſtly great and the Ruler moves from* D *towards* A.

316. *The ſame Author gives another Method for diſcovering the firſt Term of a Series that ſhall converge the ſooner the leſs* y *is.* "*Suppoſe the Term where* y *is ſeparately of the feweſt Dimenſions to be* Dy^l; *compare it ſucceſſively with the other Terms, as with* Ey^mx^s, *and obſerve where* $\frac{l-m}{s}$ *is found greateſt; and putting* $\frac{l-m}{s} = n$, Ay^a *will be the firſt Term of a Series that ſhall converge the ſooner the leſs* y *is:*" For in that Caſe Dy^l and Ey^mx^s will be infinitely greater than any other Terms of the propoſed Equation. Suppoſe Fy^ex^k is any other Term of the Equation, and, by the Suppoſition, $\frac{l-m}{s} (= n)$ is greater than $\frac{l-e}{k}$, and conſequently, multiplying by *k*, you find nk greater than $l-e$, and $nk+e$ greater than *l*; now if for *x* you ſubſtitute Ay^n, then $Fy^{ex} = FA^k y^{nk+e}$, which therefore will vaniſh compared with Dy^l (ſince $nk+e$ is greater than *l*) when *y* is infinitely little. Thus therefore all the Terms will vaniſh compared with Dy^l and Ey^{mx} which are ſuppoſed equal;

and

and consequently they will give the first Term of a Series that will converge the sooner the less y is.

317. *If you observe* "*when* $\frac{l-m}{s}$ *is found least of all, and suppose it equal to* n, *then will* Ay^n *be the first Term of a Series that will converge the sooner the greater* y *is.*" For in that Case Dy^l and Ey^mx^s will be infinitely greater than Fy^ex^k, because $\frac{l-m}{s}(=n)$ being less than $\frac{l-e}{k}$, it follows that nk is less than $l-e$, and $nk+e$ less than l, and consequently $Fy^ex^k\,(=FAy^{nk+e})$ vastly less than $-Dy^l$, when y is very great.

After the same Manner, if you compare any Term Dy^lx^h, *where both* x *and* y *are found, with all the other Terms, and observe where* $\frac{l-m}{s-h}$ *is found greatest or least, and suppose* $\frac{l-m}{s-h}=n$, *then may* Ay^n *be the first Term of a converging Series.* For supposing that Fy^ex^k is any other Term of the Equation, if $\frac{l-m}{s-h}(=n)$ is greater than $\frac{l-e}{k-h}$, then shall $nk-nh$ be greater than $l-e$, and $nk+e$ greater than $l+nh$. But $nk+e$ are the Dimensions of y in Fy^ex^k when $x=Ay^n$, and $l+nh$ are the Dimensions of y in Ey^mx^s; therefore Fy^ex^k is of more Dimensions of y than Ey^mx^s, and therefore vanishes compared to it when y is supposed infinitely little. In the same Manner, if $\frac{l-m}{s-h}$ is less than $\frac{l-e}{k-h}$, then will Ey^mx^s be infinitely greater than Fy^ex^k, when y is infinite.

318. *When the first Term* (Ay^n) *of the Series is found by the preceding Method, then by supposing* $x=Ay^n+p$, *and substituting this Binomial and its Powers for* x *and its Powers, there will arise an Equation for determining* p *the second Term of the Series. This new Equation may be treated in the same Manner as the Equation of* x, *and by the Rule of* 313, *the Terms that are to be compared in order to obtain a near Value*

of p, *may be discovered; by Means of which Terms* p *may be found: which suppose equal to* By^{n+r}, *then by supposing* $p = By^{n+r} + q$, *the Equation may be transformed into one for determining* q *the third Term of the Series, and by proceeding in the same Manner you may determine as many Terms of the Series as you please; finding* $x = Ay^{n} + By^{n+r} + Cy^{n+2r} + Dy^{n+3r}$, &c. *where the Dimensions of* y *ascend or descend according as* r *is positive or negative; and always "in arithmetical Progression, that this Value of* x *being substituted for it in the proposed Equation, the Terms involving* y *and its Powers may fall in with one another, so that more than one may always involve the same Dimension of* y, *which may mutually destroy each other and make the whole Equation vanish, as it ought to do."*

It is obvious that as the Dimensions of y in $Ay_n + By^{n+r} + Cy^{n+2r} + Dy^{n+3r}$, &c. are in an arithmetical Progression whose Difference is r, the Square, Cube, or any Power s of $Ay^n + By^{n+r} + Cy^{n+2r} + Dy^{n+3r}$ &c. will consist of Terms wherein the Dimensions of y will constitute an arithmetical Progression having the same common Difference r; for these Dimensions will be sn, $sn + r$, $sn + 2r$, $sn + 3r$, &c. Therefore, *if in any Term* $Ey^{m}x^{s}$ *you substitute for* x *the Series* $Ay^{n} + By^{n+r} + Cy^{n+2r} + Dy^{n+3r}$, &c. *the Terms of the Series expressing* $Ey^{m}x^{s}$ *will consist of these Dimensions of* y, *viz.* $m + sn$, $m + sn + r$, $m + sn + 2r$, $m + sn + 3r$, &c. *and by a like Substitution in any other Term as* $Fy^{e}x^{k}$, *the Dimensions of* y *will be* $e + nk$, $e + nk + r$, $e + nk + 2r$, $e + nk + 3r$, &c. *The former Series of Indices must coincide with the latter Series, that the Terms in which they are found may be compared together, and be found equal with opposite Signs so as to destroy one another, and make the whole Equation vanish.*

The first Series consists of Terms arising by adding some Multiple of r *to* $m + sn$, *the latter by adding some Multiple of* r *to* $e + nk$; *and that these may coincide, some Multiple of* r *added to* $m + sn$ *must be equal to some other Multiple of* r *added to* $e + nk$. *From which it appears that the Difference*

of

of $m+sn$ *and* $e+nk$ *is always a Multiple of* r; *and consequently that* r *is a Diviſor of the Difference of the Dimenſions of* y *in the Terms* $Ey^{m}x^{t}$ *and* $Fy^{e}x^{k}$, *ſuppoſing* $x=Ay^{s}$. *It follows therefore* "*that* r *is a common Diviſor of the Difference of Dimenſions of* y *in the Terms of the Equation, when you have ſubſtituted* Ay^{s} *for* x *in all the Terms.*" *And if* r *be aſſumed equal to the greateſt common Diviſor (exceepting ſome Caſes afterward to be mentioned) you will have the true Form of a Series for* x. *And now the Dimenſions* y^{a}, y^{a+r}, y^{a+2r}, y^{a+3r}, &c. *being known, there remains only, by Calculation, to determine the general Coefficients* A, B, C, D, &c. *in order to find the Series* $Ay^{a}+By^{a+r}+Cy^{a+2r}+Dy^{a+3r}$ &c. $=x$.

319. *This leads us to* Sir Iſaac Newton's ſecond general Method *of Series*; *which conſiſts in aſſuming a Series with undetermined Coefficients expreſſing* x, *as* $Ay^{a}+By^{a+r}+Cy^{a+2r}+$, &c. *where* A, B, C, &c. *are ſuppoſed as yet unknown, but* n *and* r *are diſcovered by what we have already demonſtrated; and ſubſtituting this every where for* x, *you muſt ſuppoſe, in the new Equation that ariſes, the Sum of all the Terms that involve the ſame Dimenſion of* y *to vaniſh, by which Means you will obtain particular Equations, the firſt of which will give* A, *the ſecond* B, *the third* C, &c. *and theſe Values being ſubſtituted in the aſſumed Series for* A, B, C, &c. *the Series for* x *will be obtained as far as you pleaſe.*

Let us apply, for Example, this Method to the Equation (of 308) $x^{3}+a^{2}x-2a^{3}+ayx-y^{3}=0$. Suppoſe it is required to find a Series converging the ſooner the leſs y is: its firſt Term (by 310, or 312) is found to be a, ſo that $n=0$. Subſtitute a for x in the Equation, and the Terms become $a^{3}+a^{3}-2a^{3}+a^{2}y-y^{3}$, and the Differences of the Indices are 0, 1, 2, 3; whoſe greateſt common Meaſure is 1, ſo that $r=1$. Aſſume therefore $x=A+By+Cy^{2}+Dy^{3}$, &c. and ſubſtitute this Series for x in the Equation. Then

$$\begin{aligned}
x^3 &= A^3 + 3A^2By + 3AB^2y^2 + B^3y^3 + \&c.\\
&\quad + 3A^2Cy^2 + 3A^2Dy^3 + \&c.\\
&\quad + 6ABCy^2 + \&c.\\
+a^2x &= a^2A + a^2By + a^2Cy^2 + a^2Dy^3 + \&c.\\
+ayx &= aAy + aBy^2 + aDy^3 + \&c.\\
-2a^3 &= -2a^3\\
-y^3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots = 1\times y^3.
\end{aligned}$$

Now since $x^3 + a^2x + ayx - 2a^3 - y^3 = 0$, it follows that the Sum of these Series involving y must vanish. But that cannot be if the Coefficient of every particular Term does not vanish. For every Term where y is infinitely little, is infinitely greater than the following Terms, so that if every Term does not vanish of itself, the Addition or Subtraction of the following Terms which are infinitely less than it, or of the preceding Terms which are infinitely greater, cannot destroy it; and therefore the whole cannot vanish. It appears therefore that $A^3 + a^2A - 2a^3 = 0$, is an Equation for determining A, and gives $A = a$.

In order to determine B, you must suppose the Sum of the Coefficients affecting y to vanish, *viz.* $3A^2B + a^2B + aA \times y = 0$, or, since $A = a$, $4a^2By + a^2y = 0$, and $B = -\frac{1}{4}$.

To determine C, in the same Manner suppose $3AB^2y^2 + 3A^2Cy^2 + a^2Cy^2 + aBy^2 = 0$, or, substituting for A and B their Values already found, $\frac{3ay^2}{16} + 4a^2Cy^2 - \frac{ay^2}{4} = 0$, and consequently $C = \frac{1}{64a}$. And, by proceeding in the same Manner, $D = \frac{131}{512a^2}$, so that $x = a - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64a}y^2 + \frac{131}{512a^2}y^3$, &c. as we found before in N°. 309.

320. *By this Method you may transfer Series from one undetermined*

determined Quantity to another, and obtain Theorems for the Reverſion *of Series.*

Suppoſe that $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ &c. *and it is required to expreſs* y *by a Series conſiſting of the Powers of* x. *It is obvious that when* x *is very little,* y *is alſo very little, and that in order to determine the firſt Term of the Series, you need only aſſume* $x = ay$. *And therefore* $y = \frac{x}{a}$; *ſo that* $n = 1$.

By ſubſtituting $\frac{x}{a}$ *for* y, *you find the Dimenſions of* x *in the Terms will be* 1, 2, 3, 4, &c. *ſo that* $r = 1$ *alſo. You may therefore aſſume* $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ &c. *And by the Subſtitution of this Value of* y *you will find*

$$\begin{array}{lllll} ay = & aAx & + aBx^2 & + aCx^3 & + \&c. \\ by^2 = & & bA^2x^2 & + 2bABx^3 & + \&c. \\ cy^3 = & & & cA^3x^3 & + \&c. \\ \&c. & & & & \&c. \end{array}$$

But the firſt Term being already found to be $\frac{x}{a}$, *you have* $A = \frac{1}{a}$; *and ſince* $aB + bA^2 = 0$, *it follows that* $B = -\frac{b}{a^3}$. *After the ſame Manner you will find* $C = \frac{2b^2 - ac}{a^4}$. *Whence* $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^4}x^3 +$ &c.

321. *Suppoſe again you have* $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 +$ &c. $= gy + hy^2 + iy^3 + ky^4$, &c. *to find* x *in Terms of* y. *You will eaſily ſee, by* 313, *that the firſt Term of the Series for* x *is* $\frac{gy}{a}$, *that* $n = 1$, $r = 1$. *Therefore aſſume* $x = Ay + By^2 + Cy^3$, &c. *and by ſubſtituting this Value for* x *and bringing all the Terms to one Side, you will have*

$$\begin{array}{rl} ax = & aAy + aBy^2 + aCy^3 + \&c. \\ bx^2 = & \quad bA^2y^2 + 2bABy^3 + \&c. \\ cx^3 = & \quad\quad cA^3y^3 + \&c. \\ \&c & \quad\quad\quad \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} -gy = & -gy \\ -hy^2 = & \ldots\ldots -hy^2 \\ -iy^3 = & \ldots\ldots\ldots\ldots -iy^3 \\ \&c. & \quad\quad\quad\quad \&c. \end{array}$$

From whence we see, first, that $aA = g$, *and* $A = \frac{g}{a}$. 2°. *That* $aB + bA^2 - h = 0$, *and* $B = \frac{h}{a} - \frac{bg^2}{a^3}$. 3°. *That* $aC + 2bAB + cA^3 - i = 0$, *and therefore* $C = \frac{i - 2bAB - cA^3}{a}$. *And thus the three first Terms of the Series* $Ay + By^2 + Cy^3$, &c. *are known.* [See Mr. De Moivre in Phil. Transf. 240.]

322. Before we conclude it remains to clear a Difficulty in this Method, that has embarrassed some late ingenious Writers, concerning "*the Value of* r *to be assumed when two or more of the Values of the first Term of a Series for expressing* x *are found equal*;" *a Correction of the preceding Rule being necessary in that Case.* And the Author of that Correction having only collected it from Experience, and given it us without Proof, it is the more necessary to demonstrate it here.

It is to be observed then, that in order that the Series $Ay^n + By^{n+r} + Cy^{n+2r} + Dy^{n+3r} + \&c.$ *may express* x, *it is not only necessary that when it is substituted for* x *in the proposed Equation* $Dy^l + Ey^m x^s + Fy^e x^k = 0$, *the Indices* $m + ns$, $m + ns + r$, $m + ns + 2r$, &c. *should fall in with the Indices* $e + nk$, $e + nk + r$, $e + nk + 2r$, &c. *in order that the Terms may be compared together to determine the Coefficients* A, B, C, &c. *but it is also necessary, that in the particular Equations for determining any of those Coefficients, as* B *for Example, those Terms that involve* B *should not destroy each other.* Thus the Equation $3A^2B - 3A^2B - aA = 0$ can never determine *B*, because $3A^2B - 3A^2B = 0$, and thus *B* exterminates itself out of the Equation; besides the Contradiction arising from $-aA = 0$, when *A* perhaps has been determined already to be equal to some real Quantity.

In order to know how to avoid this Abſurdity, let us ſuppoſe that the firſt Order of Terms in the propoſed Equation are, as before, DY^l, Ey^mx^s, &c. and if Ay^n is found to be the firſt Term of a Series for x, then the Dimenſions of y in the firſt order of Terms, ariſing by ſubſtituting in them Ay^n for x, will be $m+ns$, and the Dimenſions of y ariſing by ſubſtituting $Ay^n+By^{n+r}+Cy^{n+2r}$, &c. for x will be $m+ns$, $m+ns+r$, $m+ns+2r$, &c. Suppoſe that Fy^ex^k is the next Order of Terms; and, by the ſame Subſtitution, the Dimenſions of y ariſing from it will be

(becauſe $Fy^ex^k = Fy^e \times \overline{Ay^n+By^{n+r}+Cy^{n+2r}+\&c.}^k = FA^ky^{e+nk}+kFBA^{k-1}y^{e+nk+r}$, &c.) $e+nk$, $e+nk+r$, $e+nk+2r$, &c. Now it is plain that $e+nk$ muſt coincide with ſome one of the Dimenſions $m+ns$, $m+ns+r$, $m+ns+2r$, &c. that the Terms involving them may be compared together. And therefore, as we obſerved in 318, r *muſt be the Difference of* e+nk *and* m+ns, *or ſome Diviſor of that Difference.* In general, r *muſt be aſſumed ſuch a Diviſor of that Difference as may allow not only* e+nk *to coincide with ſome one of the Series* m+ns, m+ns+r, m+ns+2r, &c. *but as may make all the Indices of the other Orders beſides* e+nk *likewiſe to coincide with one of that Series: that is, if* Gy^fx^h *is another Term in the Equation,* r *muſt be ſo aſſumed that the Series* f+nh, f+nh+r, f+nh+2r &c. *ariſing by ſubſtituting in it* $Ay^n+By^{n+r}+Cy^{n+2r}$, &c. *for* x, *may coincide ſomewhere with the firſt Series* m+ns, m+ns+r, m+ns+2r, *&c.* And therefore we ſaid in 318, *that* r *muſt be aſſumed ſo as to be equal to ſome common Diviſor of the Differences of the Indices* m+ns, e+nk, f+nh, &c. *which ariſe in the propoſed Equation by ſubſtituting in it for* x *the firſt Term already known* Ay^n. *For by aſſuming* r *equal to a common Diviſor of theſe Differences, the three Series*

m+ns, m+ns+r, m+ns+2r, m+ns+3r, &c.
e+nk, e+nk+r, e+nk+2r, e+nk+3r, &c.
f+nh, f+nh+r, f+nh+2r, f+nh+3r, &c.

will coincide with one another, ſince ſome Multiples of r *added to* m+ns *will give* e+nk *and all that follow it in the ſecond Series, and ſome Multiples of* r *added to* m+ns *will alſo give* f+nh *and all that follow it in the third Series. It is alſo obvious, that, if no particular Reaſon hinder it,* r *ought*

ought to be aſſumed equal to the greateſt common Meaſure of theſe Differences. For Example, if the Indices $m+ns$, $e+nk$, $f+nh$, happen to be in arithmetical Progreſſion, then r ought to be aſſumed equal to the common Difference of the Terms, and the firſt of the ſecond Series will coincide with the ſecond of the firſt, and the firſt of the third Series will coincide with the ſecond of the ſecond Series, and with the third of the firſt, and ſo on.

323. Theſe things being well underſtood, we are next to obſerve that after you have ſubſtituted $Ay^{n}+By^{n+r}+Cy^{n+2r}$, &c. for x in the firſt Order of Terms in the Equation, the Terms that involve $m+ns$ Dimenſions of y will deſtroy one another; for $x-Ay^{n}$ muſt be a Diviſor of the Aggregate of theſe Terms, ſince they give Ay^{n} as one Value of x: let $\overline{x-Ay^{n}}\times P$ repreſent that Aggregate, and, ſubſtituting for x its Value $Ay^{n}+By^{n+r}+Cy^{n+2r}$, &c. that Aggregate becomes $\overline{Ay^{n}+By^{n+r}+Cy^{n+2r}, \text{ &c.}-Ay^{n}}\times P=\overline{By^{n+r}+Cy^{n+2r}, \text{ &c.}}\times P$. Now the loweſt Dimenſion in $x-Ay^{n}\times P$ was ſuppoſed to be $m+ns$, whence the Dimenſion of P, in the ſame Terms, will be $m+ns-n$, and the loweſt Dimenſion in $\overline{By^{n+r}+Cy^{n+2r}+\text{ &c.}}\times P$ will be $n+r+m+ns-n=m+ns+r$. Suppoſe again that two Values of x, determined from the firſt Order of Terms, are equal, and then $\overline{x-Ay^{n}}^{2}$ will be a Diviſor of that Aggregate of the firſt Order of Terms. Suppoſe that Aggregate now $\overline{x-Ay^{n}}^{2}\times P$, which by Subſtitution of $Ay^{n}+By^{n+r}+Cy^{n+2r}$, &c. for x will become $\overline{By^{n+r}+Cy^{n+2r}+\text{ &c.}}^{2}\times P$, in which the loweſt Term will now be of $m+ns$ Dimenſions, ſince in $\overline{x-Ay^{n}}^{2}\times P$ the loweſt Term is ſuppoſed of $m+ns$ Dimenſions; and conſequently in theſe Terms, the Dimenſion of P itſelf, is $m+ns-2n$.

In general, if the Number of Values of x *ſuppoſed equal to* Ay^{n} *be* p, *then muſt* $\overline{x-Ay^{n}}^{p}$ *be a Diviſor of the Aggregate of the Terms of the firſt Order. And that Aggregate being expreſſed by* $\overline{x-Ay^{n}}^{p}\times P$, in the loweſt Terms, *the Dimenſions of* y *in* P *will be* $m+ns-pn$, *that in* $\overline{x-Ay^{n}}^{p}$ *they may be* $m+ns$, *as we always ſuppoſe. Subſtitute in* $\overline{x-Ay^{n}}^{p}\times P$ *for* $x-Ay^{n}$ *its Value* $By^{n+r}+Cy^{n}$

$+ Cy^{n+2r} +$ &c. *and in the Result* $\overline{By^{n+r} + Cy^{n+2r} + \&c.}\Big|^{p}$ $\times$ P *the lowest Dimensions of* y *will be* $pn + pr + m + ns - pn = m + ns + pr$.

324. From what has been said we conclude, that when you have substituted for x in the first Order of Terms of the Equation proposed the Series $Ay^n + By^{n+r} + Cy^{n+2r} +$ &c. the first Term of which Ay^n is known, and the Values of x whose Number is p are found equal, then the Terms arising that involve $m+ns$, $m+ns+r$, $m+ns+2r$, &c. till you come to $m+ns+pr$, will destroy each other and vanish; so that the first Term, with which the Terms of the second Order $e+nk$ can be compared, must be that which involves $m+ns+pr$; and therefore supposing $e+nk = m+ns+pr$, or $r = \frac{e+nk-m-ns}{p}$, *the highest Value you can give* r *must be the Difference of* $e+nk$ *and* $m+ns$ *divided by* p *the Number of equal Values of the first Term of the Series. If this Value of* r *is a common Measure of all the Differences of the Indices, then is it a just Value of* r; *but if it is not, such a Value of* r *must be assumed, as may measure this and all the Differences: that is, such a Value as may be the greatest common Measure of the least Difference divided by* p (viz. $\frac{e+nk-m-ns}{p}$) *and of the common Measure of all the Differences.* For thus the Indices $m+ns$, $m+ns+r$, $m+ns+2r$, &c. will coincide with $e+nk$, $e+nk+r$, $e+nk+2r$, &c. and with $f+nh$, $f+nh+r$, $f+nh+2r$, &c. and you shall always have Terms to be compared together sufficient to determine B, C, D, &c. the general Coefficients of the Series assumed for x.

325. To all this it may be added, that if $x - Ay^n$ be a Divisor of the Aggregate of the Terms of the second Order Fy^ex^k, &c. then, by substituting for x the Series $Ay^n + By^{n+r} + Cy^{n+2r} +$ &c. there vanish not only as many Terms of the Series involving $m+ns$, $m+ns+r$, $m+ns+2r$, &c. as there are equal Values of the first Term Ay^n; but the Terms involving $e+nk$ Dimensions of y vanish also; and therefore it is then only necessary that $e+nk+r$ coincide with $m+ns+pr$; so that, in that Case, you need only take $r = \frac{e+nk-m-ns}{p-1}$. And if

$x -$

$\overline{x-Ay^n}|^{p-1}$ be a Diviſor of the Aggregate of the ſecond Order of Terms, then the Terms (after ſubſtituting for x the Series $Ay^n+By^{n+r}+Cy^{n+2r}$ &c.) which involve $e+nk$, $e+nk+r$, $e+nk+2r$, &c. will vaniſh to the Term $e+nk+\overline{p-1}\times r$; ſo that, ſuppoſing $e+nk+\overline{p-1}\times r=m+ns+pr$, you have $r=\frac{e+nk-m-ns}{p}$, that is, to the leaſt Difference of the Indices $m+ns$, $e+nk$, $f+nh$, &c. provided that Difference be a Meaſure of the other Differences; although there may be as many Values of the firſt Term of the Series equal, as there are Units in p. Or, if that does not happen, r muſt be taken, as formerly, equal to the greateſt common Meaſure of the Differences.

326. Suppoſe that the Orders of Terms of the Equation can be expreſſed the firſt by $\overline{x-Ay^n}|^p\times P$, the ſecond by $\overline{x-Ay^n}|^q\times Q$, the third by $\overline{x-Ay^n}|^l\times L$, &c. and ſuppoſe that Ey^mx^s is one of the firſt, Fy^ux^t one of the ſecond, Gy^fx^b one of the third, and ſo on; then it is plain that, ſubſtituting for x the Series $Ay^n+By^{n+r}+Cy^{n+2r}+$, &c. the loweſt Term that will remain in the firſt will be $m+ns+pr$ Dimenſions of y, the loweſt Term that will remain in the ſecond will be of $e+nk+qr$, and the loweſt Term remaining in the third of $f+nh+lr$ Dimenſions of y. For by the ſame Reaſoning as we uſed in 323, to demonſtrate that, in the firſt Order of Terms $\overline{x-Ay^n}|^p\times P$, the loweſt Dimenſions of y are $m+ns+pr$, we ſhall find that, in the ſubſequent Orders, the loweſt Dimenſions of y in the Terms $\overline{x-Ay^n}|^q\times Q=\overline{By^{n+r}+Cy^{n+2r}}$ &c.$|^q\times Q$ muſt be $e+nk-qn+qn+qr=e+nk+qr$, and ſo of the other Terms $\overline{x-Ay^n}|^l\times L$ the loweſt Dimenſions muſt be $f+nh+lr$. The Indices therefore of the Terms that do not vaniſh being

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ m+ns+pr, \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ e+nk+qr, \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ f+nh+lr, \end{array}$$

if r be taken equal to $\frac{e+nk-m-ns}{p-q}$, then will $m+ns+pr$ and $e+nk+qr$ coincide: and if at the ſame Time r be a Diviſor of $f+nh-m-ns$, and be found in it a Number of Times greater than $p-l$, or if r be leſs than

$f+nh$

$\frac{f+nh-m-ns}{p-l}$, then r will be rightly assumed. In general, *take all the Quotients* $\frac{e+nk-m-ns}{p-q}, \frac{f+nh-m-ns}{p-l}$; *and either the least of these, or a Number whose Denominator exceeding* p—q *by an Integer, measures it and all the Differences* f+nh—m—ns, *gives* r; *supposing* p, q, *and* l *Integers. But if* p, q, *and* l *are Fractions, you are to take* r *so that it be equal to* $\frac{e+nk-m-ns}{p-q+K} = \frac{f+nh-m-ns}{p-l+M}$, *and so that* K *and* M *may be Integers.* Suppose, for Example, $m+ns=\frac{7}{3}$, $p=\frac{5}{2}$; $e+nk=\frac{10}{3}$, $q=\frac{3}{2}$; $f+nh=\frac{9}{2}$, and $l=\frac{1}{2}$: then putting ------ $(r=)\ \frac{e+nk-m-ns}{p-q+K}$ $= \frac{1}{1+K} = \frac{f+nh-m-ns}{p-l+M} = \frac{13}{2+M}$, $M=\frac{1}{6}+\frac{13}{6}K$; whence it is easily seen, that 5 and 11 are the least Integers that can be assumed for K and M. And that $r=\frac{1}{1+K}=\frac{1}{6}$; and therefore $m+ns+pr=\frac{33}{12}$, $e+nk+qr=\frac{43}{12}$, and $f+nh+lr=\frac{55}{12}$. That is, the Terms of the first Series whose Dimensions are $m+ns+\overline{p+K}\times r$, $m+ns+\overline{p+M}\times r$ fall in with the first Terms of the second and third Series respectively.

OF

OF THE

MEASURES

OF

RATIOS.

OF THE

MEASURES

OF

RATIOS.

Tranſlated from the Latin of

The late JAMES MAGUIRE, *A. M.* of the Univerſity of DUBLIN.

A POSTHUMOUS WORK.

MAGNITUDES are ſaid to be equal, which being placed one upon the other, are, or ſeem to be, congruous: as *Lines*, *Angles*, *Surfaces*, which being compared by mental Appoſition, are ſeen upon Account of ſome given Circumſtances to coincide; and *Solids*, which penetrate each other, and coaleſce into one. But *Magnitudes, ſo named in a looſer Senſe* becauſe they can be increaſed or diminiſhed, *are ſaid to be equal, which conſidered as Cauſes, produce the ſame Effects*; as the *Times*, in which a Body moved uniformly is carried over equal Spaces; the *Velocities*, with which Bodies moved forward are carried over equal Spaces in a given Time; and *Forces*, which when they are oppoſed deſtroy each other.

And ſince it is manifeſt, that the Form of any given Magnitude whatſoever may be varied to Infinity, the Quantity being ſtill preſerved, by changing the Situation of the Parts: Therefore, *when the Congruity of Magnitudes cannot be immediately perceived* upon Account of the Variety of Forms and Poſitions, *it is* nevertheleſs to be *inveſtigated* by the Mind many Ways; *by adding to Congruents, or by*

 ſub-

ſubducting from them, ſome other Congruents, that an Equality may appear between the reſulting Magnitudes; *or by dividing them into Parts, whoſe Equality can be more eaſily made known*; viz. Lines into ſmaller Lines, Surfaces, into Triangles, and Solids, into Pyramids; *or by a ſucceſſive Appoſition, or by a mental Tranſformation.* Thus is made known, the Equality between Parallelograms, which have the ſame Baſe and an equal Altitude; between a Circle, and a Triangle under the Radius and Periphery; between the Periphery of a Circle, and a Line, which it always touches while it perfects a Revolution by going forward in the Manner of a Wheel; between the curve Surface of a right Cylinder, and a Rectangle under its Side and the Periphery of its Baſe.

But, becauſe *Magnitudes of the ſame Kind*, whatever may be their Form, *can be equal*; It follows, that *of any two Magnitudes whatſoever* A, B, *either the one* A *meaſures the other* B; *or* that *the one* A *conſiſts of the other* B *preciſely, along with ſome Part of it*; *or*, laſtly, that *the one* A *conſiſts of a Multiple of* B, *with ſome Part of it*; and, *conſequently*, that *thoſe Magnitudes will have ſome Ratio to each other.* Now *a Ratio is a certain Habitude of two Magnitudes with Regard to Quantity.* And *becauſe this Habitude regards the Relation of Quantity alone* excluſive of all Circumſtances of Forms and Species, it comes to paſs, that *it can be expreſſed by no Method, but by Numbers*; to wit, by the moſt general Ideas of the Magnitudes themſelves.

The Ratio therefore *of the incommenſurables* A, B, *is ineffable*: For, if they were to each other, as Number to Number; 'tis plain, that they wou'd be Multiples of ſome ſame Meaſure, which is contrary to Hypotheſis. But this *Ineffability ariſes from the Incommenſurability*: For, ſince all Magnitude is eſtimated ſo great, as the Aggregate ariſing from the Repetition of ſome other Magnitude of the ſame Kind (or at leaſt, from the Repetition of ſome aliquot Part of it) may be, (which is itſelf look'd upon as the primary Meaſure, becauſe that the Mind acquieſces in the

Contemplation

Contemplation of it as being intuitively known; and which is therefore named by an abſolute and moſt general Name, Unity): It is manifeſt, that *every Magnitude, which is incommenſurable with this Meaſure Unity, is ineffable.* And *the Incommenſurability ariſes from the Diviſibility of the Magnitudes:* to wit, If of the Magnitude A, there is taken any aliquot Part *p*, ever ſo ſmall, and it be ſubducted ſo often as it can be, from the Magnitude B, there can always remain ſome Part leſs than the diviſible Magnitude *p*.

And hence alſo *one or other* A, *of the Incommenſurables is commenſurable with ſome other Magnitude* C, *which approaches nearer to* B, *than by any given Difference.*

And therefore *the ineffable Ratios of Incommenſurables are the Limits towards which the effable Ratios of Commenſurables approach to Infinity, and to which they can attain nearer than by any definite Difference, but yet never accurately,* by Reaſon of the Diviſibility of Magnitudes.

'Tis the Province of Arithmeticians, to expreſs any given Magnitudes related in any Manner to any given Magnitudes. But becauſe the Nature of Numbers and of Magnitudes can not admit this to be done perfectly, they are under a Neceſſity of flying to the Aſſiſtance of Approximations; that, although they are unable to attain to the accurate Values of Magnitudes, they yet may exhibit other Magnitudes, which may approach nearer to thoſe, which were to be expreſſed, than by any definite Difference. *When* therefore, in what follows, *Ratios are conſidered as compounded of ſome ſame Ratio* $\frac{a}{b}$, *we would have* underſtood, *not the Ratio of the determinate Magnitudes* a, b; *but indefinitely, a Ratio, of which thoſe Ratios may be compounded, which approach nearer to any given Ratios, than by any definite Difference.*

Now *a Ratio is compounded of Ratios, by expreſſing thoſe Ratios*; viz. by changing the Terms into Numerals, and then by multiplying Antecedents into Antecedents, and

Conſequents into Conſequents; and *a Ratio is* ſaid to be *compounded of any Ratio, when it is the duplicate, or triplicate, or quadruplicate,* &c. *of it. And that, which is compounded of two equal Ratios, is called the Duplicate of either of them*; *viz. the Duplicate of that Ratio, which is compounded of one of them and of the Ratio of Equality*, which in Compoſition makes no Change. *That which is compounded of three equal Ratios is called the triplicate of that which is compounded of one*; *that which of four, quadruplicate*; &c. and *that, which is compounded of three, is called the ſeſquiplicate of that, which is compounded of two:* And univerſally, *the Relations of Ratios are derived from the Ratios between the Numbers of the equal component Ratios*, but relative Names are wanting. And *the Ratio between any Extremes whatſoever in a geometrical Series* a, b, c, d, e, &c. *is ſaid to be compounded of the intermediate Ratio*, for the Ratio $\frac{a}{e}$ is compounded of all the intermediate Ratios $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, which are equal the one to the other *.

PROP. I.

All Ratios of the ſame Inequality are analogous one to the other: that is, The Ratio $\frac{m}{n}$ is duplicate, or triplicate, or ſeſquiplicate, or ſubduplicate, &c. of the Ratio $\frac{A}{B}$, or of the Reciprocal $\frac{B}{A}$. viz. The Ratio $\frac{m}{n}$ is compounded of ſome Ratio, of which alſo is compounded the Ratio $\frac{A}{B}$, or the Reciprocal $\frac{B}{A}$.

---

* Eucl. V. Definitions.

I call

I call *Ratios of the same Inequality* those whose Antecedents are all greater, or whose Antecedents are all less, than their Consequents.

q, r, s, m, a, b, c, d, e, f, g, h,

without changing the Ratio $\frac{m}{n}$, let the Magnitudes m, n, become homogeneous with the Magnitudes A, B, and between m, and n, let there be a Number of mean Proportionals a, b, c, &c. indefinitely great, viz. that the Ratio $\frac{a-m}{m}$ may be taken less than any given Ratio, or (which is the same Thing) that the intermediate Ratio $\frac{a}{m}$ may approach nearer to the Ratio of Equality, than any predefinite Ratio of Inequality, and let the Series be infinitely continued each Way: And (because m, a, b, &c. ascending increase to a Magnitude greater than any given one, and m, s, r, q, &c. descending decrease to a Magnitude less than any given one) if either one or the other A, of the Terms A, B, is not in the Series, let it be between g and h, viz. let it be greater than g, and less than h, and the Ratio $\frac{A}{g}$ will be less than the Ratio $\frac{h}{g}$; that is, than the Ratio $\frac{a}{m}$; and therefore the Ratio $\frac{A-g}{g}$ will be less than the Ratio, $\frac{a-m}{m}$, which could have been assumed less than any given Ratio. Therefore a Series can be exhibited in which the Terms m, n, are placed, and of which some Term will have to the Term A a Ratio which is less short of the Ratio of Equality, than any given Ratio of Inequality; that is, the Terms m, n, A, B, are placed in a geometric Series. And thence it appears, that the Ratios $\frac{m}{n}$, $\frac{A}{B}$, are compounded of the same Ratio $\frac{m}{a}$, or of the reciprocals, $\frac{m}{a}$, $\frac{a}{m}$.

PROP. II.

The Analogy which is between Ratios of the ſame Inequality is immutable; viz. *the Numbers of the component Ratios are in a given Ratio.* For let $\frac{p}{z}$ be the ultimate Ratio of which the Ratios $\frac{m}{n}$, $\frac{A}{B}$, of the ſame Inequality can be compounded, (for we ſuppoſe that they cannot be compounded of any Ratio, which is much ſhort of the Ratio of Equality, and thence that they cannot be compounded of any other Ratio, beſide the ſubduplicate, or ſubtriplicate, &c. of the Ratio $\frac{p}{z}$, viz. ſome Ratio, of which $\frac{p}{z}$ is alſo compounded) now if the Numbers of equal Ratios of which the Ratios $\frac{m}{n}$, $\frac{A}{B}$, are compounded be always called indefinitely n and N, and that they be ſuppoſed to be afterwards compounded of the ſubduplicate, or ſubtriplicate &c. of the Ratio $\frac{p}{z}$, 'tis evident, that n and N are both increaſed in a double, or triple, &c. Ratio; that is, the Numbers of the component Ratios are always in a given Ratio.

All Magnitudes which are in that Ratio are called the Meaſures of the compound Ratios.

Cor. 1. *If any Magnitude* M *be put for the Meaſure of any Ratio whatſoever, the Meaſures of all other Ratios of the ſame Inequality will be thence determined*; becauſe of the invariable Ratios which they have to the Meaſure M: For the Meaſure of the duplicate Ratio, will be double; of the triplicate, triple; of the ſeſquiplicate, ſeſquialterate; of the ſubduplicate, ſubduple; of the ſubtriplicate, ſubtriple; &c. &c. therefore the Meaſures of thoſe Ratios which verge to the Ratio of Equality are infinitely

infinitely diminiſhed. And becauſe *the Meaſure of a Ratio is* defined *a Magnitude proportional to the Number of equal Ratios, which are componnded with the Ratio of Equality**: the Meaſure of the Ratio of Equality itſelf will vaniſh. But *the Syſtems of Meaſures are varied by increaſing or diminiſhing in any given Ratio the aſſumed Magnitude* M, and thence alſo the Meaſures which are determined by it of all the other Ratios; *Or* alſo, *by aſſuming for Meaſures other Magnitudes heterogeneous to the Magnitude* M.

Cor. 2. *In a given Syſtem the Meaſure of the compound Ratio* $\frac{AC}{BD}$ *is the Sum of the Meaſures of the component Ratios* $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$. For let three Ratios be compounded of ſome ſame Ratio $\frac{g}{h}$, of which let z be the Meaſure, and let n and N be the Numbers of the Ratios $\frac{g}{h}$ of which the Ratios of the ſame Inequality $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, are compounded, and (becauſe a Ratio compounded of Ratios is compounded alſo of all the Ratios of which they themſelves are compounded) $n + N$ will be the Number of the Ratios $\frac{g}{h}$, of which the Ratio $\frac{AC}{BD}$ is compounded; therefore (Cor. 1.) $n \times z$, $N \times z$, and $\overline{n + N} \times z$, are the Meaſures of the Ratios $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, and $\frac{AC}{BD}$. But becauſe from the Compoſition of the Reciprocals, $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{A}$, the Ratio of Equality is made, of which there is no Meaſure, and becauſe theſe are compounded of the reciprocals $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{c}$, equal in Numbers, *therefore that their*

* Preceding Definition.

their Measures may be distinguished, and that the Measure of the compound Ratio may still also remain equal to the Sum of the Measures of the component Ratios; whatever may be the Measures of the Ratios of either Inequality, the Measures of all their Reciprocals ought to be the same, with their Signs changed.

Cor. 3. $n-2z,\ n-z,\ n,\ n+z,\ n+2z,\ n+3z,\ n+4z,$
$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f,\quad g,$

If the Magnitudes $n-2z$, $n-z$, n, &c. *in an arithmetical Series, be adjoined to the Magnitudes* a, b, c, &c. *in a geometrical Series, one to one respectively, the Measure of the Ratio between any Terms whatsoever in the geometrical Series, will be the Difference of the Terms adjoined.* For if the Number of Terms in the Series, whose Beginning and End are a and d, be called N; and if the common Difference z be put for the Measure of the intermediate Ratio $\frac{a}{b}$; the Number of the Ratios $\frac{a}{b}$, of which the Ratio $\frac{a}{d}$ is compounded, will be $N-1$, whose Measure therefore (Cor. 1.) is $\overline{N-1} \times z$; which, from the Nature of the arithmetical Series, is the Difference of the adjoined Terms.

SCHOLIUM.

The numeral Measures of Ratios are called Logarithms.

327 These are usually so disposed in a Table, that in the Column opposite to each integer Number the Logarithm is placed of the Ratio which that Number has to Unity. For *all Numbers are in a geometrical Series, to which (as they continually increase) Numbers continually increasing in an arithmetical Series are understood to be adjoined*; whence the Measure of the Ratio between any Terms whatsoever in the geometrical Series is the Difference of the Terms adjoined (*a*). viz. the Logarithm of the Ratio between the Numerator and Denominator of any

(*a*) Cor. 3.

any Fraction whatſoever (*b*), will be the Term affixed to the Numerator diminiſhed by the Term affixed to the Denominator. And becauſe in the vulgar Tables the Term affixed to Unity is a Cypher, the Logarithm of the Ratio of any Number whatſoever to Unity, will be the Term itſelf, which is adjoined. And hence is had a moſt uſeful Compendium for arithmetical Operations. For

328. *If a Number is to be multiplied by a Number*, becauſe the Ratio of the Product to Unity is compounded of the Ratios, which the Factors have to Unity; *if the Logarithms of the Ratios which the Factors have to Unity be added together, the Sum will be the Logarithm of the Ratio of the Product to Unity* (*c*), *and the correſponding Number will be the Product itſelf.*

329. *And if a Number is to be divided by a Number, the Difference of the Logarithms of the Ratios of the Dividend and the Diviſor to Unity is the Logarithm of the Ratio of the Quote to Unity* (*d*), *and the correſponding Number is the Quote itſelf.*

Let r, s, be integer Numbers. It is plain, that the Number of Ratios, of which is compounded the Ratio which the Power $n^{\frac{1}{s}}$ has to Unity, is to the Number of Ratios of which is compounded the Ratio which n has to Unity, as 1 to s; or as $\frac{1}{s}$ to 1 (*e*); and therefore that the Number of Ratios of which is compounded the Ratio which the Power $n^{\frac{r}{s}}$ has to Unity, is to the Number of Ratios of which is compounded the Ratio which n has to Unity, as $r \times \frac{1}{s}$ to 1; viz. as $\frac{r}{s}$ to 1. And hence, *if any Power of any Number whatſoever is ſought, the Logarithm of the Ratio of that Number to Unity, multiplied*

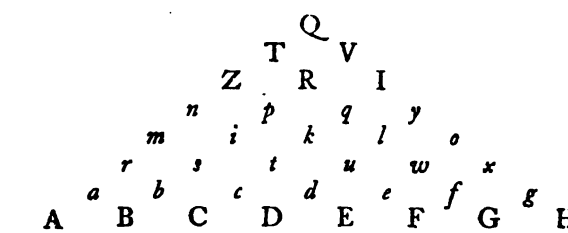
(*b*) Number 143. 76. (*c*) Number 79. Cor. 2.
(*d*) Number 81. Cor. 2. (*e*) Number 62.

multiplied into the Index of the Power, whether Integer or Fraction (f), is the Logarithm of the Ratio of the Power to Unity; and the Number corresponding is the Power itself.

331. Hence, *if the Logarithms of the Ratios, which the Numbers* A, B, *have to Unity, be called* L, *and* R; *then* $A^R = B^L$: For the Logarithm of the Ratio which either Power has to Unity is the Product of the Logarithms R L (g).

332. And hence *Equations, in which Indices are sought, can be reduced to those, in which Roots are sought.* As if $a^n + b^n = c$; and a, b, c, being given, the Index n be fought: Let q and p be the Logarithms of the Ratios of a to 1, and of b to 1; and let $\frac{g}{1}$ be the Ratio whofe Logarithm is n: Therefore $a^n = g^q$, and $b^n = g^p$ (*h*); whence $g^q + g^p = c$, where the reft being given, g is fought, whofe correfponding Logarithm is n, the Index fought.

PROP. III.



In the Series of Magnitudes A, B, C, *&c. the Differences, refulting from the continual Subduction of the preceding Terms from thofe which immediately follow, conftitute the Series* a, b, c, *&c. whofe Terms, fubducted from thofe immediately following, give the Series* r, s, t, *&c. &c. The Excefs* B — A,

(*f*) Number 83. 85. 145. Cor. 3. (*g*) Eucl. V. 9. Number 83. (*h*) Number 331.

B — A, *multiplied into the Number of Terms leſs one, in the Series whoſe Beginning and End are* A, H, *is deficient of the Exceſs* H — A, *by the Sum* $x + 2w + 3u + 4t$, *&c. or (if the Number of Terms of the Series* A, B, C, *&c. be* N ; *and the firſt of the third Differences, be* m ; *the firſt of the fourth,* n; *and ſo of the reſt) by the Sum* $\frac{N-1}{1} \times \frac{N-2}{2} r + \frac{N-1}{1} \times \frac{N-2}{2} \times \frac{N-3}{3} m + \frac{N-1}{1} \times \frac{N-2}{2} \times \frac{N-3}{3} \times \frac{N-4}{4} n +$ &c. &c.

Part 1ſt. Becauſe (by Hypotheſis) $B - A = a$, $C - B = b$, and ſo on; it is manifeſt that the Difference of the Extremes H — A is equal to $a + b + c$ &c. the Sum of the Differences: But (by Hypotheſis) $b = a + r$, $c = b + s$ and ſo on; therefore $c = a + r + s$, and $d = a + r + s + t$, and ſo on continually; whence the Difference H — A is equal to the Series following

a
$a+r$
$a+r+s$
$a+r+s+t$
$a+r+s+t+u$
$a+r+s+t+u+w$
$a+r+s+t+u+w+x$; and it is plain, that the Sum of this Series is equal to the Sum $N-1 \times a + N-2 \times r + N-3 \times s + N-4 \times t$, &c. whence $N-1 \times a$ is deficient of the Exceſs H — A by the Sum $N-2 \times r + N-3 \times s + N-4 \times t$, &c. or (computing backward) by the Sum $x + 2w + 3u + 4t$ &c.

Part 2d. Becauſe $s = r + m$, and $t = r + m + i$, and ſo on; and after the ſame Manner, $i = m + n$, and $k = m + n + p$, and ſo on continually; the former Series will be changed into the following one.

a
$a+r$
$a+2r+m$
$a+3r+3m+n$
$a+4r+6m+4n+Z$
$a+5r+10m+10n+5Z+T$
$a+6r+15m+20n+15Z+6T+Q$; where 'tis ob-

vious that the Coefficients of the Term a viz. Units, are Figurates of the firſt Order, whoſe Number is $N-1$, in *Paſchal's* arithmetical Triangle; and the Coefficients of the Term r, viz. 1, 2, 3, &c. are Figurates of the ſecond Order, whoſe Number is $N-2$; the Coefficient of the Term m, are Figurates of the third Order, whoſe Number is $N-3$; and ſo on continually (*a*): Whence by the common Methods of ſumming the Series of theſe Figurates (*b*), the Sum of the Series is equal to the

$$\text{Sum } \frac{N-1}{1}a + \frac{N-1}{1}\times\frac{N-2}{2}r + \frac{N-1}{1}\times\frac{N-2}{2}\times\frac{N-3}{3}m + \frac{N-1}{1}\times\frac{N-2}{2}\times\frac{N-3}{3}\times\frac{N-4}{4}z + \frac{N-1}{1}\times\frac{N-2}{2}\times\frac{N-3}{3}\times\frac{N-4}{4}\times\frac{N-5}{5}Z + \frac{N-1}{1}\times\frac{N-2}{2}\times\frac{N-3}{3}\times\frac{N-4}{4}\times\frac{N-5}{5}\times\frac{N-6}{6}T + \frac{N-1}{1}\times\frac{N-2}{2}\times\frac{N-3}{3}\times\frac{N-4}{4}\times\frac{N-5}{5}\times\frac{N-6}{6}\times\frac{N-7}{7}Q = H - A.$$

Cor. 1. $r, s, t, u, w, x,$
$a, b, c, d, e, f, g,$
$A, B, C, D, E, F, G, H,$

If A, B, C, *&c. be continued Proportionals, and* N *remain unchanged, the nearer the intermediate Ratio* $\frac{A}{B}$ *approaches to the Ratio of Equality*, i. e. *the leſs the Ratio* $\frac{a}{A}$ *of the Difference of the Terms is to the leſs Term, the nearer always will the Ratio* $\frac{N-1\times a}{H-A}$ *approach to the Ratio of Equality.*

For Magnitudes continually proportional are proportional to their Differences (*c*): Therefore, becauſe B : A :: b : a, by

(*a*) Number 23. (*b*) Number 27. (*c*) Eucl. V. 19.

by Division $B - B : A :: b - a : a$, that is, $a : A :: r : a$; therefore the Ratio $\frac{a}{A}$ being diminished, the Ratio $\frac{r}{a}$ is also diminished; and thence also the Ratio, which any Multiple of the Magnitude r has to a; the Ratio also $\frac{B}{A} = \frac{s}{r}$ (for $B : A :: s : r$) is diminished, therefore the Ratios $\frac{s}{r}$, and $\frac{r}{a}$, are diminished, whence the Ratio $\frac{s}{a}$ will be diminished; and thence the Ratio, which any Multiple of the Magnitude s has to a, will be diminished; and the Ratio $\frac{s}{r}$ being diminished, it's Duplicate $\frac{t}{r}$ (for r, s, t, are continually proportional) is diminished; therefore the Ratios $\frac{t}{r}$ and $\frac{r}{a}$ are diminished, and thence the Ratio, which any Multiple of the Magnitude t has to a, is diminished. After the same Manner the Ratio, which any Multiple of the Magnitude u, has to a is diminished; and so on continually. Now all these Ratios will be considerably diminished, because the Ratios $\frac{B}{A}$ and $\frac{r}{a}$ are considerably diminished; and therefore the Ratio which the Sum $x + 2w + 3u$ &c. has to a will be considerably diminished, and thence also the Ratio which this Sum $x + 2w + 3u$, &c. has to $N - 1 \times a$ will be considerably diminished; and the Ratio $\frac{N - 1 \times a}{H - A}$ will verge to the Ratio of Equality.

Cor. 2.

A, B, C, D, E, F, G, H, ---- I, K, L, M, N, O, P, Q,

The Extremes verging to an Equality, and N *remaining unchanged,*

unchanged, the Ratio $\frac{N-1\times a}{H-A}$ *verges to the Ratio of Equality; and thence the Exceſſes, by which the Terms* B, C, D, *&c. exceed the Term* A, *divided by that Term, viz.* $\frac{B-A}{A}$, $\frac{C-A}{A}$, $\frac{D-A}{A}$, *&c. verge to the Meaſures of the Ratios* $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, *&c.* For if the Number of Terms in a Series whoſe Beginning and End are any Extremes whatſoever A and E be called N, and $\frac{B-A}{A}$ be put for the Meaſure of the intermediate Ratio $\frac{B}{A}$; then $N-1$ will be the Number of the Ratios $\frac{B}{A}$ of which the Ratio $\frac{E}{A}$ is compounded, whoſe Meaſure therefore (Cor. 1. P. 2.) will be $N-1\times\frac{B-A}{A}$ which verges to the Quantity $\frac{E-A}{A}$. But Quantities continually proportional are proportional to their Differences, viz. $\frac{B-A}{A}$, $\frac{C-B}{B}$, $\frac{D-C}{C}$, &c. are conſtantly equal to each other, and the Meaſures of equal Ratios are equal; and therefore if the Terms I, K, L, &c. be placed in a continued Order any where in the Series continued, $\frac{K-G}{G}$ will be the Meaſure of the Ratio $\frac{K}{G}$; and $\frac{K-I}{I}$, $\frac{L-I}{I}$, will verge to the Meaſures of the Ratios $\frac{K}{I}$, $\frac{L}{I}$, &c. in the ſame Syſtem.

Cor.

Cor. 3. r, s, t, u, w, x,
a, b, c, d, e, f, g,
A, B, C, D, E, F, G, H,
The ſame Things being ſuppoſed, the Meaſure of the Ratio between any determinate Extremes whatſoever, H, *and* A, *will be always leſs than* $\frac{H - A}{A}$, for the Sum $x + 2w + 3u$, &c. will not vaniſh.

Cor. 4. *The Extremes verging to an Equality, and the intermediate Ratio remaining unchanged, the Ratio* $\frac{N - 1 \times a}{H - A}$ *verges to the Ratio of Equality.* For the Difference of the Extremes H and A is equal to the Sum of the Differences $g + f + e$, &c. and in like Manner the Difference of the Extremes F and A is equal to the Sum of the Differences $e + d + c$, &c; but (becauſe the Differences a, b, c, &c. increaſe perpetually) the Ratio of the greater Sum of the Differences $g + f + e$, &c. to the leſs Sum of the Differences $e + d + c$, &c. is greater, than the Ratio which the greater Number of them has to the leſs Number of them; that is, (if the Number of Terms in the Series whoſe Beginning and End are A and F be called n) the Ratio of H — A to F — A is greater than the Ratio of N — 1 to n — 1, or than the Ratio of N — 1 × a to n — 1 × a (*d*); and by Alternation, the Ratio of H — A to N — 1 × a is greater than the Ratio of F — A to n — 1 × a; viz. the Ratio $\frac{F - A}{n - 1 \times a}$ is leſs ſhort of the Ratio of Equality.

Cor. 5. A, B, C, H, *firſt Series*
A, *D*, *E*, *F*, *H*, *ſecond Series*
a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m,
A, g, p, *D*, B, s, *E*, m, C, *F*, y, z, H, *third Series*
The Extremes remaining unchanged, and N *being increaſed,* B — A

(*d*) Eucl. viii. 18.

$B - A \times N - 1$ *is diminiſhed.* For let there be two Series, having their Beginning and End the ſame, A, and H; and let the Number of Terms be N, and n: And if a third Series be made whoſe Beginning and End are alſo the ſame A and H, and in which the Number of Terms leſs one is a Number P, which $N - 1$ and $n - 1$ will meaſure; the Terms of either of the former will be the ſame with thoſe Terms of the third Series, which ſhall be taken at Intervals, by omitting a Number of the Terms intervening, equal to the Quote of the Number P divided by $N - 1$, or $n - 1$, reſpectively. Let the Differences of the Terms in this third Series be a, b, c, &c; the Number of Differences a, b, c, &c. of which either Difference $B - A$, or $D - A$, conſiſts, is P divided by the reſpective $N - 1$, or $n - 1$, and therefore the Numbers of the Differences a, b, c, &c. of which the Differences $B - A$ and $D - A$, conſiſt, are as $n - 1$ to $N - 1$ (*e*), that is, inverſely as the Numbers of the Terms in the Series, A, B, C, &c. and A, D, E, &c. diminiſhed by Unity. But (upon Account of the perpetual Increaſe of the Differences) the Ratio which $d + c + b + a$ the greater Sum of Differences has to the leſs Sum of Differences $c + b + a$ is greater, than the Ratio which their greater Number has to their leſs Number; viz. $N - 1$ being increaſed in any Ratio, $B - A$ is diminiſhed in a greater Ratio; and conſequently $B - A \times N - 1$ is diminiſhed.

Cor. 6. $\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, \\ A, & B, & C, & D, & E, & F, & G, & H, \end{matrix}$

The Ratio of $H - A$ *to* $N - 1 \times a$ *is leſs than the Ratio of the Extremes* $\frac{H}{A}$. For (upon Account of the Differences a, b, c, &c. always increaſing) the Ratio of the Sum of all the Differences $g + f + e$, &c. to the leaſt Difference multiplied into their Number, viz. to $N - 1 \times a$

(*e*) 60.

$\times a$, is leſs than the Ratio of the greateſt Difference to the leaſt, viz. than the Ratio of $\frac{g}{a}$, or $\frac{G}{A}$; and therefore leſs than the Ratio $\frac{H}{A}$.

Cor. 7. *The Extremes remaining unchanged, and* N *being ſufficiently great,* $N - 1 \times a$ *will approach nearer to an invariable Quantity, than by any definite Difference:* to wit, N *may be aſſumed of a Magnitude ſo great, that though it ſhould be again and ever ſo much increaſed, yet the Ratio between* $N - 1 \times a$ *firſt aſſumed, and* $N - 1 \times a$ *again aſſumed, ſhall differ from the Ratio of Equality leſs than by any aſſigned Difference.* For N may be indefinitely increaſed, while (Cor. 5.) $N - 1 \times a$ is in the mean Time perpetually diminiſhed; but the Ratio of the given Quantity $H - A$ to $N - 1 \times a$ is always leſs than the given Ratio $\frac{H}{A}$ (Cor. 6.); therefore if N ſhould be perpetually increaſed, $N - \times 1\ a$ will verge to an invariable Quantity.

Cor. 8. *The finite Number of Terms* N *remaining unchanged, let the Ratio* $\frac{a}{A}$ *be indefinitely diminiſhed; the Extremes* A *and* H *will come nearer to an Equality than by any predefinite Difference; and* $N - 1 \times a$ (Cor. 1.) *will be equal to the Difference of the Extremes* $H - A$; *(to wit, their Ratio will approach nearer to the Ratio of Equality than any predefinite Ratio of Inequality will) and thence it appears, that the Terms* A, B, C, *&c. will be equidifferent; and that, if* $\frac{B - A}{A}$ *be put for the Meaſure of the Ratio* $\frac{B}{A}$, then $\frac{H - A}{A}$ *will be the Meaſure of the Ratio* $\frac{H}{A}$: *And the contrary.* Now *if the Extremes remaining unchanged,* N *be any how changed, the Ratio between* $H - A$

and

and N — 1 × a *will* (Cor. 6.) *remain nearer always to the Ratio of Equality, than the Ratio* $\frac{H}{A}$; *and therefore if* $\frac{B-A}{A}$ *be always put for the Meaſure of the intermediate Ratio* $\frac{B}{A}$, *the Meaſure of the Ratio* $\frac{H}{A}$ *will remain unvaried*; to wit, it will differ leſs from a given Quantity, than by any predefinite Difference; *and therefore, if* N *be underſtood to be indefinitely increaſed, ſo that every Magnitude of the ſame Kind, which is neither leſs than* A *nor greater than* H, *may be placed in this Series, 'tis evident, that the Meaſure of the Ratio between any ſuch Magnitude whatſoever, and the Term* A, *will be the Difference of the Terms divided by the leſs Term.*

Cor. 9.

A, B, C, D, E, F, G, H, - - - I, K, L, M, N, O, P, Q,

Let the Series now be continued on, untill the Exceſſes by which the Terms I, K, L, *&c. exceed the Term* A, *may have ſome conſiderable Ratios to the Term* A; (but you are to conceive a Number of Terms indefinitely great to be placed between H and I,) and (becauſe that in approaching to the Term H, $\frac{Q-A}{A}$, $\frac{P-A}{A}$, &c. perpetually decreaſe and verge (Cor. 4.) to the Meaſures of the Ratios $\frac{Q}{A}$, $\frac{P}{A}$, &c. and becauſe every Magnitude of the ſame Kind is placed in this Series continued each way) 'tis evident, that *the leſs the Quote is of the Difference of any two Magnitudes whatſoever divided by the ſmaller, the nearer always will this Quote approach to the Meaſure of the Ratio of the Magnitudes*; and therefore the nearer alſo will the double, or triple, &c. of this Quote, approach to the Meaſure of the duplicate, or triplicate, &c. Ratio; wherefore *the Extremes remaining unaltered, and the Number of mean Terms being in any Manner varied, let the Difference between the two firſt Terms divided by the ſmaller*

be

be always indefinitely called x, *and let the Number of Terms be always* N; *by how much leſs* x *is, by ſo much always will* $N - 1 \times x$ *approach nearer to an invariable Meaſure of the Ratio* $\frac{Q}{A}$: *And it will approach nearer than by any aſſigned Difference, if the ſecond Term aſcends not beyond the Term* H. *(f)*

Cor. 10. *x, y, z,* A, B, C, D, E, F, G, H,

And if the Terms, A, z, y, *&c. be placed in the Series continued the contrary Way, and if the intermediate Ratio verges to the Ratio of Equality;* $\frac{A-B}{A}$, $\frac{A-C}{A}$, &c. will verge (Cor. 2. P. 2.) to the Meaſures of the Ratios $\frac{z}{A}$, $\frac{y}{A}$, &c. which are the Reciprocals of the Ratios $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, &c. But they alſo verge to the Quantities $\frac{z-A}{A}$, $\frac{y-A}{A}$, &c. becauſe the Series *y, z,* A, B, continued each Way, and finite, verges to an arithmetical Series; therefore $\frac{z-A}{A}$, $\frac{y-A}{A}$, &c. will verge to the Meaſures of the Ratios $\frac{z}{A}$, $\frac{y}{A}$, &c; and *all Things which were before demonſtrated in the Series* A, B, C, *&c. have Place alſo (with the proper Changes (g)) in the Series,* A, z, y, *&c.*

Cor. 11.

A, B, C, D, E, F, G, H, - - - I, K, L, M, N, O, P, Q,

Let all the Terms, A, B, C, *&c. be now changed into Numeral, and the Series be conceived to be continued each Way to*

(f) Cor. 8. (g) Cor. 2. P. 2.

Infinity, all Numbers will be placed in this Series; and if $\frac{B-A}{A}$ *be put for the Logarithm of the Ratio* $\frac{B}{A}$, then $\frac{H-A}{A}$ *will be the Logarithm of the Ratio* $\frac{H}{A}$; and $\frac{B-A}{A} \times N - 1$ *will be the Logarithm of the Ratio between any Extremes whatſoever,* Q *and* A; *and will remain invariable, however the Number of mean Terms be varied, ſo that the ſecond Term aſcends not beyond* H *(h).*

Logarithms of this Kind the moſt noble Lord Napier *Baron of* Merchiſton *in* Scotland *invented, and they are called Hyperbolic (i).*

Cor. 12. *Hence, if* $\frac{B-A}{A}$ *be given, the Logarithm of any Ratio whatſoever* $\frac{B}{A}$, *will be as* $N - 1$; *and if* N *be given, the Logarithm will be as* $\frac{B-A}{A}$; *that is, if* A *alſo be given, as* B — A; *that is, if* A *be Unity, as the Exceſs above Unity of the Root of the Term* Q *whoſe Index is* N — 1. For if Unity begins the Series, every ſubſequent Term is a Power of the ſecond Term, whoſe Index is the Number of Terms reckon'd to that Term excluſive (*k*), *viz. if from two Numbers, which are both greater or both leſs than Unity, be extracted the Roots of the ſame Power whoſe Index is indefinitely great, the Exceſſes of theſe Roots above Unity, will be as the Logarithms of the Ratios which theſe Numbers have to Unity; that is, the greater the Index of the Power is, the nearer will the Ratio of the Exceſſes approach to the Ratio of the Logarithms.* Theſe Things are all evident in the hyperbolic Syſtem, and by (Prop. 2.) the ſame have Place in every other Syſtem.

Cor. 13. And *if for the Logarithm of any Ratio whatſoever be put it's hyperbolic Logarithm multiplied into any numeral*

(*h*) Cor. 8. (*i*) Cor. 3. (*k*) 76.

numeral Quantity M, *the Logarithms of all other Ratios (Prop. 2.) will be their hyperbolic Logarithms multiplied into the ſame Quantity; but the hyperbolic Logarithm of any given Ratio is invariable* (*l*), *that is, there is but one Syſtem of hyperbolic Logarithms; therefore the Logarithm of any given Ratio is as that aſſumed Quantity* M, which is called *the Module of the Syſtem.*

Cor. 14. A, B, C, D, E, F, G, H,

Becauſe the Logarithm of the Ratio $\frac{H}{A}$ is $\frac{H-A}{A} \times M$:

If that Logarithm be called L; then $\frac{H-A}{A} \times M = L$,

and $H-A \times M = L \times A$; whence $H-A : L :: A : M$ (*m*), that is, *the Exceſs by which any Number whatſoever exceeds the Subtrahend* A, *is to the Logarithm of the Ratio, which it has to the Subtrahend, as the Subtrahend is to the Module of the Syſtem*; provided that this Ratio approaches very nearly to the Ratio of Equality. And hence *the Exceſſes by which any two Numbers whatſoever exceed a given Subtrahend* A *are as the Logarithms of the Ratios which they have to the Subtrahend* (*n*), *provided that they are placed in the Series on the ſame Side of the Number* A, *and that the three Numbers are very nearly equal*; viz. the nearer they approach to an Equality, the nearer the Ratio of the Exceſſes approaches to the Ratio of the Logarithms.

The Ratio whoſe Logarithm is the Module of the Syſtem is called *the modular Ratio.*

Cor. 15. *The modular Ratio is the ſame in all Syſtems.* For the Modules of two Syſtems are as (Cor. 13.) the Logarithms of any given Ratio in thoſe Syſtems; and thence 'tis evident, that the Modules themſelves are the Logarithms of ſome ſame Ratio, to wit, If the Modules

(*l*) Cor. 7. 9. (*m*) Eucl. vii. 19. (*n*) Eucl. v. ii.

be called L, and M, and $\frac{p}{g}$ be the modular Ratio in the Syſtem whoſe Module is L, L will be to M, as L to the Logarithm of the Ratio $\frac{p}{g}$ in the Syſtem, whoſe Module is M, therefore that Logarithm is M: viz. $\frac{p}{g}$ is alſo the modular Ratio in the Syſtem whoſe Module is M *.

Cor. 16. *Every Number is a Power of the Number, whoſe Ratio to Unity, is the Modular; the Index of which Power is the hyperbolic Logarithm of the Ratio of that Number to Unity.* For the Logarithm of the Ratio of the Number to Unity multiplied into the Index of the Power gives the Logarithm of the Ratio of the Power to Unity (*o*), and *the hyperbolic Logarithm of the modular Ratio, is Unity*, which in Multiplication makes no Change.

By Number I every where underſtand, every numeral Quantity, whether Integer, or Fraction.

SCHOLIUM.

333. *The Logarithms of all Ratios cannot be accurately exhibited.* For if they could be perfectly expreſſed, and integer Numbers ſhou'd be taken in the Ratio of the Logarithms, it wou'd follow, that all Ratios cou'd be compounded of ſome ſame Ratio, and that the Numbers of the component Ratios were thoſe aforeſaid Integers reſpectively; that is, all Numbers cou'd be accurately placed in a geometrical Series, whoſe intermediate Ratio ſhou'd be that of determinate Magnitudes: And thence alſo there cou'd no Ratio exiſt, which ſhou'd approach nearer to

* This modular Ratio is that of 2,7182812, &c. to Unity, that is, of ſome Number between 2 and 3 (but nearer to 3 than 2) becauſe 2,718, &c. is greater than $2,5=2\frac{1}{2}$ to Unity. See Cote's Harmonia Menſurarum, Prop. 1. Schol. 2. and the next Prop. of this.

(*o*) Number 330.

to the Ratio of Equality, than that intermediate Ratio; viz. the Ratio of the Difference of two Terms any where adjacent in a Series to either Term cou'd not be any further diminiſhed, and that Difference wou'd be inviſible. Which is abſurd (*a*).

334. *But* becauſe a Series can be exhibited, in which are placed the Terms *m*, *n*, of any given Ratio $\frac{m}{n}$, and alſo ſome Terms, whoſe Ratios to the Terms of any other given Ratio $\frac{A}{B}$, ſhall approach nearer to the Ratios of Equality, than by any definite Difference; it follows, that *if any given Number whatſoever be put for the Logarithm of the Ratio* $\frac{m}{n}$, *the Logarithm of a Ratio, which ſhall come nearer to the Ratio* $\frac{A}{B}$ *than by any given Difference can be exhibited* (*b*).

335. *But the Logarithms of all Ratios, whoſe Analogy to the Ratio* $\frac{m}{n}$ *can be accurately expreſſed, may be accurately found*; viz. *whoſe Terms are placed in the ſame Series with the Terms* m, *and* n, *the intermediate Ratio of which is that of determinate Magnitudes.* Thus if 2 be put for the Logarithm of the Ratio of 5 to 3, that is, of the Ratio of the Fraction $\frac{5}{3}$ to 1; the Logarithms of all Ratios, whoſe Terms are placed in the ſame Series with the Terms $\frac{5}{3}$ and 1, will be aſſable, viz. the Logarithms of all the Ratios, which the Powers of the Number $\frac{5}{3}$, whoſe Indices are rational, have to Unity:

(*a*) Definitions. (*b*) P. 1.

Becauſe, every one of thoſe Powers is placed in the ſame Series, with the Terms $\frac{5}{3}$ and 1, whoſe intermediate Ratio is that of determinate Magnitudes. As for Example 1, $\frac{5}{3}$, and $\frac{5}{3}^{\frac{9}{11}}$, are placed in a Series, whoſe intermediate Ratio, is that of the determinate Magnitudes $\frac{5}{3}^{\frac{1}{11}}$ and 1, viz. the Ratio, which the Root of the Number, $\frac{5}{3}$, of the eleventh Power, has to Unity: Now becauſe the Number of the Ratios $\frac{5}{3}^{\frac{9}{11}}$ to 1, of which the Ratio $\frac{5}{3}$ to 1, is compounded, is 11; and the Number of the ſame Ratios, of which the Ratio $\frac{5}{3}^{\frac{9}{11}}$ to 1, is compounded, is 9; and becauſe $11 : 9 :: 2 : \frac{18}{11}$; and becauſe (by Hypotheſis) 2 is the Logarithm of the Ratio of $\frac{5}{3}$ to 1; therefore $\frac{18}{11}$ will be the Logarithm of the Ratio of $\frac{5}{3}^{\frac{9}{11}}$ to 1. And after the ſame Manner the Logarithms of the Ratios which the other Powers have to Unity will come out, by multiplying their reſpective Indices by the Logarithm of the Ratio which $\frac{5}{3}$ has to 1.

336. *Thus* alſo, *if Unity be put for the Logarithm of the Ratios of* 10 *to* 1, *the Logarithms of all the Ratios, which the Powers of the Number* 10 *whoſe Indices are rational*

onal have to 1, *will be effable.* As for Example, the Logarithms, will be effable of the Ratios $\frac{10^2}{1}$, $\frac{10^3}{1}$, $\frac{10^{\frac{1}{2}}}{1}$, $\frac{10^{\frac{1}{3}}}{1}$, $\frac{10^{\frac{5}{11}}}{1}$, viz. of the Ratios $\frac{100}{1}$, $\frac{1000}{1}$, $\frac{\sqrt{10}}{1}$, $\frac{\sqrt[3]{10}}{1}$, $\frac{\sqrt[11]{100000}}{1}$, and theſe Logarithms will be 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{11}$, reſpectively; becauſe 1, 10, and all thoſe Powers are placed in a Series, whoſe intermediate Ratio is that of the determinate Magnitudes $\sqrt[66]{10}$ and 1; viz. the Ratio, which the Root of the Number 10 of the ſixty-ſixth Power, has to Unity: *And the natural Numbers,* 1, 2, 3, *&c. will be the Logarithms of all Ratios, which are compounded in the Ratio* $\frac{10}{1}$; viz. of the Ratios $\frac{10}{1}$, $\frac{100}{1}$, $\frac{1000}{1}$, &c.

337. *But the Logarithms of all the other effable Ratios will be ineffable.* Example, the Logarithm of the Ratio of 6 to 1 will be ineffable, becauſe no Series can be exhibited, in which 1, 10, and 6, are placed; but 6 is a Power of 10, whoſe Index is the ineffable Logarithm of the Ratio $\frac{6}{1}$: that is, Becauſe 1 and 10 are placed in the ſame Series with ſome Number *n*, whoſe Ratio to 6 can come nearer to the Ratio of Equality than by any aſſigned Difference, and thence, *becauſe the Logarithm of the Ratio* $\frac{n}{1}$ *can always be accurately exhibited, if there be taken a Power of* 10, *whoſe Index is that Logarithm, the Number* n *will come out* (*c*): *And if again there be taken the Logarithm of*

(*c*) Number 331.

of a Ratio which comes ſtill nearer to the Ratio of $\frac{6}{1}$, *viz. if* (as it is uſually expreſſed, the Logarithm of the Ratio of $\frac{6}{1}$, be to be found more accurately) *there be taken a Power of the Number* 10, *whoſe Index is the laſt found Logarithm, there will come out a Number* n *nearer to the Number* 6 *than before, and ſo on to Infinity.*

338. But *in the hyperbolic Syſtem the Logarithm of no given Ratio is aſſumed:* But they are all to be determined from their Ratios to the infinitely ſmall Logarithm of that Ratio, of which all Ratios are ſuppoſed to be compounded (*d*).

339. *In this Syſtem therefore the Logarithm of no given Ratio can be accurately found.* Let the Ratio $\frac{Q}{1}$ be given, and between 1 and Q let there be taken ever ſo many mean Proportionals: And if the firſt of thoſe mean Proportionals be *s* and the Number of the Terms of the Series be N, viz. if *s* be the Root of the Power of the Number Q whoſe Index is $N-1$, and if $s-1$ be put for the Logarithm of the Ratio $\frac{s}{1}$, then $s-1 \times N-1$ will be the Logarithm of the Ratio $\frac{Q}{1}$ (*e*).

340. After the ſame Manner *the Logarithms of any given Ratios whatſoever may be accurately determined, but in different Syſtems: And the Indices of the Powers being indefinitely increaſed, all thoſe Syſtems will verge to Identity, and at laſt coaleſce into one, viz. the Hyperbolic* (*f*).

341.

(*d*) Cor. 11. (*e*) Cor. 11. (*f*) Cor. 7.

341. Therefore *if there be taken the Root of any Number whatſoever, of a Power whoſe Index is ſufficiently great; and the Exceſs by which the Root exceeds Unity* (*g*), *be multiplied by the Index of the Power* (*h*); *the hyperbolic Logarithm of the Ratio of that Number to Unity will come out very nearly* (*i*). *And the Logarithm found after this Manner of the decuple Ratio, is* 2.302585, *&c.*

This Hyperbolic Syſtem was the firſt, which Lord Napier the moſt ſagacious Inventor of Logarithms hit upon. He afterwards found out others more commodious for practical Uſes: but, whilſt he was intent upon bringing them to Perfection, he changed this Life for a better. Mr. *Henry Briggs* the firſt of the Savilian Profeſſors of Geometry at Oxford *perfected and publiſhed his Logarithms leſs than the hyperbolic by more than Half.*

For *he put Unity for the Logarithm of the decuple Ratio, to the End that the Logarithms correſponding to the Numbers continued in the decuple Ratio,* viz. 1, 10, 100, 1000, &c. *might be* 0, 1, 2, 3, *&c. which are called Characteriſtics,* becauſe they ſhew how many Places the Numbers correſponding go beyond the Place of Unity.

Therefore, the Logarithm correſponding to every Number, greater than Unity and leſs than Ten, will be leſs than Unity; viz. a Fraction; *and the Logarithm correſponding to every Number, placed between* 10 *and* 100, *will be between* 1 *and* 2; viz. Unity with a Fraction adjoined, *and ſo on continually.*

342. And becauſe the Diviſion of any Number whatſoever (whether integer, decimal, or mixed) by any Power of Ten, may be done by moving the ſeparating Line ſo many Places toward the left Hand, as there are Units in the Index of the Power (*k*); and becauſe the Logarithm of the

(*g*) Cor. 12. (*h*) 337. (*i*) 340. (*k*) 133.

the Ratio of a Quote to Unity, is the Difference of the Logarithms of the Ratios of the Dividend and Diviſor to Unity (*l*); therefore *the Logarithms, which correſpond to Decimals, or mixed Numbers, are found from the given Logarithms of Integers by ſubducting ſo many Units from the Characteriſtic, as there are decimal Places cut off.* As may be ſeen in the following Series.

Numbers		*Logarithms*
83749	4. 922979	
8374,9	3. 922979	
837,49	2. 922979	
83,749	1. 922979	
8,3749	0. 922979	
,83749	—1. 922979	
,083749	—2. 922979	

343. *The Logarithms of Decimals thus emerging will have their integral Parts, viz. their Characteriſtics negative; and the other Parts affirmative.* And if the laſt Figure to the left be a Decimal, or a Centeſimal, &c. the Characteriſtic will be —1, or —2, &c. (*m*)

344. Whence *if the Number is ſought which agrees to a given Logarithm, having rejected the Characteriſtic, let the given Logarithm, or the Logarithm next to the given one, be ſought in the Table*, (and it will be moſt certainly found at the laſt Characteriſtic in the Table, for if it be at the leſs Characteriſtic, it will without Doubt be at the greater; but not converſely, becauſe that in every ſubſequent Claſs are placed all the Numbers which are produced by multiplying the Numbers of the next preceding Claſs by 10, and moreover, the other intermediate Numbers,) *and the Number which is ſet over againſt it will be either accurately, or very nearly, that which is ſought, whoſe laſt Figure to the left will proceed ſo many Places beyond that of Unity, as the given Characteriſtic indicates.* Thus if the Number is ſought whoſe

(*l*) 329. (*m*) XXVIII.

whoſe Logarithm is 2.922979. To the Part of it 922979 there ſtands oppoſite in the Table the Number 83749, whoſe laſt Figure is in the Place of Hundreds, viz. two Places beyond the Place of Units, becauſe of the Characteriſtic 2; and ſo the Number is 837,49. But had the Characteriſtic been — 2, the laſt Figure muſt have been in the Place of hundredth Parts; viz. two Places ſhort of the Place of Unity, becauſe of the negative Characteriſtic — 2; and the Number ſought wou'd have been ,083749. Whence the following Rule is given, to wit. *If the Characteriſtic of the given Logarithm is* — 1, *the Number correſponding will be wholly decimal; if the Characteriſtic be* — 2, *it will be wholly decimal, and alſo one Cypher is to be prefixed; if it be* — 3, *two Cyphers are to be prefixed, and ſo on continually.*

345. *But if the given Logarithm which correſponds to the Fraction which is ſought be wholely negative, let the given Logarithm changed into affirmative be ſought in the Table, and a Fraction, whoſe Denominator is the Number correſponding to it, and whoſe Numerator is Unity, will be that which is ſought.* For Example let the Logarithm — 2 + 922979 be reſumed, which is equal to the totally negative Logarithm — 1.077021 (*n*). I ſeek at the laſt Characteriſtic in the Table the Part ,077021 of 1,077021, and I find the next to it to be 077040, to which correſponds the Number 11941, whoſe laſt Figure to the left will be in the Place of Tens, becauſe of 1 the Characteriſtic of the Logarithm 1.077021; and therefore the Number correſponding to the Logarithm 1.077021 will be 11,941 very nearly, whoſe Reciprocal $\frac{1}{11,941}$ (= ,083749) will be nearly that which is ſought; to wit, which correſponds (Cor. 2. P. 2.) to the negative Logarithm —1.077021 (*o*).

346. But

(*n*) For. 1 — 922979 = — 1,077021 (XXVI) &c. — ✓ ſubducted from — 2 leaves — 1. (*o*) Cor. 10.

346. But *if a Decimal equal to the ſought Fraction is to be found, let the given Logarithm changed into affirmative be ſubducted from the next greater Characteriſtic, or (which is the ſame) let the fractional Part of it be ſubducted from Unity, and the Number, which in the Table correſponds to the Reſidue will be the Decimal which was to be found, having ſo many Cyphers prefixed to it, as there are Units in the Characteriſtic of the given Logarithm.* For Example, Let the negative Logarithm — 1.077021 be reſumed, if this be added to the Characteriſtic 2 (*p*), viz. the Logarithm, which correſponds to the Power of the Number 10, or (which is the ſame) if with the Sign changed it be ſubducted from 2; there will reſult 0,922979 the Logarithm correſponding (Cor. 2. p. 2.) to the Product of the Decimal to be found into the Power of the Number 10: Therefore the ſignificant Figures of the Decimal to be found will correſpond in the Table to the Part 922979, but the Number correſponding is 83749, to which one Cypher is to be prefixed upon Account of the Characteriſtic — 1, of the Logarithm —1.077021. For the Logarithms of the Ratios $\frac{10}{1}$, $\frac{100}{1}$, $\frac{1000}{1}$, &c. being ſuppoſed to be 1, 2, 3, &c. the Logarithms of their Reciprocals $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. will be — 1, — 2, — 3 &c. And as the Logarithm correſponding to every Number, which is greater than 10 and leſs than 100, is Unity with a Fraction adjoined; ſo the negative Logarithm correſponding to every Fraction, which is leſs than $\frac{1}{10}$ and greater than $\frac{1}{100}$, will be Unity with a Fraction adjoined; and the negative Logarithm correſponding to every Fraction, which is leſs than $\frac{1}{100}$ and greater

(*p*) XXIV.

greater than $\frac{1}{1000}$, will be 2 with a Fraction adjoined; and ſo on continually. But every Fraction, which is placed between $\frac{1}{10}$ and $\frac{1}{100}$ when changed into a Decimal, will have one Cypher prefixed to it's ſignificant Figures; and which is placed between $\frac{1}{100}$ and $\frac{1}{1000}$ will have two Cyphers prefixed; and ſo on continually: Therefore, ſo many Cyphers are to be prefixed to the Number found, as there are Units in the Characteriſtic of the given Logarithm. And ſhould the given Logarithm conſiſt entirely of a Characteriſtic, tis manifeſt, that the Decimal ſought will be Unity with ſo many Cyphers prefixed, as is indicated by the Characteriſtic diminiſhed by Unity.

From what has been ſaid it appears, that *the Method firſt mentioned is far the beſt, to wit, that which ſuppoſes the Logarithm correſponding to a Fraction to be partly affirmative, and partly negative:* becauſe it at once exhibits a decimal Fraction equivalent to the ſought Fraction. Wherefore that this Form may always be followed.

347. *If a greater Logarithm is to be ſubducted from a leſs, let the Operation be performed in the ſame Manner, as if the Subtrahend was greater than the Minuend* (q): *And if any Thing is to be transferr'd to the Characteriſtic of the greater Logarithm, the Difference between it's Characteriſtic thus increaſed and the Characteriſtic of the leſs Logarithm will be negative; and the reſt of the Reſidue affirmative.* Example, let the Logarithm 2.89265 be ſubducted from the Logarithm 1.32221

1. 32221
2. 89265

the Reſidue will be — 2.+42956: for the Part 89265, ſubducted

(q) XXV.

ſubducted from the Part 32221 augmented by Unity, leaves the affirmative Reſidue 42956, and the Characteriſtic 2 augmented by Unity and ſubducted from the Characteriſtic 1, gives the negative Reſidue — 2.

348. *In Addition, Subduction, or Multiplication, if any thing is to be transferred to a negative Characteriſtic, that which is transferred (being affirmative) diminiſhes the negative Value of the Characteriſtic* (r). Thus, if the Logarithm — 2. 42956 is ſubducted from the Logarithm 1. 32221

— 2. 42956

the Remainder is 2. 89265

becauſe Unity transferred to — 2 makes — 1, which ſubducted from 1, leaves the Characteriſtic 2. or, if the Logarithm — 1. 66847118 be multiplied by 5, the Product will be — 2. 3423559; for 3 transferred to the negative Product 5 × — 1 from the next preceding Product 5 × 6, makes the negative Characteriſtic — 2.

349. *In Diviſion, if the Diviſor cannot meaſure a negative Characteriſtic, let the Characteriſtic be increaſed until the Diviſor can meaſure it, and the Number by which it meaſures it will be the negative Characteriſtic of the Quote; and the Augment together with the next Figure of the Dividend, adjoined to it on the right Hand, will conſtitute the next Dividual.* For thus the Logarithm to be divided will be diminiſhed, and again augmented, which will make no Change. Example, let the ſurſolid Root of the Fraction $\frac{13}{591}$, be required,

the Logarithm of the Numerator is	1. 11394335
the Log. adjoin'd to the Denominator is	2. 77158748

the Difference of theſe Logarithms is — 2. 34235587 the Logarithm correſponding to the Fraction $\frac{13}{591}$: Let the Logarithm — 2. 34235587 be divided by 5, and the Quote will be — 1. 66847117: for the Characteriſtic — 2 increaſed

creaſed by the Negative — 3 and divided by 5 gives — 1 the Quote; and the other Part 3423 &c. augmented by the Affirmative 3 prefixed and divided by 5, gives the Quote 66847117; therefore the Logarithm corresponding to the Root ſought is — 1. 66847117: I look for the Part 66847117 at the laſt Characteriſtic of the Table, and find the next leſs 66846978, to which the Number 46609 corresponds, which will be wholly decimal, becauſe of the Characteriſtic — 1 of the given Logarithm; and therefore the Root required is 0,46609.

350. *If having rejected the Characteriſtic the given Logarithm cannot be accurately found in the Table, let the next greater, and the next leſs be taken, and their Difference found: This Difference will be to the Difference of their corresponding Numbers, viz. Unity, as the Exceſs of the given Logarithm above the next leſs Logarithm, to a fourth Number; which is uſually called the* proportional Part: *And which being added to the leſs Number will very nearly give the Number ſought, if the Table be ſufficiently extenſive*, viz. that the Difference of contiguous Logarithms may be ſmall enough, or (which comes to the ſame) that the corresponding Numbers be ſo great that they come very nearly to an Equality: For great Numbers, whoſe Difference is not greater than Unity, approach to an Equality, and (Cor. 14. P. 3.) the Exceſſes by which two exceed a third, are as the Logarithms of their Ratios to the third; that is, as the Exceſſes, by which their corresponding Logarithms exceed the Logarithm corresponding to the third: Thus, if the ſurſolid Root of the Fraction $\frac{13}{59}$ be to be found more accurately, the Logarithm corresponding to the Root is — 1. 66847117, the one next leſs, rejecting their Characteriſtics, is 66846978, and next greater 66847910, their Difference 00000932 is to Unity, as 00000139 (to wit the Exceſs of 66847117 above 66846978) is to the decimal Fraction

149 (*s*), therefore 149 is the proportional Part, to be annexed to 46609; and therefore the significant Figures, which correspond to the Part 66847117 of the given Logarithm, are 46609149; whence, because of the Characteristic — 1, the Root required is 0,46609149.

351. *If the Logarithm corresponding to a given Number is sought, and the Number is not contained within the Limits of a pretty extensive Table; let the given Number be changed into a mixed, by cutting off the redundant Figures for Decimals; and let there be taken the Logarithm corresponding to the Figures remaining to the left, and also the Logarithm next greater: Then Unity will be to the Difference of these, as the Decimal to a fourth Number, which is called also the* proportional Part; *and which added to the less Logarithm, makes the required Logarithm very nearly.* Example, Let the Logarithm be required corresponding to the Number 46609149, the Logarithm, rejecting the Characteristic, corresponding to the Number contained in the Table 46609, is 6684697852, and that which is the next greater, is 6684791029, and their Difference is 0000093177; and Unity is to 0000093177, as 149 (*t*) to 0000013883, which

---

(*s*) for (139) 932) 1390 (, 149
932
458
372
86
81

(*t*) (55) 0000093177
941
9317
3727
839
0000013883

which added to 6684697852 makes 6684711735; which corresponds to the Figures of the given Number. Whence, becauſe that given Number is an Integer conſiſting of eight Figures, the Logarithm required will be 7.6684711735 (*u*).

352. *The Logarithm thus found ought to be ſomething leſs than the true one. But it will come out accurate enough for Practice, eſpecially if the laſt Figure to the left of the correſponding Number be* 8 *or* 9 (*w*).

353. And it will be found more accurately by the following Method. *Let double the aforeſaid Fraction be divided by the Sum of the Fraction and of the Integer ſquared, and the Quote multiplied into the Module of the vulgar Syſtem, to wit, into the decimal Fraction* 0,4342944819 *&c. and the fractional Product added to the leſs Logarithm; and the Logarithm required will come forth.*

Becauſe all Logarithms, and conſequently alſo the correſponding Numbers cannot be accurately found in the Table, and becauſe an intermediate Number correſponding to a given Logarithm may be to be found, 'tis neceſſary to make a Correction by a proportional Part: Doctor *Wallis* obſerved, that as a Remedy to this Inconvenience; there was *wanting an antilogarithmic Canon, in which the Logarithms being wrote in Order, from* 1 *to* 100000, *the Numbers correſponding to them, ſhould be wrote oppoſite; ſo that by the Aſſiſtance of this Canon the Number correſponding to a given Logarithm might be found with the ſame Eaſe, as we are uſed to find by the Aſſiſtance of the vulgar Tables the Logarithm correſponding to a given Number.* But in the vulgar Syſtem the Numbers correſponding to thoſe Logarithms are 10, 100, 1000, &c. which it wou'd be both uſeleſs and impoſſible to annex: therefore *this moſt learned Perſon mean'd without Doubt, that to the Logarithms from* .00001 *to Unity,*

(*u*) Number 341. (*w*) Number 344.

there ſhould be annexed the correſponding Numbers, to wit, that there ſhould be exhibited 99999 *mean Proportionals between Unity and* 10.

354. *He has told us moreover, that ſuch a Canon was many Years ſince made*, and was either begun by *Harriot*, or was both begun and finiſhed by *Walter Warner*, who had *Harriot*'s Papers, and publiſhed his Algebra. That he had theſe Accounts from Doctor *John Pell*, who was *Warner*'s Friend and Aſſiſtant in that Calculus; and that he had only a View of this Work among *Harriot*'s Papers; but that afterwards this Canon was in the Hands of *Richard Buſbey*, the Schoolmaſter, who gave Hopes of publiſhing it under the Care of Doctor *Pell*, provided that *Wallis* wou'd, if *Pell* ſhou'd die, ſucceed him in the Care of it, *but that he feared leaſt the Work ſhou'd be entirely loſt, eſpecially as no Perſon wou'd take upon himſelf the Expence of an Edition.* And *in Truth tho' ſuch a Canon had been made publick, yet it wou'd have been neglected*; for I cannot ſee to what Uſe it wou'd ſerve. For the Logarithms which uſually occur in arithmetical Operations are irrational, (to wit, reſulting from the Addition, Subduction, Multiplication, and Diviſion, of the Logarithms correſponding to the Numbers which are in the Table,) agreeing with thoſe rational ones to five Places of Figures: Therefore *the Numbers in ſuch a Canon, altho' exhibited to an infinite Number of Places of Figures, (for they wou'd be irrational) wou'd be always leſs than the required Numbers; and wou'd agree with them, often not to five Places of Figures, very ſeldom to ſix, but never, if the firſt redundant Figures of the given Logarithm ſhou'd make a Number, not leſs than the Number* 43429, *conſiſting of the firſt five Figures in the Module of the vulgar Syſtem.* Example, 'tis certain that the Numbers correſponding to the Logarithms 01246 and 012464343 will not agree to ſix Places of Figures, becauſe 43430 is not leſs than 43429.

355. *But the Number correſponding to any given Logarithm may be found to five Places of Figures in the vulgar Tables. And alſo the Logarithm itſelf may be found moſt commonly*

commonly to five Places of Figures; and to four always. For the Difference of any two Logarithms whatſoever is the Logarithm of the Ratio of their correſponding Numbers, and the Difference of two contiguous Numbers in the ſecond Claſs (Cor. 3. 5. P. 3.) viz. of thoſe which proceed from 10 to 100, divided by the leſs Number, is greater than the hyperbolic Logarithm of the Ratio of thoſe Numbers, and therefore much greater than the vulgar Logarithm of the ſame Ratio. Example, $\frac{1}{13}$ is greater than the hyperbolic Logarithm, and therefore greater alſo, than the vulgar Logarithm, of the Ratio $\frac{14}{13}$. But every Fraction, whoſe Numerator is Unity, and whoſe Denominator is placed between 10 and 100, is leſs than $\frac{1}{10}$; therefore the Difference of any contiguous Logarithms whatſoever, which are annexed to the *Characteriſtic* 1, is leſs than $\frac{1}{10}$. But in aſcending theſe Logarithms come to the Logarithm 2; (for 1, and 2, are the Logarithms correſponding to 10 and 100) and therefore 'tis plain, that *in the Initials of theſe Logarithms*, (neglecting their Characteriſtics) *there will be ſingle Figures of every Kind*, 0, 1, 2, &c. Alſo the Difference of two contiguous Numbers in the third Claſs divided by the leſs, is greater than the hyperbolic Logarithm of the Ratio between the Numbers, and therefore greater alſo than the vulgar Logarithm of the ſame Ratio. Example, $\frac{1}{324}$ is greater than the hyperbolic Logarithm, and therefore greater than the vulgar Logarithm, of the Ratio $\frac{325}{324}$. But every Fraction, whoſe Numerator is Unity, and whoſe Denominator is placed between 100 and 1000, is leſs than $\frac{1}{100}$: therefore the Difference of any contiguous Logarithms whatſoever, which are annexed to the *Characteriſtic*

Characteriſtic 2, is leſs than $\frac{1}{100}$. But in increaſing thoſe Logarithms attain to the Logarithm 3; and therefore it appears, *that in the Initials of theſe Logarithms, there will be Binaries of Figures of all Kinds*, 00, 01, 02, &c. 10, 11, 12, &c. After the ſame Manner; *in the Initials of thoſe which are annexed to the Characteriſtic* 3, *there will be Ternaries of Figures of all Kinds, and ſo on continually. And therefore every Logarithm can be found to one Place of Figures, at the Characteriſtic* 1; *to two Places, at the Characteriſtic* 2; *to three Places, at the Characteriſtic* 3: *and ſo on to Infinity.*

356. *Moreover, in the Table alſo may be found to five Places of Figures every Logarithm, which is not leſs than the Logarithm which correſponds to the Number* 43429; *to wit, the firſt five Figures in the Module of the vulgar Syſtem.* For 100000 is to 43429, as $\frac{1}{43429}$ to $\frac{1}{100000}$; and the Fraction $\frac{1}{43429}$ exceeds by very little the hyperbolic Logarithm of the Ratio $\frac{43430}{43429}$; (for it muſt neceſſarily differ from it, by a Quantity, which is more than twice leſs than a Fraction, whoſe Numerator is Unity, to wit, the Square of the Difference of the Terms 43430 and 43429, and whoſe Denominator is the Square of the Term 43429, yet, if it be ſuppoſed equal to it, the Error thence ariſing will be more than compenſated by a contrary Error, which will ariſe by ſuppoſing, for the Ratio of the hyperbolic Logarithm to the vulgar, a Ratio, which is ſomething greater; that of 100000 to 43429: So that the vulgar Logarithm of the Ratio $\frac{43430}{43429}$, viz. the Difference of the Logarithms correſponding to the Numbers 43430, and 43429, will be ſomething leſs than the Fraction $\frac{1}{100000}$: And the Differences of the ſubſequent contiguous Logarithms are perpetually diminiſhed.

But

But thoſe Logarithms in aſcending attain to *the Logarithm* 5; and therefore *in their Initials will be Quinaries of Figures of every Kind, which are not leſs than the firſt Quinary of Figures, in the Logarithm which correſponds to* 43429. *But the Limit alſo will be leſs than that Logarithm*; for it will ſooner come to paſs, that the Difference between any contiguous Quinaries whatſoever ſhou'd not be greater than Unity, than that the Differences of the Logarithms in decreaſing ſhou'd become not greater than $\frac{1}{100000}$.

Mr. *Henry Briggs* publiſhed Logarithms computed to fourteen Places of Figures for all Numbers from 1 to 20000, and from 90000 to 100000. Theſe diminiſhed of their four Figures to the right Hand, together with the Logarithms from 20000 to 90000 computed to ten Places, *Adrian Vlacque* had printed, and publiſhed the Table compleated. He gave his Reaſon for omitting the four Figures, that beſide the remaining being ſufficient for common Uſe, the Table might not require more Space, and thereby become more expenſive, which wou'd be an Injury to him, becauſe the Number of Buyers wou'd be diminiſhed. But he wou'd have done better, if he had publiſhed the Logarithms for all Numbers from 10000 to 100000 computed to fourteen Places, and omitted all the reſt; becauſe they are ſuperfluous, and increaſe the Bulk of the Table.

But *Briggs endeavour'd to explain the two Methods of computing Logarithms, which were found out by Napier. The former is after this Manner.*

357. *Let the Number to which the correſponding Logarithm is required, be ſuppoſed to be involved to the Power, whoſe Index is* 100 000 000 000 000; *and the Number of Figures in this Power diminiſhed by Unity is the Logarithm required.* But becauſe it wou'd be impoſſible to arrive at ſo great a Power, by a continued Multiplication by the Root; to avoid that inſuperable Labour, many interme-

diate Numbers being omitted, *ſuch Powers are to be multiplied into each other, whoſe Indices added together will make the Index of the Power required. But it is neither* poſſible, *nor neceſſary, to exhibit theſe Powers perfectly, but ſo many Figures only to the left Hand in each, as are ſufficient to ſhew the Numbers of Places in the Powers following; to the End that the Number of Places in the laſt Power may be computed.* For there will be as many Places in any Product, as there are in both Factors taken together, unleſs it ſhou'd happen, that the Product of the laſt Figures to the left, increaſed by the Increment of the Figures to the right, can be expreſſed by a ſingle Figure; in which Caſe, the Number of Places in the Product is equal to the Number of Places in the Factors leſs by Unity (*a*). That all thoſe Things might more eaſily appear, He *diſtinguiſhed the Powers with their Indices and Numbers of Places into Tetrads*, in the Manner following

4	2	1
16	4	2
256	8	3
1024	10	4
1048576	20	7
1099511627776	40	13
1208925819614 63	80	25
1267650600228 23	100	31
1606938044258 99	200	61
2582249878086 85	400	121
6668014432879 40	800	241
1071508607186 18	1000	302
Powers	Indices	Numbers of Places

2 multiplied into itſelf makes 4, whoſe Index is 2; 4 multiplied into itſelf makes 16, whoſe Index is 4; 16 into itſelf makes 256, whoſe Index is 8; and 256 multiplied into 4 makes 1024, whoſe Index 10 is equal to the Indices

(*a*) Number 54.

Indices of the Factors. The Number of Places in this laſt Product is 4. Now theſe four Numbers 4, 16, 256, 1024, conſtitute the firſt Tetrad. Another Tetrad is then to be made, whoſe firſt Number is produced, by multiplying the laſt Number of the preceding Tetrad into itſelf; the ſecond is the Square of the firſt; the third the Square of the ſecond; but the fourth is the Product of the third multiplied into the firſt. And the Indices of theſe four are 20, 40, 80, 100; and the Number of Places 7, 13, 25, 31. After the ſame Manner the remaining Tetrads are finiſhed. So that the Index of the laſt Member of every Tetrad may be 1000, or 10000, &c. untill *the fourth Member of the laſt Tetrad may have it's Index* 100 000 000 000 000; *but the Number of Places in this fourth Number will be* 30102999566399; *and therefore the Logarithm agreeing to the Number* 2, *will be* 30102999566398.

In Order to explain this Method, he premiſed the three following Lemmas.

Firſt, *In a Series of Numbers continually proportional from Unity, any two Terms involved according to their alternate Indices give equal Powers.* Which is true, becauſe either Power is equal to the ſecond Term of the Series raiſed to a Power whoſe Index is the Product of the Indices (*b*).

Second, *If any Term be continually divided by it's Side, viz. the Second Term of the Series, as often as it can be, viz. untill the Quote is Unity, the Number of Diviſions will be the Index of the Term.* Which is alſo true, being the Definition of the *Index of any Term whatſoever in that Series.*

Third, *If any Term whatſoever* A *be raiſed to a Power, whoſe Index is the ſame with the Index of any other Term whatſoever* B, *and the Power be divided as long as it can be by*

(*b*) Number 83.

by B, *the Number of Diviſions will be the Index of the Term* A *in the ſame Series* (*c*). And this is alſo true, for it is contained in the two preceding. By the Aſſiſtance of theſe Lemmas he explained the Method, as follows.

If in a Series whoſe Beginning is Unity, the Index appointed to the Number 10 be 100 000 000 000 000, viz. if between 1 and 10 there are 99 999 999 999 999 mean Proportionals; all Numbers will very nearly be placed in this Series. And *any two Terms involved according to their alternate Indices give equal Powers; whence if any Number whatſoever, for Example,* 2, *be raiſed to a Power whoſe Index is* 100 000 000 000 000, *there will come out that Power of the Number* 10 *whoſe Index is the ſame with the Index of the Number* 2 *in that Series; whence if that Power be continually divided as often as it can be by* 10, *the Number of Diviſions will be the Index of the Number* 2; *but the Number of Diviſions by* 10 *is the Number of Places in the Dividend leſs by Unity* (*d*); *therefore the Number of Places diminiſhed by Unity is the Index of the Number* 2 *in that Series; or, is the Logarithm correſponding to* 2; *if the Indices be put for the Logarithms.* 'Tis to be obſerved however, *that the Number* 2 *is not placed in that Series, but ſome Number* n, *which, tho' it is but a little exceeded by the Number* 2, *nevertheleſs* n *and* 2, *involved according to ſo great an Index, will give Powers not equal, but very different: But* n *and* 10 *involved according to their alternate Indices, give equal Powers; therefore thoſe Powers of the Numbers* 2 *and* 10 *will be unequal. And altho' the Index appointed to the Number* 10 *ſhou'd be increaſed indefinitely, in order that* n *may always approach nearer to* 2, *and that there ſhou'd be always taken Powers of* n *and* 2 *involved according to the increaſed Indices, theſe Powers will not upon Account of the Indices thus increaſed verge to an Equality.*

But if n *and* 2 *verge to an Equality, their Powers alſo raiſed according to any invariable and finite Index whatſoever will*

(*c*) Number 85. (*d*) Number 133.

will verge to an Equality. Wherefore if in the Place of the Index of the Number 10 *there is always ſubſtituted ſome invariable Number* 1, *and in the Place of the Index of the Number* n *there is always put a Number, which has the ſame Ratio to* 1, *which the Index of the Number* n *has to the Index of the Number* 10; n *and* 10 *involved alternately according to thoſe Numbers proportional to their Indices will give equal Powers; and the ſimilar Powers of* 2 *and* 10 *will verge to an Equality; that is,* 2 *and* 10 *involved according to their alternate Logarithms give equal Products.* Example, If the Index of the Number 10 be 1000, viz. if between 1 and 10 there be 999 mean Proportionals, the Index of the Number *n* will be 301; now for the Index of the Number 10, let 10 be ſubſtituted, and in the Place of the Index of the Number *n* there will be 3,01; for 1000 is to 301, as 10 to 3,01. Let the tenth Power of the Number 2 be taken, viz. 1024, and if that Power of the Number 10 be taken, whoſe Index is 3,01, viz. if the Cube of 10 be multiplied into its Root of the hundredth Power; a Number will come out ſomething leſs than 1024. And if the Index of the Number 10 be 10000, the Index of the Number *n* will be 30102; let 10 be put for the Index of the Number 10, and in the Place of the Index of the Number *n*, there will come out 3,0102: And if there be taken a Power of the Number 10 whoſe Index is 3,0102, there will come out a Number nearer to the Number 1024 than before; and ſo on to Infinity. Therefore if 2 be raiſed to any Power whatſoever whoſe Index may be the Logarithm correſponding to the Number 10, there will come out a Power of 10, whoſe Index is the Logarithm correſponding to the Number 2. *And if any Number* A *(greater than Unity) ſhou'd be conceived as the Power of any other Number (greater than Unity)* B, *and* A *ſhou'd be divided continually by* B *untill the Quote becomes leſs than the Diviſor, the Number of Diviſions will be the integral Part of the Index. Whence if any Integer* p *be put for the Logarithm of the Ratio* $\frac{10}{1}$, *and the Power of the Number* 2 *whoſe Index is* p, *be continually divided*

ed to thirty two Places of Decimals. That Root is 1, 00 000 000 000 000 012781 914932 003235, and the Logarithm correſponding to it is 0, 000 000 000 000 000 555111 512312 578270 211815, which he found by the continual Biſection of Unity (as being the Logarithm correſponding to ten, for fifty-four Times, or (which is the ſame) by dividing Unity by 18014398509481984 the Index of the evolved Power. *And he exhibited in a Table, together with their Logarithms oppoſite to them, all the aforeſaid fifty-four Roots, which he called continued Means; and when he had obſerved in theſe continued Means toward the End of the Table, that the Exceſſes by which they exceeded Unity, (being ſo ſmall as to have fourteen or fifteen Cyphers prefixed to their ſignificant Figures) kept the ſame Ratio among themſelves which their correſponding Logarithms did, (the Cauſe of which we have explained in Cor. 8. P. 3.) he conjectured that the ſame would come to paſs in all Numbers not more remote from Unity.*

That theſe Things may diſtinctly appear to the Reader, I will here adjoin the Exceſſes of three continual Means at the End of the Table, together with the Logarithms adjoined, omitting, as well in the continued Means, as in the Logarithms, fifteen Cyphers.

Exceſſes omitting 15 Cyphers.	Logarithms omitting 15 Cyphers.
51127659728012947	22204460492503130808472 63
25563829864006470	11102230246251565404236 31
12781914932003235	05551115123125782702118 15

where it may be obſerved, that the Exceſſes no leſs than the Logarithms decreaſe in a double Ratio; and therefore that the Extraction of the Roots might have been continued by a continual Biſection. He alſo tried the Thing in a Series beginning from Unity of continual Proportionals, whoſe intermediate Ratio is that of Unity to 1,00 000 000 000 000 012781 914932 003235 *the leaſt mean Proportional, and continued for nine Terms: Theſe he found nearly equidifferent.* Whence becauſe the Logarithms of the Ratios of theſe Terms to Unity increaſe (by Def. of Logarithms) in the Ratio of the natural Numbers, it follows,

follows, that the Exceſſes by which the Terms exceed Unity, are nearly as the correſponding Logarithms.

Induced by theſe Reaſons be concluded, that in all Numbers not much remote from Unity altho' not placed in that Series, the Exceſſes were nearly in the Ratio of the correſponding Logarithms. Which being certain, (Cor. 8. P. 3.)

360. The Logarithm correſponding to any given Number can be accurately enough found by the following Method. *Let mean Proportionals between Unity and the given Number be continually ſought, until the laſt is ſo near to Unity that it's Exceſs may have fifteen Cyphers prefixed to it's ſignificant Figures, then by the Golden Rule, as the Difference between the Root which was found before and Unity is to the Logarithm correſponding to that Root, or as* 00 000 000 000 000 012781 914932 003235 to 000 000 000 000 000 555111 512312578270211815, *ſo the Difference between the Root now found and Unity, is to a fourth Number; which will be the Logarithm correſponding to this Root: And which being continually doubled as often as the Number of mean Proportionals indicates, or (which is the ſame Thing) being once multipled by the Index of the Power evolved will give* the Logarithm required. But *that the Trouble of dividing by the firſt Term of the Proportion may be avoided, let there be taken a Number which is to Unity, as the Logarithm correſponding to the Root, is to the Exceſs of the Root above Unity; and that Number multiplied into the third Term of the Proportion will produce the fourth Term ſought. And ſince that Exceſs is nearly the hyperbolic Logarithm correſponding to the Root, 'tis evident, that the Number ſo to be aſſumed is the Module of the vulgar Syſtem, to wit* 43429, *&c.*

And after this Manner did Mr. *Briggs* compute his Logarithms with a Labour ſcarce to be born. But many Mathematicians have ſince invented much eaſier Conſtructions, who have taught to expreſs the Logarithms of given Ratios by infinite Series converging ſwiftly. And they all, except Doctor *Halley*, have done this, either by the Methods

Methods of Fluxions, or by certain geometrical Lines. Wherefore we have not ſo nicely examined their Principles, and the Validity of the Concluſions. But *Halley*, who is the only Perſon, as far as I know, that has attempted to deduce arithmetically theſe Conſtructions from the Nature of Logarithms, publiſhed (in Philoſoph. Tranſ. N. 216) a Method of Computation eminent above all others, and moſtly celebrated. Wherefore it ſeemed proper faithfully to tranſcribe what he has ſaid concerning the Nature of Logarithms.

The old one (viz. Definition of Logarithms) Numerorum proportionalium æquidifferentes Comites, *ſeems ſcanty to define them fully. They may more properly be ſaid to be* Numeri Rationum Exponentes: *Wherein we conſider* Ratio *as a* Quantitas ſui Generis *beginning from the* Ratio *of Equality, or* 1 *to* 1 = 0; *being affirmative when the Ratio is increaſing, as of Unity to a greater Number, but negative, when decreaſing; and theſe* Rationes *we ſuppoſe to be meaſured by the Number of* Ratiunculæ *contained in each. Now theſe* Ratiunculæ *are ſo to be underſtood as in a continued Scale of Proportionals infinite in Number between the two Terms of the* Ratio, *which infinite Number of mean Proportionals is to that infinite Number of the like and equal* Ratiunculæ *between any other two Terms, as the Logarithm of the one* Ratio *is to the Logarithm of the other. Thus, if there be ſuppoſed between* 1 *and* 10 *an infinite Scale of mean Proportionals, whoſe Number is* 100000, *&c.* in infinitum; *between* 1 *and* 2 *there ſhall be* 30102, *&c. of ſuch Proportionals, and between* 1 *and* 3 *there will be* 47712, *&c. of them; which Numbers therefore are the Logarithms of the* Rationes *of* 1 *to* 10, 1 *to* 2, *and* 1 *to* 3; *and not ſo properly to be called the Logarithms of* 10, 2, *and* 3.

But if inſtead of ſuppoſing the Logarithms compoſed of a Number of equal Ratiunculæ *proportional to each* Ratio, *we ſhall take the* Ratio *of Unity to any Number to conſiſt always of the ſame infinite Number of* Ratiunculæ, *their Magnitude, in this Caſe, will be as their Number in the former; wherefore if between Unity and any Number propoſed, there be taken*

taken any Infinity of mean Proportionals, the infinitely little Augment or Decrement of the first of these Means from Unity, will be a Ratiuncula, *that is the* Momentum *or Fluxion of the Ratio of Unity to the same Number: And seeing that in these continual Proportionals all the* Ratiunculæ *are equal, their Sum or the whole Ratio will be as the said Momentum is directly; that is, the Logarithm of each Ratio will be as the Fluxion thereof. Wherefore if the Root of any infinite Power be extracted out of any Number, the* Differentiola *of the said Root from Unity, shall be as the Logarithm of that Number. So that the Logarithms thus produced may be of as many Forms as you please to assume infinite* Indices *of the Power whose Root you seek: as if the Index be supposed* 100000, *&c. infinitely, the Roots shall be the Logarithms invented by the Lord* Napier; *but if the said Index were* 2302585, *&c. Mr.* Briggs's *Logarithms would immediately be produced, &c.*

Thus wrote *Halley*, in which I am not only unable to perceive the Force of the Arguments, but I cannot even from the Language extract any consistent Meaning. And that I may begin with the Definition: The Expression *Rationum* seems here to signify the same as *Logarithmorum*, and I think I may collect this from his saying that *Ratio is affirmative and negative*, and that *Rationes are measured by the Number of* Ratiunculæ *contained in each*; where by *Ratiunculæ* he seems to mean the Logarithm of the intermediate Ratio in a geometrical Series; although the Words *which infinite Number of mean Proportionals is to that infinite Number of the like and equal* Ratiunculæ *between any other two Terms, as the Logarithm of the one* Ratio *is to the Logarithm of the other* seem to mean the same, as if he had called the *Ratiunculæ* the mean Proportionals themselves, (at least if the Word *equal* would permit it) and had said, the *Ratiunculæ* were in the Scale of Proportionals; but this he does not say, only that *they are to be understood as in a continued Scale*; for he calls *the infinitely little Augment or Decrement a Ratiuncula*, and *the Fluxion of the Ratio*; and *the Sum of the Ratiunculæ, the whole*

Ratio, and *the Logarithm*. But if *Ratio* and *Logarithm* signify the same, to what End is it to define Logarithms to be *Numeri rationum Exponentes*? This is to say, that *Logarithms are the numeral Exponents of Logarithms*, or to admonish us (whatever be the Force of the Words) that *therein we consider Ratio as a Quantitas sui Generis*? For as the Sense of those who write by Cyphers is used to be extorted, by seeking, in various Trials upon the most convenient Parts of the Writing, what Words are necessarily implied by the Characters; and by transferring those, when they are found, to the same Characters in other Parts, that the Words signified by the neighbouring Characters may also be more easily detected: so we, who now explore Things which are hidden, are obliged to distinguish, in the Places which seem to give some Light, what Ideas may be implyed by the Words, that those being found out, and transferred to the same Words in Places more obscure, we may trace, if it may be done, the Sense in them also, and so at length the Sense of the continued Discourse. This however we can by no Means accomplish, for perhaps we are ourselves rather slow, and there is some Obscurity in the Expressions. Nor is this extraordinary: For nothing is more usual, than most successfully to deduce Calculations from Principles, as if they were understood, and proved, (than which often times nothing is more easily done) when nevertheless the Principles themselves are opposed to us in such a Manner, that the Mind is blunted in considering and examining them.

But the following Words *beginning from the Ratio of Equality, or* 1 *to* 1 = 0; *being affirmative when the Ratio is increasing, as of Unity to a greater Number, but negative when decreasing* seem to signify, that there is something in the Nature of Logarithms, which shou'd cause that Logarithms of Ratios of lesser Inequality shou'd be affirmative, and of greater Inequality, negative; which is nevertheless intirely arbitrary.

But

But the Words *which Numbers therefore are the Logarithms of the* Rationes *of* 1 *to* 10, 1 *to* 2, *and* 1 *to* 3; *and not so properly to be called the Logarithms of* 10, 2, *and* 3; what can they ſignify, if not, that thoſe Numbers are not properly called the Logarithms of the Numbers 10, 2, and 3, but *the Ratios of the Ratios*, or, *the Logarithms of the Logarithms of* 1 *to* 10, *of* 1 *to* 2, *of* 1 *to* 3?

Or is the Import of the Word *Ratio* vague in this Treatiſe? now tho' we ſhou'd agree to this, and let that Word denote one Thing now, and another then, as the Senſe ſhall require, yet certainly in the Definition, it will denote the ſame as *Logarithm*. For *Logarithms are* Numeri Rationum Exponentes: and thoſe ſame Ratios *are ſuppoſed to be meaſured by the Number of* Ratiunculæ *contained in each*: therefore they contain *Ratiunculæ*, and are ſaid to be *their Sums* or *whole Ratios* which are *as their Fluxions*, that is, *the Logarithm of any Ratio whatſoever is as its Fluxion*. Thus we are reconducted by one unbroken Thread to this, that we muſt conclude the Word *Ratios* in the Definition to ſignify the ſame as *Logarithms*.

But if any one ſhou'd be of Opinion, that by *Ratios*, *the Meaſures of Ratios* are there denoted, ſo as that the Definition ſhou'd import the ſame, as if he had ſaid that *Logarithms are the numeral Exponents of the Meaſures of Ratios*, that wou'd be, not to define the Thing, but after a Manner to declare the Signification of a Name. And thoſe Words, *wherein we conſider* Ratio *as a* Quantitas ſui Generis, *beginning from the Ratio of Equality*, &c. wou'd be equivalent to the following, *In which the Meaſure of a Ratio* (that is, by exhibiting the Meaſures) *the Logarithm is conſidered as a Quantity of its own Kind, beginning from the Meaſure of the Ratio or the Logarithm, of Equality, or,* 1 *to* 1 = 0, *being affirmative when the Ratio is increaſing, but negative when decreaſing*, &c. whereas it is manifeſt, that whatever that is, which in theſe Words is called *Ratio*, is the ſame with that *Ratio*, whatever it may be, which is called *Ratio* in the Definition.

But what that Diverſity of infinite Numbers can be, in what it may conſiſt, or whence it can ariſe, when he ſays, that *if there be ſuppoſed between* 1 *and* 10 *an infinite Scale of mean Proportionals whoſe Number is* 100000 *&c. in infinitum; between* 1 *and* 2 *there ſhall be* 30102 *&c. of ſuch Proportionals, and between* 1 *and* 3 *there will be* 47712 *&c.* I am intirely at a Loſs to know. I know indeed that 1 and 10 can be placed in the ſame Series with any Number, which ſhall differ from the Number 2 by any Difference ever ſo ſmall; if that Number be always called indefinitely *n*, and there be between 1 and 10 taken 999 mean Proportionals, there will be 300 mean Proportionals between 1 and *n*; and if between 1 and 10 there are taken 9999 mean Proportionals, there will be 3009 mean Proportionals between 1 and *n*; that if between 1 and 10 there are taken 99999 mean Proportionals, there will be 30101 mean Proportionals between 1 and *n*, and ſo on to Infinity.

But theſe Words, *if inſtead of ſuppoſing the Logarithms compoſed of a Number of equal* Ratiunculæ, *proportional to each* Ratio, *we ſhall take the* Ratio *of Unity to any Number to conſiſt always of the ſame infinite Number of* Ratiunculæ, *their Magnitude, in this Caſe, will be as their Number is the former; wherefore if between Unity and any Number propoſed, there be taken an Infinity of mean Proportionals, the infinitely little Augment or Decrement of the firſt of thoſe Means from Unity, will be a* Ratiuncula, *that is, the* Momentum *or Fluxion of the Ratio of Unity to the ſame Number: and ſeeing that in theſe continued Proportionals all the* Ratiunculæ *are equal, their Sum, or the whole Ratio will be as the ſaid Momentum is directly; that is, the Logarithm of each Ratio will be as the Fluxion thereof; wherefore if the Root of any infinite Power be extracted out of any Number the* Differentiola *of the ſaid Root from Unity, ſhall be as the Logarithm of that Number.*

Let him who pleaſes attempt to explain, and deduce from the Premiſes.

But

But in the following, *ſo that Logarithms thus produced may be of as many Forms as you pleaſe to aſſume infinite* Indices *of the Power whoſe Root you ſeek*, the Expreſſion, *thus produced*, is ſomething obſcure, for the Particle *thus* ſeems to ſignify a Relation to ſome Method heretofore mentioned; but it has not yet been told, by what Method Logarithms might be produced.

But if Logarithms may be underſtood to be produced, by aſſuming for the Logarithms of the Ratios which the Roots have to Unity, *the Differences, by which they exceed Unity:* It appears (Cor. 8. P. 3.) that there is no Diverſity between thoſe Indices to diverſify the Species of Logarithms. If the Indices be determinate, there will ariſe Logarithms in different Syſtems; but if the leaſt of the Indices be ſufficiently great, the Ratio between the Logarithms of any given Ratio whatſoever, in any two Syſtems whatſoever, will come nearer to the Ratio of Equality than any predefinite Ratio of Inequality ſhall come. Whence as the Indices, to wit, *Numbers*, differ from each other by *Exceſſes* only, a Thought moſt difficult to me occurs; Of what Kind may that *Diverſity* be which *is between infinite Indices?* if infinite may be defined that than which there is no greater.

And if Logarithms may be underſtood to be produced, by aſſuming for the Logarithms correſponding to Powers *the Differences by which the Roots exceed Unity multiplied into any given numeral Quantity*, that is, by putting for the Logarithms which correſpond to the Roots, not the Exceſſes themſelves, but thoſe Exceſſes variouſly multiplied according to the various Syſtems: there is no Doubt, but that the Logarithms thus produced, may be of ſo many Forms as you pleaſe to aſſume Indices indefinitely great of the Power whoſe Root is ſought, to wit, If the Indices be aſſumed ſufficiently great, the Syſtems will be various according to the various Indices: But all the Logarithms which will come out by uſing any one Index in one Syſtem, ſhall remain without a Deviation, which is not leſs than any predefinite one. Thus, if the

Index be 2 302 585092 994045, and the Exceſſes by which the Roots exceed Unity be always multiplied into 1, 000 000 000 000 000, there will come out the Logarithms, very nearly, which correſpond to the Powers in the vulgar Syſtem; for to multiply thoſe Exceſſes into 1, 000 000 000 000 000, is to multiply by 2 302 585092 994045 the Products of thoſe Exceſſes into the Quote of 1000 000 000 000 000 divided by 2 302 585092 994045; and this Quote is nearly the Module of the vulgar Syſtem: For 1 is the vulgar Logarithm of the decuple Ratio, and 2 302 585092 994045 is, very nearly, the hyperbolic Logarithm of the ſame Ratio. But theſe Exceſſes by which the Roots exceed Unity multiplied into the Module of the vulgar Syſtem give the vulgar Logarithms correſponding to the Roots; and therefore theſe Logarithms multiplied into the Index of the Power give the vulgar Logarithms correſponding to the Powers. But it is evident in the ſame Manner, that the Index remaining unchanged, the Logarithms will come out in any other preaſſigned Syſtem whatſoever; if inſtead of 1, 000 000 000 000 000, any other proper Multiplier be made uſe of.

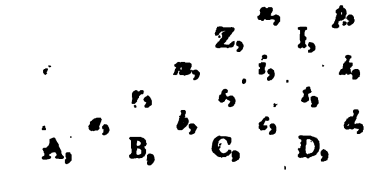
But the following Words *if the Index be ſuppoſed* 100000, *&c. infinitely, the Roots ſhall be the Logarithms invented by the Lord* Napier; *but if the ſaid Index were* 230258, *&c. Mr.* Briggs's *Logarithms would immediately be produced*, are altogether erroneous.

Halley proceeds, and when (by *Newton's* Theorem for finding the Coefficients of Powers) he had extracted the Root of an infinite Power, he deduces from the reſulting Series logarithmic ones, by *rejecting* Numbers divided by *a Number infinitely infinite*; that is, by *a Number infinitely greater, than a Number infinitely great*. *Retaining* however thoſe, divided by an *infinite Number*.

But we ſhall endeavour to derive the ſame Series from another Fountain.

Prop.

Prop. 4.



To find the Logarithm of any given Ratio whatsoever in a given System.

Let A, B, C, &c. be continual Proportionals; *a*, *b*, *c*, &c. the first Differences; *r*, *s*, *t*, &c. the second; *m*, *i*, *k*, &c. the third Differences; and so on continually. If *a* be affirmative, then A, *a*, *r*, &c. will be continual Proportionals; if *a* be negative, viz. if B be less than A, then *a*, *m*, *n*, &c. viz. intermitting one will be negative, and being changed into affirmative, A, *a*, *r*, &c. will be continual Proportionals:

Therefore in both Cases if (A = 1) A be Unity, we shall have $r = a^2$, $m = a^3$, $Z = a^4$; and so on continually; and consequently if the Number of Terms in a Series, whose Beginning and End are A and H, be called N, then (Prop. 3.) $1 + \frac{N-1}{1} \times a + \frac{N-1}{1} \times \frac{N-2}{2} \times a^2 + \frac{N-1}{1} \times \frac{N-2}{2} \times \frac{N-3}{3} \times a^3$, &c. $= H$. Let N be increased to Infinity; and the Terms of the Series $N-1$, $N-2$, $N-3$, &c. being continued to any finite Number whatsoever, will verge to an Equality among one another; and the Series $1 + \frac{N-1}{1} \times a + \frac{N-1}{1} \times \frac{N-2}{2} \times a^2 + \frac{N-1}{1} \times \frac{N-2}{2} \times \frac{N-3}{3} \times a^3$, &c. will be infinite: And $N-1 \times a$ will be (Cor. 11. P. 3.) the hyperbolic Logarithm of the Ratio of H to 1;

and therefore if that Logarithm be called L, then $1 + \frac{L}{1} + \frac{L^2}{1\times2} + \frac{L^3}{1\times2\times3} + \frac{L^4}{1\times2\times3\times4}$, &c. $= H$: Which Series is a general Expreſſion of the Number H, whoſe Ratio to 1 is that, of which L is the hyperbolic Logarithm, whether that Number be greater, or leſs, than 1. If it is leſs, viz. if L be negative, for L let it's negative Value be particularly exhibited, and it will be $1 - \frac{L}{1} + \frac{L^2}{1\times2} - \frac{L^3}{1\times2\times3} + \frac{L^4}{1\times2\times3\times4}$, &c. $= H$.

And if L be put for the Logarithm of the Ratio $\frac{H}{1}$ in any Syſtem whatſoever, whoſe Modnle is M, it will be (Def. of Module) $M - 1 \times a = \frac{L}{M}$; and thence $1 + \frac{L}{1\times M} + \frac{L^2}{1\times2\times M^2} + \frac{L^3}{1\times2\times3\times M^3} + \frac{L^4}{1\times2\times3\times4\times M^4}$, &c. $= H$. And if $L = M$, viz. if the Logarithm of the Ratio $\frac{H}{1}$ be the Module of the Syſtem, that is, if that Ratio be the Modular, it will be $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$, &c. $= H = 2{,}718281$, &c. therefore the modular Ratio is that of 2,7182812, &c. to Unity.

But to return to what was propoſed, Let $H - 1 = b$, and if the Series $L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{6} + \frac{L^4}{24}$, &c. $= b$ be reverſed, according to the Method of the moſt celebrated De Moivre (*a*), there will be found a Series exhibiting the

(*a*) Number 321.

the Quantity L, viz. the hyperbolic Logarithm of the Ratio $1 + b$ to 1. Therefore let there be put

$$L = Rb + Sb^2 + Tb^3 + Vb^4 + Wb^5 \text{ &c.}$$

$$\text{therefore } \frac{L^2}{2} = \quad + \frac{R^2}{2}b^2 + RSb^3 + \frac{1}{2}S^2 + RT\,b^4 + RW + ST\,b^5 \text{ &c.}$$

$$\text{And } \frac{L^3}{6} = \quad \frac{R^3}{6}b^3 + \frac{R^2S}{2}b^4 + \frac{R^2T}{2}b^5 \text{ &c.} \quad + \frac{RS^2}{2}$$

$$\text{And } \frac{L^4}{24} = \quad + \frac{R^4}{24}b^4 + \frac{R^3S}{6}b^5 \text{ &c.}$$

therefore $Rb + \overline{S + \frac{R^2}{2}} \times b^2 + \overline{T + RS + \frac{R^3}{6}} \times b^3 + \overline{V + \frac{S^2}{2} + RT + \frac{R^2S}{2} + \frac{R^4}{24}} \times b^4$ &c. $= b = b + 0 \times b^2 + 0 \times b^3 + 0 \times b^4$ &c. And thence, by equating the corresponding Terms, $R = 1$; $S + \frac{R^2}{2} = S + \frac{1}{2} = 0$, therefore $S = -\frac{1}{2}$; also $T + RS + \frac{R^3}{6} = T - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$, whence $T = \frac{1}{3}$ also $V + \frac{S^2}{2} + RT + \frac{R^2}{2}S + \frac{R^4}{24} = V + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = 0$, whence $V = -\frac{1}{4}$; therefore the Law of the Continuation is known; and consequently $L = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^6}{6}$ &c. which is the Series which *Nicholas Mercator* formerly found out for the Quadrature of the Hyperbola; and which indiscriminately expresses the Logarithm of the Ratio $1 + b$ to 1, whether

ther b be affirmative or negative, *viz.* whether the Quantity added to Unity in the Binome $1 + b$ be affirmative or negative, that is, whether H be greater or leſs than 1. If it be leſs, let for b it's negative Value be ſpecially ſubſtituted, and $L = -b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}$ &c; and therefore in a Syſtem whoſe Module is M, the Logarithm of the Ratio, which $1 + b$ greater than Unity has to 1, will be M into $-b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^6}{6}$ &c. and the Logarithm of the Ratio, which $1 - b$ leſs than Unity has to 1, will be M into $-b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}$ &c.

Cor. 1. *Let* x *be the Difference of two Quantities, of which* a *is the ſmaller and* b *the greater: Becauſe* $b - x = a$, *the Ratio* $\frac{a}{b}$ *viz. the Ratio of* $b - x$ *to* b, *will be the ſame with the Ratio of* $1 - \frac{x}{b}$ *to* 1; *and the Ratio of* b (*to wit,* $a + x$) *to* a, *will be the ſame with the Ratio of* $1 + \frac{x}{a}$ *to* 1; *Therefore for* h *in the Series* M *into* $-h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}$ &c. *let* $\frac{x}{b}$ *be ſubſtituted, and* M *into* $-\frac{x}{b} - \frac{x^2}{2b^2} - \frac{x^3}{3b^3} - \frac{x^4}{4b^4}$ &c. *will be the Logarithm of the Ratio* $\frac{a}{b}$. *Alſo if in the Series* M *into* $h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}$ &c. $\frac{x}{a}$ *be ſubſtituted for* h, *then* M *into* $\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ &c. *will be the Logarithm of the Ratio* $\frac{b}{a}$:

But

But the ſame Logarithm (to wit that of the Ratio which is the Reciprocal of the Ratio $\frac{a}{b}$*) will be* (Cor. 2. Prop. 2.) M *into* $\frac{x}{b} + \frac{x^2}{2b^2} + \frac{x^3}{3b^3} + \frac{x^4}{4b^4}$ &c.

Cor. 2. *Becauſe the Ratio* $\frac{b}{a}$ *is compounded of the Ratio, which* b *has to the arithmetical Mean between* b *and* a, *and of the Ratio of that Mean to the leſs Term* a, *that is, (if* a + b *be called* z) *compounded of the Ratios* $\frac{b}{\frac{1}{2}z}$ *and* $\frac{\frac{1}{2}z}{a}$ (*b*); *therefore the Sum of their correſponding Logarithms will be the Logarithm of the Ratio* $\frac{b}{a}$ (*c*); *and becauſe* $\frac{1}{2}x$ *is the Difference between the Terms of either Ratio* (*d*), *if in the Series of the foregoing Corollary be put* $\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}z} = \frac{x}{z}$ *for* $\frac{x}{a}$ *and* $\frac{x}{b}$; *the Logarithm of the Ratio* $\frac{b}{\frac{1}{2}z}$ *will be* M *into* $\frac{x}{z} - \frac{x^2}{2z^2} + \frac{x^3}{3z^3} - \frac{x^4}{4z^4} + \frac{x^5}{5z^5} - \frac{x^6}{6x^6}$ &c. that of the Ratio $\frac{\frac{1}{2}z}{a}$ will be M into $\frac{x}{z} + \frac{x^2}{2z^2} + \frac{x^3}{3z^3} + \frac{x^4}{4z^4} + \frac{x^5}{5z^5} + \frac{x^6}{6x^6}$ &c. the Sum of which, to wit, 2 M into $\frac{x}{z} + \frac{x^3}{3z^3} + \frac{x^5}{5z^5} + \frac{x^7}{7z^7}$ &c. *will be the Logarithm of the*

(*b*) Number 40. (*c*) Number 238.

(*d*) for $\frac{b}{\frac{1}{2}z} = \frac{a+x}{a+\frac{1}{2}x}$ by Cor. 1. alſo $\frac{\frac{1}{2}z}{a} = \frac{a+\frac{1}{2}x}{a}$ by the ſame.

of the Ratio $\frac{b}{a}$, and this Series converges moſt ſwiftly when the Ratio $\frac{b}{a}$ is not much diſtant from the Ratio of Equality.

SCHOLIUM.

The Logarithms of compoſite Numbers may be found from the Addition of the Logarithms correſponding to the prime Numbers which compound them.

361. *And the Logarithm correſponding to any prime Number whatſoever may with ſufficient Expedition be found, if the Logarithms be given which correſpond to the Numbers next adjacent on each Side. For let the Product of the adjacent Numbers be taken, and the Square of the Number itſelf, which will exceed the Product only by Unity* (*e*), *and to the Logarithm of the Ratio of the Square to the Product, found by the Series of the* 2*d Corollary, let there be added the Sum of the Logarithms correſponding to the adjacent Numbers, to wit, the Logarithm of the Ratio of the Product to Unity, and there will come out the Logarithm of the Ratio of the Square to Unity, the half of which will be the Logarithm required* (*f*). Thus, if the Logarithms are given, which correſpond to the Numbers 2, 3, 5, and the Logarithm correſponding to the Number 19, be required. The Square of 19 is 361, and the Product of 18 and 20, the Numbers next adjacent, is 360; but the Logarithms of the Ratios $\frac{18}{1}$ and $\frac{20}{1}$ are given; (for $2 \times 3 \times 3 = 18$. and $2 \times 2 \times 5 = 20$) to the Sum of which let the Logarithm of the Ratio $\frac{361}{360}$ be added, and the half Sum will be the Logarithm required.

The

(*e*) Number 29. (*f*) Number 330.

The Series in thoſe Corollaries verge more ſwiftly to the Logarithms of Ratios, which are more near to the Ratio of Equality: Wherefore the Logarithms which correſpond to the leſs prime Numbers being compleated, there can be found very expeditiouſly, as well the Logarithms which correſpond to the greater Numbers, as thoſe alſo, after the Table is compleated, which correſpond either to intermediate Fractions, or to Numbers, which run out beyond the Limits of the Table.

362. And there is an Artifice given by *Cotes* *, which makes the Computation of the Logarithms corresponding to the Primes 2, 3, 5, 7, ſomething lighter: to wit, *If the hyperbolic Logarithms of the Ratios* $\frac{126}{125}$, $\frac{225}{224}$, $\frac{2401}{2400}$, $\frac{4375}{4374}$, *be found, (which may be done, becauſe the Series of Cor.* 2. *will converge moſt ſwiftly,) and called* p, q, r, s, *the hyperbolic Logarithm of the decuple Ratio will be* $239p + 90q - 63r + 103s$, *which being found, the Module of the vulgar Syſtem will be given; which let be called* M, *then* M *into* $72p + 27q - 19r + 31s$; M *into* $114p + 43q - 30r + 49s$; M *into* $167p + 63q - 44r + 72s$; M *into* $202p + 76q - 53r + 87s$; *will be the vulgar Logarithms of the Ratios* $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{7}{1}$. For $\frac{126}{125} = \frac{2 \times 3^2 \times 7}{5^3}$; $\frac{225}{224} = \frac{3^2 \times 5^2}{2^5 \times 7}$; $\frac{2401}{2400} = \frac{7^4}{2^5 \times 3 \times 5^2}$ and $\frac{4375}{4374} = \frac{5^4 \times 7}{2 \times 3^7}$; and thence, if the Logarithms of the Ratios $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{7}{1}$, be called, *a*, *b*, *c*, *d*, the following Equations will come out.

---

* Harmonia Menſurarum, Prop. 1. Schol. 3.

$p =$

$$\begin{aligned}
p &= a + 2b + d - 3c \\
q &= -5a + 2b - d + 2c \\
r &= -5a - b + 4d - 2c \\
s &= -a - 7b + d + 4c
\end{aligned}$$

and thence, by Analysis

$$\begin{aligned}
u &= 72p + 27q - 19r + 31s \\
b &= 114p + 43q - 30r + 49s \\
c &= 167p + 63q - 44r + 72s \\
d &= 202p + 76q - 53r + 87s
\end{aligned}$$

and therefore $u + c$ viz. the Logarithm of the decuple Ratio will be $239p + 90q - 63r + 103s$.

363. *The Number corresponding to a given vulgar Logarithm may be found*, if the Table of Logarithms is at hand, by the proportional Part; but more *accurately in the following Manner. Let the Number required be* n, *and* (*neglecting the Characteristic*) *the Number corresponding to the next less Logarithm* (*to be distinguished by the Characteristic of the given Logarithm*) *be* a, *and the hyperbolic Logarithm* (*which we suppose given,*) *of the Ratio* $\frac{n}{a}$ (*viz. the Difference by which the given Logarithm exceeds the Logarithm of the Ratio* $\frac{a}{1}$) *divided by the Module of the System be called* L; *then will* $\frac{1 + \frac{1}{2}L}{1 - \frac{1}{2}L} \times a = n$ *very nearly.* For since the Ratio $\frac{h}{a}$ differs little from the Ratio of Equality, if $n - a$ and $n + a$ be called x and z, the Fraction $\frac{x}{z}$ will be small, and thence (Cor. 2.) $\frac{2x}{z} = \frac{2n - 2a}{n + a} = L$, very nearly; therefore $n = \frac{1 + \frac{1}{2}L}{1 - \frac{1}{2}L} \times a$. But if a more perfect Computation is requisite, it will be $n = \frac{1 + \frac{1}{2}L - \frac{1}{24}L^3}{1 - \frac{1}{2}L + \frac{1}{24}L^3} \times a$ abundantly accurate. And if you would have the Operation

still

Still more accurate, take $n = \frac{1 + \frac{1}{2}L - \frac{1}{24}L^3 + \frac{1}{240}L^5}{1 - \frac{1}{2}L + \frac{1}{24}L^3 - \frac{1}{240}L^5} + a$.

364. *The Number corresponding to any given Logarithm whatsoever may be found by the Series* $1 + \frac{L}{M} + \frac{L^2}{2M^2} + \frac{L3}{6M^3}$, *&c. which will converge the slower, if* $\frac{L}{M}$ (*viz. the hyperbolic Logarithm of the required Ratio*) *be not small. It must be observed however, that if the given Logarithm be a vulgar one* (or if the Module of the vulgar System be at hand, so that the given Logarithm may be readily reduced to a vulgar one) *the Operation will generally become sufficiently easy*; to wit, always easier, than if the given Logarithm was the hyperbolic one of the decuple Ratio. For if the Number corresponding to the Logarithm diminished of its Characteristic be found; the Figures of the Number which corresponds to the given Logarithm will come out; whence (because the Characteristic is known) the Number required will itself be known.

FINIS.

ERRATA.

PAGE 5, line 10, *for* Numerators *read* Denominators. P. 8, l. 11, *f.* Numerators *r.* Denominators. P. 10, l. 36, *f.* Binominal *r.* Binomial. P. 12, l. 20. *f.* often to be taken *r.* often taken. P. 13, l. 7, *f.* $\overline{y-2b} \times \overline{y+b}$ *r.* $\overline{y-2b \times y+b}$. P. 23, l. ult. *f.* effected *r.* affected. P. 28, l. 3, *f.* nearer any Part *r.* nearer any leſſer Part. l. 12, *f.* any adjacent *r.* the adjacent. P. 40, l. 30, *f.* 3,0925 *r.* 3,9025. l. 33, *f.* 25060 *r.* 25090. P. 43, l. penult. *f.* (48) *r.* (47) P. 52, l. 14. *f.* $\sqrt{x-14}$, *r.* $\sqrt[3]{x-14}$. P. 57, l. 27, *f.* $\frac{n-1}{n}$ *r.* $\frac{n-1}{2}$. P. 59, l. 5, *f.* $\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{aab}{c}}$ *r.* $\frac{2ax}{c} \sqrt{\frac{aab}{c}}$. P. 60, l. 16, *f.* Unicæ *r.* Unciæ. P. 71, l. 8, *f.* $x^3 \mp \frac{19}{3}x^2$ *r.* $x^3 \pm \frac{19}{3}x^2$. P. 77, l. 11, *f.* Nnmber *r.* Number. P. 80, l. 25, *f.* particnlar *r.* particular. P. 119, l. 12, *f.* Members *r.* Numbers. P. 140, l. 4 and 6, *f.* $\overline{xxy-z^c}$ *r.* $\overline{xxy-z}^c$. P. 143, l. 22, *f.* c is even *r.* and c even. P. 146, l. 5, *f.* 8 *r.* 12. l. 18, *f.* $\frac{5}{2}$ *r.* $\frac{5}{2}$. P. 183, l. 18, *f.* $10\frac{1}{4}$ *r.* $10\frac{3}{4}$. P. 190, l. antepenult, *f.* aec *r.* aecc. P. 191, l. laſt, *f.* : *r.* . P. 197, l. 7, *f.* $\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}}ss$ *r.* $s\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}}ss$. P. 208, l. 18, *f.* reaion *r.* reaſon. P. 226, l. 20, *f.* $\frac{2\sqrt{bb-xx}}{b}$ *r.* $\frac{x\sqrt{bb-xx}}{b}$. l. 21, *f.* (Eucl. V. 40) *r.* (Eucl. V. 4. Cor.) P. 236, l. 25, *f.* BC^2-DC^2 *r.* BD^2-DC^2. P. 247, l. 22, *f.* $\sqrt{5\frac{a^4}{4}}$ *r.* $\sqrt{5\frac{a^4}{4}}$. P. 268, l. 12, *dele* it. P. 279, l. 17, *f.* G *r.* E. P. 322, l. 20, *f.* $\perp 4br-8aa$ *r.* $\perp 4br=8aa$. P. 325, l. 20, *f.* $-143b$ *r.* $-143b^4$. P. 361, l. 24, *f.* by

ERRATA.

f. by the Square *r.* by a positive Quantity exclusive of the Square. P. 364, l. 16, *f.* descending or ascending to *r.* descending to or ascending from. P. 365, l. 16, *f.* Fractions *r.* Fraction. P. 375, l. penult, *f.* $y+e$ *r.* $y\pm e$. P. 384, l. 10, *f.* $\sqrt{\frac{1}{2}5p^2-\frac{1}{5}q}$ *r.* $\sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{5}p^2-\frac{1}{5}q}$. P. 385, l. 28, *f.* $\frac{qa^2}{b^2}$ *r.* $\frac{qa^2}{b^2}y$. P. 387, l. 21, *f.* $p\sqrt[3]{q^2}\sqrt[4]{r^2}\sqrt[5]{s^2}p\sqrt[2]{pq}$ *r.* $p\sqrt[3]{q^2}\sqrt[4]{r^2}\sqrt[5]{s^2}$, $p\sqrt[2]{pq}$. l. 25, *f.* $p^6qr^2s^2A$ *r.* $p^6q^3r^2s^2A$ P. 396, l. 3, *f.* z into z y n *r.* z into x y n. P. 399, l. 15, *f.* $x^3\times y^3$ *r.* x^3+y^3. l. 17, *f.* $x^2\times y^2$ into $x^4\times y^4$ *r.* x^2+y^2 into x^4+y^4. P. 405, l. 15, *f.* $\frac{R+c}{2}$ *r.* $\frac{R+c}{2}$. P. 409, l. 16, *f.* Square *r.* Squares. P. 415, l. 20, *f.* Sign *r.* Signs. P. 423, l. 3, *f.* $\frac{1}{17}q^3$ *r.* $\frac{1}{2}\frac{1}{7}q^3$. P. 425 l. 8, *f.* $f^3-\frac{g^2}{3}$ *r.* $f^3+\frac{g^2}{3}$. l. 26, *f.* $f^3+g^2=\frac{r}{2}$ *r.* $f^3+3g^2f=\frac{r}{2}$. P. 428, l. 4, *f.* $\varepsilon=\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}a\gamma$, &c. *r.* $\varepsilon=v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}a\gamma$, &c. l. 20, *f.* $nk^2\times x^{r-2}$ *r.* $nk^2\times x^{2r-2}$. P. 429, l. last and P. 430, l. 2, *f.* $\beta=2R-\frac{1}{2}pnk^2+2nkl$ *r.* $\beta=2R+\frac{1}{2}pnk^2-2nkl$. P. 430, l. 5, *f.* $+^2\beta=\frac{1}{2}r$ *r.* $\pm\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}r$. l. 9 and 11, *f.* $\frac{1}{2}p^2nk^2+2nm-pnl-\frac{1}{2}an\times k$ *r.* $\frac{1}{4}p^2n-\frac{1}{2}an\times k^2+2nm-pnl\times k$. l. 16, *f.* $=\frac{1}{4}ank$ *r.* $-\frac{1}{4}ank^2$, l. 17, *f.* $\frac{-2ank}{8}$ *r.* $\frac{-2ank}{8}$. P. 432, l. 6, *f.* $\frac{(k^2)}{64}$ *r.* $\frac{k^2}{64}$. l. last, *f.* $(2-r+1$ *r.* $(2r+1$. P. 442, l. 19, *f.* $-05\frac{5}{8}$ *r.* $-50\frac{5}{8}$. P. 444. l. 25, *f.* $\frac{1}{2}$, pk *r.* $\frac{1}{2}pk$. P. 446, l. 12, *f.* $\frac{8}{2}$ *r.* $\frac{9}{2}$. P. 506, l. 12, *f.* $x^3 6x$ *r.* x^3-6x. P. 507, l. last, *dele* $=\frac{T}{6}$. P. 509, l. last, *f.* $36f^2$ *r.* $36f$. P. 510, l. 1, *f.* $12f^3$ *r.* $12f^2$ l. 17, *f.* $\frac{q^2}{q^2}$ *r.* $\frac{r^2}{q^2}$. P. 511, l. 8, *f.* $f=\frac{q}{2p}\sqrt{-\frac{r}{p}+\frac{q^2}{4p^2}}$ *r.* $f=\frac{q}{2p}+\sqrt{-\frac{r}{p}+\frac{q^2}{4p^2}}$. P. 513, *f.* $f=\frac{-Ak^n, \&c.}{nk^{n-1}, \&c.}$ *r.* $f=\frac{A-k^n, \&c.}{nk^{n-1}, \&c.}$ P. 514, l. 6, *f.*

$f=$

ERRATA.

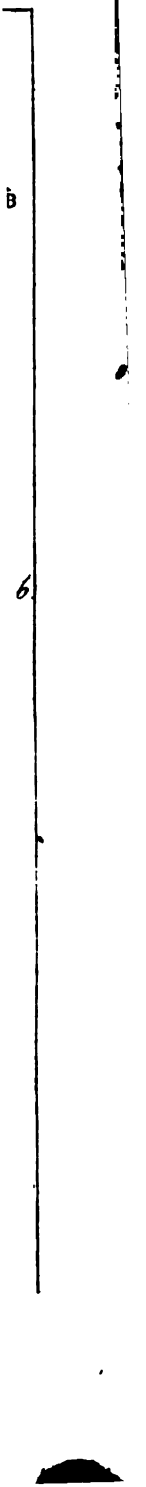
$f=\frac{A-k^n, \&c.}{nk^{n-2}, \&c.}$ *r.* $f=\frac{A-k^n, \&c.}{nk^{n-1}, \&c.}$ P. 524, l. 7, *f.* y^4x^5 *r.* y^4x^6 ibid. *f.* $y+y^4x^3=0$ *r.* $y^7+y^4x^3=0$. P. 526, l. 9, *f.* $-Dy^1$ *r.* Dy^1. P. 528, l. 29, *f.* (by 310, *r.* (by 309.

MEASURES *of* RATIOS.

P. 13, l. 1, *f.* B—B *r.* B—A: P. 20, l. 26, *f.* by (Prop. 2.) *r.* (by Prop. 2.) P. 22, l. antepenult, *f.* nearer to 3 than 2) becauſe 2,718, &c. is greater than $2,5=2\frac{1}{2}$ to Unity *r.* nearer to 3 than to 2, becauſe 2,718, &c. is greater than $2,5=2\frac{1}{2}$) to Unity. P. 23, l. 9, *f.* Ratios *r.* Ratio. P. 29, l. penult, *f.* −1,077021 (XXVI) &—V *r.* +0,077021 (XXVI) &—1. P. 32 at bottom, *r.* (r) XXIV. P. 33, l. 29, *f.* $\frac{13}{59}$ *r.* $\frac{13}{591}$. P. 48, l. 13, *f.* ſeems ſcanty *r.* ſeems too ſcanty. *f.* p. 59, *r.* p. 56, l. 2, *f.* $\frac{L^3}{1\times2\times3}$ *r.* $\frac{L^3}{1\times2\times3}$. l. 11, *f.* $M-1\times a=\frac{L}{M}$ *r.* $N-1\times a=\frac{L}{M}$ P. 57, l. 4, *f.* $\frac{RW}{ST}h^5$ *r.* $\frac{RV}{ST}h^5$. P. 58, l. 8, *f.* M into—h *r.* M into h. P. 62, l. penult, *f.* $\frac{-\frac{1}{24}L^3}{+\frac{1}{24}L^3}$ *r.* $\frac{-\frac{1}{24}L^3}{+\frac{1}{24}L^3}$.

P. 64, MULTIPLICATION, l. 2, *f.* $x^{-n}\mp\frac{n}{1}x^{-n-1}a+\frac{n}{1}\times\frac{n+2}{2}x^{-n-2}a^2\mp_1x^{\frac{n+1}{2}}\times\frac{n+2}{2}x^{\frac{n-1}{2}}$ *r.* $x^{-n}\mp\frac{n}{1}x^{-n-1}a+\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}x^{-n-2}a^2\mp\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}x^{-n-3}$

A
B
D
E
G
b
F
H


B
6

DO NOT CIRCULATE